This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

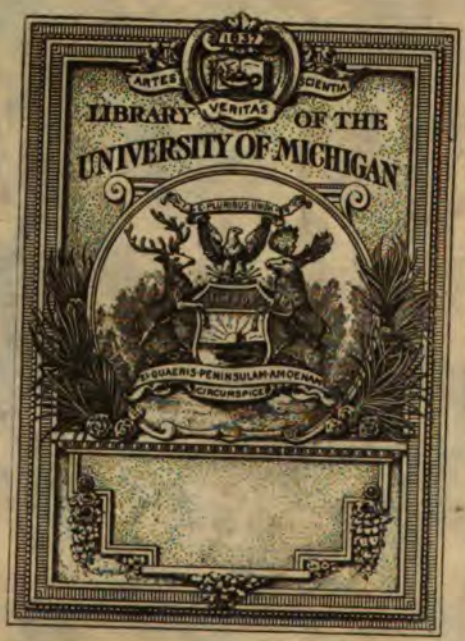
+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

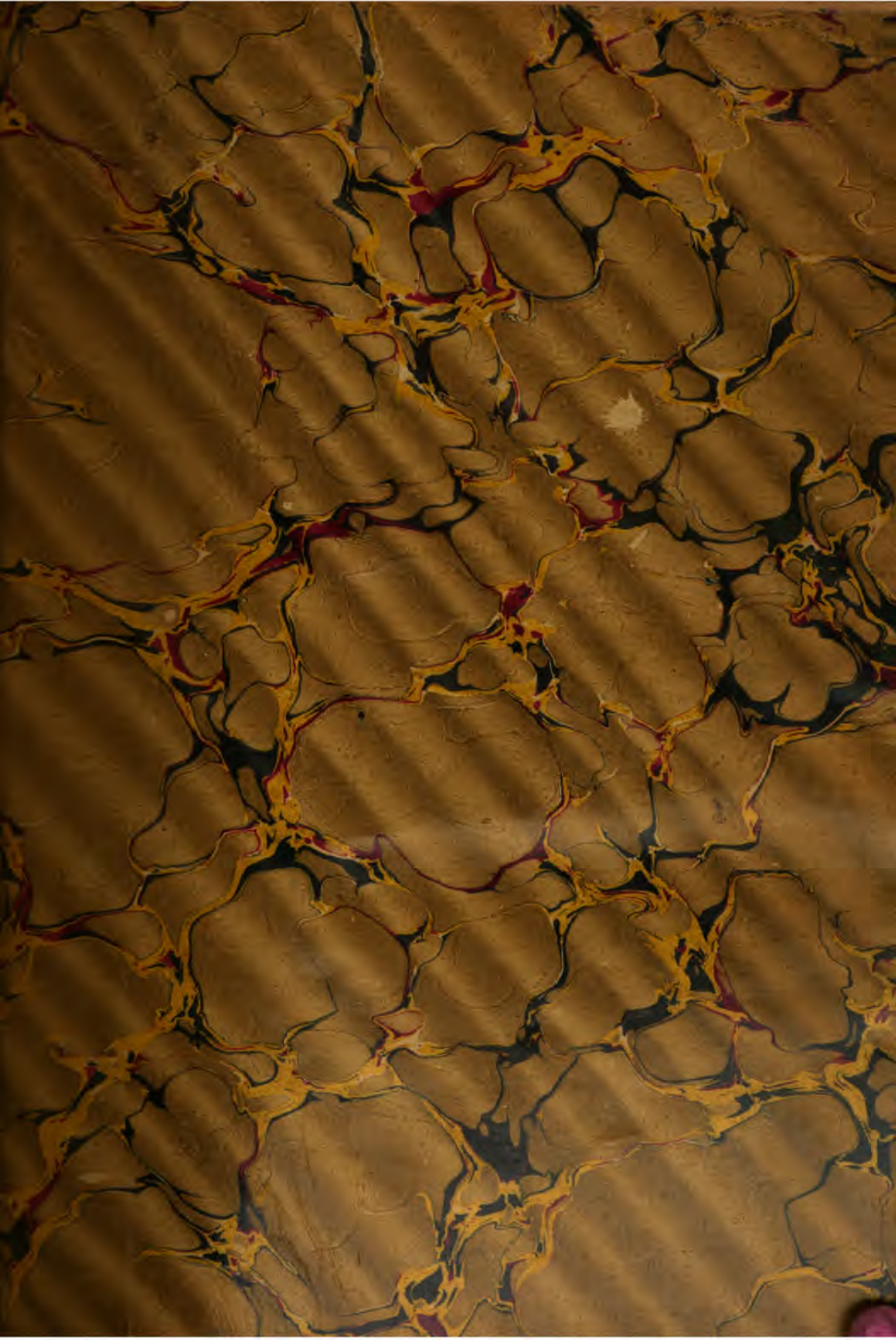
+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`

B 506508


ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



Mathematics
QA
1
G5

GIORNALE
DI MATEMATICHE
DI BATTAGLINI

PER IL PROGRESSO DEGLI STUDI

NELLE UNIVERSITÀ ITALIANE

FONDATO NEL 1863

PROSEGUITO DAL PROFESSORE

ALFREDO CAPELLI

Volume XLI — (40° della 2ª Serie)

1903.

NAPOLI
LIBRERIA SCIENTIFICA ED INDUSTRIALE
DI BENEDETTO PELLERANO
L. C. PELLERANO Successore
1903.

GIORNALE
DI MATEMATICHE
DI BATTAGLINI

PER IL PROGRESSO DEGLI STUDI

NELLE UNIVERSITÀ ITALIANE

FONDATO NEL 1863

PROSEGUITO DAL PROFESSORE

ALFREDO CAPELLI

Volume XLI — (40° della 2ª Serie)
1903.

NAPOLI
LIBRERIA SCIENTIFICA ED INDUSTRIALE
di BENEDETTO PELLERANO
Via Gennaro Serra, 20
1903.

NAPOLI — Tip. A. Trani — Via Medina, 25.

INDICE

Alibrandi Pietro. — Il problema di Dirichlet per un parallelepipedo rettangolo. . . . . *Pag.* 230-241

Annunzi bibliografici. . . . . . *p.* 13, 220, 320, 379, 380

Aschieri F. — Sui complessi tetraedrali . . . . . » 261–284

Barchi Astorre. — Sopra una classe di superficie applicabili e sulle loro flessioni . . . . . » 129–137

Bottari A. — Sulla razionalità dei piani multipli $\left\{ x\ ,\ y\ ,\ \sqrt[n]{F(x\ ,y)} \right\}$ » 285–320

Candido Giacomo. — Sopra un' equazione del decimo grado di Jacobi . . . . . » 205–206

Ceramicola Felice. — Di una rappresentazione ciclica dei periodi delle funzioni doppiamente periodiche come mezzo mnemonico per lo studio delle funzioni ellittiche . . . . . » 107–112

Cesàro E. — Questione proposta . . . . . » 189

» — Risoluzione della questione proposta nel fascicolo Maggio-Giugno 1903 . . . . . » 260

Concorso a premio . . . . . » 192

Darbi Giulio. — Sulle equazioni normali e su certe applicazioni alle equazioni cicliche . . . . . » 242–259

De Luca Ignazio. — Calcolo della k^{ma} spinta fra due forme binarie » 193–202

D' Escamard Vincenzo. — Un teorema sui gruppi abeliani . » 203–204

Errata-Corrige . . . . . » 379

Giubileo Accademico del prof. Leonida Raschi . . » 192

Giudice F. — Sul calcolo assintotico delle radici reali d'equazione » 14–20

» — Separazione delle radici reali d'equazioni a coefficienti numerici reali . . . . . » 190–191

» — Sui sistemi lineari d'equazioni algebriche . . » 207–208

Giulotto Virgilio. — Sulle funzioni sferiche simmetriche del campo ad n dimensioni . . . . . » 21–32

Hurwitz A. — Sulle superficie di Riemann con dati punti di diramazione. Traduzione di Alberto Brambilla con note dell'Autore (*contin. e fine*, *v. vol.* XXXI, p. 229–270) . » 337–376

Lerch M. — Évaluation d'une intégrale définie . . . . *Pag.* 78–84
Loria Gino. — Fondamenti geometrici dello fotogrammetria. Riassunto di alcune lezioni di geometria descrittiva date nell' Università di Genova. . . . . » 1–13
Marletta Giuseppe. — Sulle varietà del quarto ordine con piano doppio dello spazio a quattro dimensioni (*cont. e fine v. vol.* LX, pag. 265–274) . . . . . *p.* 47–61, 113–128
Miller G. A.—Note on Abelian Groupe (V. anche *Errata-Corrige* p. 379) » 336
Montesano Domenico. — Su alcuni sistemi razionali di trasformazioni cremoniane . . . . . » 181–189
Nöther M. — Sophus Lie (traduz. di A. Viterbi). . . » 145–180
Orlando Luciano. — Sulla riduzione delle quadriche a forma canonica » 222–224
» » — Sullo sviluppo della funzione $(1-z)\, e^{z+\frac{z^2}{2}+\dots+\frac{z^{p-1}}{p-1}}$ » 377–378
Palatini Francesco. — Sui complessi lineari di rette negli iperspazi » 85–96
Pannelli Marino. — Sulla Jacobiana di una rete di superficie algebriche . . . . . » 97–106
Perna Alfredo. — Intorno ad alcuni aggregati di coefficienti binomiali » 321–335
Sbrana Umberto. — Sopra un' equazione algebrica . . . » 225–229
Spelta Cesare. — Alcune formole e proprietà relative ai momenti d' inerzia . . . . . » 62–77
Stasi F. — Sulla relazione di dipendenza fra loro delle funzioni delle stesse variabili la cui matrice jacobiana ha una determinata caratteristica . . . . . » 209–221
Teofilato Pietro. — Alcune considerazioni sul metodo di Cauchy-Lipschitz per l' integrazione delle equazioni differenziali ordinarie di 1° ordine . . . . . » 138–144
Volpi Roberto. — Osservazioni per una teoria puramente analitica ed elementare delle funzioni circolari ed iperboliche e loro relazioni coll' esponenziale . . . . . » 33–46

GIORNALE
DI MATEMATICHE
DI BATTAGLINI
PER IL PROGRESSO DEGLI STUDI
NELLE UNIVERSITÀ ITALIANE

FONDAMENTI GEOMETRICI DELLA FOTOGRAMMETRIA

RIASSUNTO DI ALCUNE LEZIONI DI GEOMETRIA DESCRITTIVA

DATE NELL' UNIVERSITÀ DI GENOVA

DA

GINO LORIA.

(*Con una tavola litografata*)

In molteplici circostanze è necessario di avere a propria disposizione procedimenti sicuri e, possibilmente, spediti per risolvere le due seguenti questioni:

I. *Date le projezioni di una figura qualsia fatte da due determinati centri sopra due determinati piani, trovare la projezione della stessa da un terzo centro su di un terzo piano assegnati.*

[Per es.: date due immagini fotografiche di un edifizio, trovarne la projezione ortogonale su un piano parallelo alla facciata, o date le fotografie di una porzione di terreno, prese da due diversi punti elevati, trovarne la projezione ortogonale su di un piano orizzontale].

II. *Date* n ($\geqq 1$) *projezioni centrali di una figura qualsivoglia, fatte da centri di posizione ignota, quali conseguenze possono trarsi riguardo a la forma, la posizione e le proprietà della figura obbiettiva? in particolare, è possibile ricostruirla?*

[Per es.: dato un certo numero di fotografie di una figura, fino a quale punto è possibile ricostruire questa figura?].

Chiameremo *Fotogrammetria* (teorica) quella parte della Geometria descrittiva che insegna a risolvere questi due problemi; essa è in massima parte opera di due

scienziati tedeschi: G. Hauck [1] e S. Finsterwalder [2]. Dai loro studî risulta che le questioni alle quali essi si riferiscono sono tanto importanti da meritare un posto nell'insegnamento e che le soluzioni ottenute sono ormai abbastanza perfette per potere essere esposte in qualunque corso universitario di Geometria descrittiva; siffatto ampliamento di programma è tanto più consigliabile perchè le molteplici applicazioni che trovano nella Fotogrammetria i concetti fondamentali della Geometria projettiva, confermano la fecondità del connubio, celebratosi verso la metà del Sec. scorso, auspice il Fiedler, fra questa e la disciplina creata da Monge.

Scopo unico del presente scritto è di diffondere la notizia di questi importanti nuovi punti di vista in una cerchia meno ristretta di quella formata dai miei abituali ascoltatori.

I.

1. Per non interrompere gli sviluppi concernenti i problemi enunciati in principio, giova raccogliere qui le soluzioni di alcune elementari questioni di Geometria proiettiva, di cui avremo bisogno nei §§ seguenti:

1) *Dati in un piano quattro punti* A, B, C, D, *tre qualunque dei quali non posti in linea retta, determinare il luogo di un punto* M *tale che il birapporto* M(A, B, C, D) *abbia un dato valore* μ.

Pel punto A si conduca una retta a la quale formi con le tre rette AB, AC, AD il birapporto μ; esisterà una conica Γ, determinata ed unica, passante pei quattro punti dati e tangente nel primo di essi alla retta a. Se M è un punto qualunque di essa, il birapporto M(A, B, C, D) è uguale a quello che la retta a forma con le tre AB, AC, AD, cioè uguale a μ; onde M appartiene al luogo cercato. Qualunque punto N esterno a Γ non appartiene a questo luogo; infatti, se la retta AN sega Γ, oltrechè in A, nel punto M, avremo $M(A, B, C, D) = \mu$; se fosse anche $N(A, B, C, D) = \mu$, i due fasci di centri M e N ora considerati sarebbero projettivi, con un raggio unito (la retta AMN), onde sarebbero prospettivi, e B, C, D starebbero in linea retta, contro l'ipotesi. Γ comprende quindi tutti e soli i punti del luogo cercato.

Diremo che la conica Γ è (rispetto ai quattro punti A, B, C, D) *capace* del birapporto μ [3].

---

(1) *Journal für die reine und angewandte Mathematik* T. 95, 97, 98, 108 e 111.

(2) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung T. VIII, 1897: *Die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie.*

(3) Questa denominazione potrebbe giustificarsi (ove una giustificazione fosse necessaria) osservando che nel caso speciale in cui C e D sono i punti ciclici del piano, Γ è la circonferenza passante per A, B e *capace* di un dato angolo (o del suo supplemento).

2) *Dati un fascio di raggi* O (A, B, C ...) *ed una punteggiata* r (A, B, C...) *projettiva al fascio, disporre la seconda in modo che sia prospettiva al primo.*

Per ottenere questo risultato basta fare in modo che tre punti qualunque A, B, C della punteggiata cadano sui tre raggi corrispondenti a,b,c del fascio.

A tale scopo è opportuno considerare ogni raggio m dei fascio come costituito da due semiraggi m_1 e m_2; così (supposto fissato un senso di rotazione) l'angolo di due semiraggi qualunque è perfettamente determinato (a meno di multipli di 2π); l'angolo $(a_1\, b_1)$ di due semiraggi qualunque è eguale a quello $(a_2\, b_2)$ dei due semiraggi complementari, mentre è il supplemento degli angoli $(a_1\, b_2)$ e $(a_2\, b_1)$ formati ciascuno da uno di essi con il complemento dell' altro.

Ciò premesso, si descrivano su AB la circonferenza costituita dagli archi dei due segmenti (Σ_1 e Σ'_1) capaci dell'angolo $(a_1\, b_1)$ e del suo supplemento e su BC quella costituita dagli archi dei due segmenti (Σ_2 e Σ'_2) capaci dell'angolo $(b_1\, c_1)$ e del suo supplemento. Queste due circonferenze, avendo già comune il punto B, si taglieranno in un altro punto S. Ora se S appartiene agli archi dei due segmenti Σ_1 e Σ_2, portando a partire da O sopra i semiraggi a_1, b_1, c_1 i segmenti $OA_1 = SA$, $OB_1 = SB$, $OC_1 = SC$ si otterranno tre punti A_1 B_1 C_1 di una retta r_1; la punteggiata r_1 (A_1 B_1 C_1 ...) sarà eguale alla punteggiata r (A B C ...) ed il problema risolto. Se invece S appartenesse a uno degli archi dei segmenti Σ'_1 Σ'_2 almeno uno dei semiraggi a_1, b_1, c_1 dovrebbe surrogarsi col suo complementare.

È chiaro che giunti ad una soluzione del problema, un'altra se ne ottiene considerando la simmetrica della prima rispetto al centro O del fascio.

3) *Dati due fasci di raggi fra loro projettivi* O (a, b, c, ...) *e* O' (a', b', c'....) *e due punti* MM' *sopra due raggi corrispondenti* m, m' *di essi, condurre per questi due trasversali che seghino i due dati fasci in due punteggiate* A,B,C,... *e* A', B', C',... *fra loro congruenti.*

Si considerino nei due fasci i due angoli retti corrispondenti $p\,q$ e $p'\,q'$; ricordando che una proiettività con tre elementi uniti è un'identità, si vedrà che il problema proposto si riduce al « condurre pei punti M e M' due rette tali che, dettene P, Q e P', Q' le intersezioni con le rette p, q e p', q' risulti MP = M'P' e MQ = M'Q' ».

Il modo più semplice di risolverlo consiste nel riferire i punti M e M' ai due angoli retti considerati come assi coordinati. Infatti, indicando con x e y le coordinate del primo e con x' e y' quelle del secondo, e supponendo essere

$$X - x = k\,(Y - y) \quad , \quad X' - x' = k'\,(Y - y')$$

le equazioni delle rette cercate, si vede subito che le condizioni del problema traduconsi nelle due seguenti equazioni

$$(1 + k^2)\,y^2 = (1 + k'^2)\,y'^2 \quad , \quad \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) x^2 = \left(1 + \frac{1}{k'^2}\right) x'^2 ,$$

da cui si trae

$$k = \pm \frac{x}{y} \sqrt{\frac{x^2 - x'^2}{y'^2 - y^2}} \quad , \quad k' = \pm \frac{x'}{y'} \sqrt{\frac{x'^2 - x^2}{y^2 - y'^2}}$$

ove i segni si corrispondono.

La questione proposta ammette quindi in generale due soluzioni; affinchè esse siano reali, evidentemente se $x > x'$ dev'essere $y < y'$, mentre se $x < x'$ dev'essere $y > y'$. Per enunciare questa condizione comodamente sotto forma geometrica, s'immagini di fare coincidere O con O', p con p', q con q' e di condurre da M le rette MH, MK perpendicolari a p e q; è chiaro allora che affinchè la questione sia risolubile, è necessario e sufficiente che il punto M' cada fuori del rettangolo MHOK, ma entro una delle due striscie limitate dalle rette MH e q, MK e p. Per brevità, quando M e M' soddisfacciano a tale condizione si diranno essere situati nella *regione favorevole* alla soluzione del problema.

II.

4. Siano (Fig. 1ª) π_1, π_2 due piani arbitrari dello spazio, assunti come piani di projezione, e C_1, C_2 due punti qualisivogliano considerati come centri. Se F è una figura qualunque dello spazio, chiameremo F' (o F'') la sua projezione fatta dal centro C_1 (o C_2) sul piano π_1 (o risp. π_2). La retta $C_1 C_2$ taglia i piani π_1 e π_2 in due punti che designeremo con le lettere C'_2 e C_1'' perchè l'uno può considerarsi come la prima projezione del punto C_2, mentre l'altro è la seconda projezione del centro C_1; li chiameremo risp. *primo* e *secondo fulcro*. L'intersezione dei due piani π_1 e π_2 si dirà *retta fondamentale* e verrà indicata con t_{12} o t_{21}; essa è il luogo dei punti dello spazio aventi le due projezioni coincidenti.

Consideriamo ora un punto qualunque P dello spazio; ne siano P' e P'' le due projezioni. Le rette $C_1 P P'$ e $C_2 P P''$ stanno entrambe nel piano $C_1 C_2 P$, nel quale eziandio giacciono le rette $C_2' P'$ e $C_1'' P''$; queste stanno poi la prima nel piano π_1 e la seconda nel piano π_2, onde si tagliano nel punto P_{12} o P_{21} comune ai tre piani π_1, π_2, $P C_1 C_2$. In generale questo fatto si può esprimere come segue:

Le due projezioni di un punto dello spazio fatte da due centri arbitrari sopra due piani qualunque sono congiunte ai due relativi fulcri col mezzo di due rette segantisi sopra l'intersezione dei due piani di projezione (retta fondamentale).

Questa proposizione, malgrado la sua estrema semplicità, grazie alle molteplici applicazioni che trova nella Fotogrammetria, verrà in seguito chiamato *teorema fondamentale.*

Se si suppone che π_1 e π_2 siano fra loro perpendicolari e che le projezioni considerate siano ortogonali, essa si trasforma nel *teorema fondamentale del metodo di Monge*, cioè in quello che dice « le projezioni orizzontale e verticale di un punto qualunque dello spazio si trovano su una stessa perpendicolare alla linea di terra ».

Se invece π_1 e π_2 coincidano, t_{12} è indeterminata e i due fulcri si riuniscono in un punto C; in tal caso da quella proposizione emerge che la congiungente delle due projezioni di un punto qualsivoglia dello spazio passa per C; è questo il *teorema fondamentale del metodo della projezione stereoscopica.*

5. Dal teorema fondamentale (generale) si desume anzitutto che, considerando le projezioni di quantisivogliono punti A , B , C , ... dello spazio, nascono i due fasci C'_2 (A' , B' , C' , ...) e C_1'' (A'' , B'' , C'' , ...) entrambi prospettivi alla punteggiata A_{12} , B_{12} , C_{12} , ... con la sede sulla retta fondamentale t_{12}. Spostando comunque i due piani π_1 e π_2 (togliendoli cioè dalla *posizione orientata* che in origine possedevano) quei due fasci perderanno la loro condizione prospettiva, ma conserveranno la loro relazione projettiva. Supposta nota siffatta projettività fra quei fasci, preso ad arbitro un punto X' di π_1 , X'' non sarà determinato, ma dovrà trovarsi sopra il raggio che corrisponde al raggio $C_2''X'$ nel fascio di centro C_1''. Questo raggio è in generale individuato; cesserebbe di esserlo soltanto quando X' coincidesse con C_2', onde a C_2' corrispondono tutti i punti del piano π_2. Similmente ad ogni punto X'' di π_2 corrispondono in π_1 tutti i punti di una determinata retta, tranne se esso coincide con C_1''.

Altri corollarî del teorema fondamentale. I piani π_1 e π_2, su cui vennero projettati i punti dello spazio da due centri qualisivogliano, non si trovino più in posizione orientata, ma siano disposti comunque nello spazio. Sia dato uno solo dei fulcri, p. e. C_2' e si conoscano di più *cinque* coppie di punti corrispondenti P_i' , P_i'' ($i = 1, \ldots, 5$), (essendo ogni coppia costituita dalle projezioni di uno stesso punto dello spazio; dico che in conseguenza l'altro fulcro C_1'' è determinato e si può costruire. Esso infatti deve soddisfare alla condizione seguente

$$C_2'(P_1' \ldots P_5') \barwedge C_1''(P_1'' \ldots P_5''),$$

la quale si risolve nelle due altre

$$C_2'(P_1' P_3' P_4' P_5') \barwedge C_1''(P_1'' P_3'' P_4'' P_5''$$

$$C_2'(P_2' P_3' P_4' P_5') \barwedge C_1''(P_2'' P_3'' P_4'' P_5''.$$

Le prime dice (v. n. 1) che C_1'' trovasi sulla conica Γ_1 che passa pei punti P_1'', P_2'', P_4'', P_5'' ed è capace del birapporto $C_2'(P_1' P_3' P_4' P_5')$, mentre la seconda annuncia che C_1'' sta sulla conica Γ_2 che passa pei punti P_2'', P_3'', P_4'', P_5'' ed è capace del birapporto $C_2'(P_2' P_3' P_4' P_5')$. Queste due coniche hanno già comuni i punti P_3'' , P_4'' , P_5'', onde s'incontrano in un altro punto determinato ed unico, che è il fulcro cereato.

Considerando un numero di coppie di punti corrispondenti maggiore di cinque si possono costruire entrambi i fulcri.

Immaginiamo infatti di conoscere le coppie di projezioni di *quattro* punti $P_1 P_2 P_3 P_4$ (v. Fig. 2ª) appartenenti ad un piano δ, nonchè quelle di altri *due* punti P_5 e P_6 non posti su δ (¹). Conduciamo la retta $C_1 P_5$ e chiamiamone Q_5

(¹) Quando ad es. si conoscano due fotografie di un edificio è assai agevole fissare sei coppie di punti corrispondenti nella situazione indicata.

la intersezione col piano δ. Q_5' coinciderà evidentemente con P_5'; per ottenere Q_5'' si noti che i due gruppi $P_1' P_2' P_3' P_4' Q_5' (\equiv P_5')$ e $P_1'' P_2'' P_3'' P_4'' Q_5''$ essendo due projezioni di cinque punti di uno stesso piano sono fra loro projettivi; e la projettività fra di essi è pienamente determinata dalle quattro coppie $P_1' P_1''$, $P_2' P_2''$, $P_3' P_3''$, $P_4' P_4''$; onde si potrà costruire linearmente il punto Q_5'' che corrisponde a $Q_5' \equiv P_5'$. Ora essendo C_1, P_5, Q_5 tre punti in linea retta, in linea retta saranno pure C_1'', P_5'', Q_5'', dunque C_1'' si trova sulla retta (nota) $P_5'' Q_5''$. Operando similmente sul punto P_6 si otterrà una seconda retta $P_6'' Q_6''$ contenente pure C_1'', epperò sufficiente a completare la determinazione di questo fulcro. Per trovare l'altro si potrebbe operare similmente, dopo di avere scambiate le veci dei centri C_1 e C_2; ma si può anche servirsi della costruzione, esposta prima, atta a condurre alla determinazione di un fulcro quando conoscasi l'altro e cinque coppie di punti corrispondenti.

Osserviamo finalmente che per giungere ai due fulcri si potrebbe anche partire dalla considerazione di *sette* coppie arbitrarie di punti corrispondenti nei due piani; allora per determinare i punti C_2' e C_1'' serve la relazione

$$C_2' (P_1' \ldots P_7') \barwedge C_1'' (P_1'' \ldots P_7'');$$

potendo in conseguenza ciascuno di essi assumere tre diverse posizioni, la determinazione dei fulcri è attualmente un problema di 3° grado [1], sul quale crediamo opportuno di non arrestarci per non allontanarci dal nostro scopo.

III.

6. Siano ora dati tre centri di projezione C_1, C_2, C_3 (Fig. 3ª) ai quali siano annessi i piani di projezione π_1, π_2, π_3. Accoppiando fra loro in tutti i modi possibili questi tre sistemi di projezione otterremo sei fulcri; vale a dire

sopra il	piano	π_1	i fulcri	C_2'	e	C_3'
»	»	π_2	»	C_3''	e	C_1''
»	»	π_1	»	C_1'''	e	C_2''',

si diranno *associati* due fulcri (quali sarebbero C_1'' e C_1''') che sono projezioni di uno stesso centro di projezione; mentre si diranno *opposti* due fulcri (quali sarebbero C_2''' e C_3'') situati sulla congiungente di due centri di projezione. Avremo *tre rette fondamentali*: $t_{23} \equiv t_{32}$ intersezione di π_2 e π_3, $t_{31} \equiv t_{13}$ intersezione π_3 e π_1 e $t_{12} \equiv t_{21}$ intersezione di π_1 e π_2. Le rette $C_2' C_3'$, $C_3'' C_1''$, $C_1''' C_2'''$ (ognuna delle quali passa per due fulcri posti in uno stesso piano di projezione) altro non sono che le intersezioni del piano $C_1 C_2 C_3$ risp. con π_1, π_2, π_3; onde formano un triangolo i cui vertici T_1, T_2, T_3 sono le tracce sul piano $C_1 C_2 C_3$

---

[1] È il noto « problema dell'omografia » nel piano; v. R. Sturm, Math. Annalen T. I.

delle tre rette fondamentali. I lati di questo triangolo si diranno *assi*; ad ogni piano di projezione è quindi annesso un asse, il quale contiene due fulcri.

Consideriamo le tre projezioni P', P'', P''' di un punto P dello spazio; sono in generale tre punti distinti che per brevità diremo formare una *terna*; ma due di essi coincidono se P appartiene ad una retta fondamentale; combaciano tutte tre se P cade nel punto O, in cui si tagliano i tre piani di projezione.

Ciò posto applicando tre volte il teorema fondamentale (n. 4) vedremo che:

le rette C_2' P' e C_1'' P'' si tagliano in un punto P_{12} della retta fondamentale t_{12}
» C_3'' P'' e C_2''' P''' » » P_{23} » » t_{23}
» C_1'' P''' e C_3' P' » » P_{13} » » t_{13}.

Date quindi P' e P'' (in modo da soddisfare la condizione espressa del teorema fondamentale) si conosceranno le rette C_3' P' e C_3'' P''; le loro intersezioni con le rette fondamentali t_{13} e t_{23} saranno i punti P_{13} e P_{23}; condotte le rette P_{13} C_1''' e P_{23} C_2''' esse si taglieranno nel punto P''', in generale determinato ed unico. Eccoci così giunti ad una costruzione semplicissima per *trovare la terza projezione di un punto di cui si conoscono due projezioni*. Per eseguirla comodamente s' immaginerà di tagliare il triedro π_1 π_2 π_3 lungo la retta t_{12} e di far ruotare le facce π_1 e π_2 attorno risp. t_{13} e t_{23} finchè si adagino sopra π_3, assunto e funzionante come piano di disegno.

Due rette r' e r'' segnate ad arbitrio nei piani π_1 e π_2 sono projezioni di una retta r dello spazio in generale determinata ed unica (è la retta C_1 $r' \cdot C_2$ r''); la terza projezione r''' di r è determinata e può ottenersi considerando due punti qualunque di r stessa e costruendone le terze proiezioni.

7. La costruzione esposta nel n. prec. cade in difetto quando P' si trova sull'asse T_2 T_3 del primo piano; infatti allora P_{12} coincide con T_3 e P_{13} con T_2; P'' si troverà sulla retta T_3 C_1'', cioè sul secondo *asse*, e P_{23} coinciderà con T_1; le due rette P_{13} C_1''' e P_{23} C_2''' coincideranno quindi sul terzo asse e saranno perciò incapaci di determinare P'''. [Incidentalmente da ciò si raccoglie: *se una delle projezioni di un punto cade sopra il corrispondente asse, lo stesso accadrà delle altre due*]. Per vedere che, ciò non ostante, date P' e P'' risp. sul primo e secondo asse, P''' è determinato, si consideri un punto qualunque Q della retta OP; assumiamo perciò ad arbitrio Q' su OP' e Q'' su OP''; mediante Q' e Q'' si potrà determinare Q''', servendosi della costruzione generale; OQ''' sarà la terza projezione della retta OQ; essa segherà il terzo asse nel punto cercato P'''.

A questo caso, in cui solo apparentemente due delle projezioni di un punto sono insufficienti a determinare la terza, ne fa riscontro uno di indeterminazione effettiva, che va segnalato.

Supponiamo di considerare un punto P la cui prima projezione coincide col fulcre C_2'; P sarà quindi un punto della retta C_1 C_2; ora due casi possono presentarsi:

1° P è un punto della retta C_1 C_2 differente da C_2; allora P'' coincide con C_1'', fulcro associato a C_2', e P''' è un punto dell'asse T_1 T_2, punto il quale è determinato quando sia dato il punto obbiettivo, ma non lo è dalla conoscenza delle

due projezioni $P' \equiv C_2'$ e $P'' \equiv C_1''$; 2° P coincide con C_2; P''' cade allora in C_2''', fulcro opposto a C_2', e P'' è un punto arbitrario del secondo piano di projezione. Riepilogando potremo dire: *Se uno dei punti di una terna cade in uno dei fulcri, lo stesso accadrà per un altro, ma la coincidenza può aver luogo o nel fulcro associato o nel fulcro opposto al primo; in ogni caso il terzo elemento della terna è indeterminato; e precisamente a due fulcri associati corrisponde un punto qualunque del terzo piano, mentre a due fulcri opposti corrisponde un punto qualunque dell'asse del terzo piano.*

8. La costruzione esposta nel n. 6 per completare una terna di punti determinata da due suoi elementi si specializza e di regola si semplifica, ammettendo disposizioni particolari degli elementi fissi. Valgano a provarlo gli esempi seguenti:

a) π_1, π_2, π_3 siano le facce di un triedro trirettangolo e C_1, C_2, C_3 ne siano gli zenith corrispondenti [1]. Si giunge allora alla notissima procedura per *dedurre dalle projezioni orizzontale o verticale di un punto nel metodo di Monge, la projezione dello stesso sul piano di profilo.* Supponendo ancora π_1 e π_2 fra loro ortogonali, ma invece π_3 semplicemente perpendicolare a π_1, ed ammettendo sempre che si tratti di projezioni ortogonali, si arriva al noto procedimento per *cambiare, sempre nel metodo di Monge, uno dei piani di riferimento.*

b) π_1 e π_2 siano piano orizzontale e piano verticale in un sistema di Monge; π_3 coincida con π_1 e C_3 stia in una posizione arbitraria. Allora la questione si riduce *a trovare la prospettiva sul piano orizzontale di una figura determinata delle sue due projezioni orizzontale e verticale.* Per dedurne la soluzione dalle precedenti considerazioni generali, osserviamo che: t_{12} e t_{23} coincidono con la linea di terra e t_{13} è una retta indeterminata del piano π_1; C_3' e C_3'' sono le projezioni orizzontale e verticale del centro di prospettiva; C_1''' coincide con C_3'; C_1'', C_2', C_2''' stanno all'infinito in direzione perpendicolare alla linea di terra. Supposti ora dati P' e P'' (su una perpendicolare alla linea di terra), si conduca la retta $C_3''P''$ e se ne determini l'intersezione P_{23} con la linea di terra; la perpendicolare condotta da questo punto a tale linea taglia la $C_3'P'$ nel cercato punto P'''.

c) π_1, π_2, π_3 coincidono e C_3 stia all'infinito in direzione perpendicolare al piano π in cui essi combaciano. Si tratta allora di *costruire la projezione ortogonale su un piano dato di un punto del quale si conosce la rappresentazione in projezione stereoscopica sopra questo piano.* Nel caso attuale C_1'' e C_2' coincidono in un punto O; coincidono pure C_1''' e C_3' nella projezione ortogonale O_1 di C_1 su π, e C_2''' e C_3'' nella projezione ortogonale O_2 di C_2 sullo stesso. Date allora le due projezioni P' e P'' (allineate con O), condotte O_1P' e O_2P'' esse si taglieranno nel richiesto punto P'''.

---

[1] Chiamiamo per brevità *zenith di un piano* il punto all'infinito comune a tutte le rette ad esso perpendicolari.

9. *d*) Consideriamo da ultimo un caso speciale che interessa la pratica (l'architettura): *Date le projezioni ortogonali di una figura sopra due piani verticali* π_1, π_2 *trovarne la projezione fatta da un centro qualunque* C_3 *sopra un terzo piano* π_3 *verticale.*

Nelle attuali ipotesi le tre rette fondamentali t_{12}, t_{13}, t_{23} sono fra loro parallele (Fig. 4ª) e O trovasi all'infinito; il piano $C_1\,C_2\,C_3$ (dal momento che C_1 e C_2 stanno all'infinito in direzioni normali risp. π_1 e π_2) è quello condotto da C_3 perpendicolarmente alla retta t_{12}. I fulcri C_3' e C_3'' sono le projezioni ortogonali di C_3 su π_1 e π_2, mentre C_1''' e C_2''' sono i punti della retta $T_1\,T_2$ che sono le intersezioni del piano π_3 con la retta $C_3\,C_3'$ e $C_3\,C_3''$.

Per costruire comodamente la projezione P''' di un punto P di cui si conoscano le projezioni P' e P'' giova togliere gli elementi di riferimento della posizione orientata che avevano in origine (v. Fig. 4ª). Immagineremo quindi di tagliare la superficie prismatica avente per facce i piani π_1, π_2, π_3 lungo la retta t_{12} e quindi di far ruotare i due primi attorno alle rette t_{13} e t_{23} finchè si adagino sul piano π_3, assunto come piano del disegno. Siano $(t_{12})^*$ e $(t_{12})^{**}$ le due corrispondenti posizioni assunte dalla retta fondamentale t_{12}. Essendo $T_1\,T_2\,T_3$ una sezione normale della anzidetta superficie prismatica, fatto lo sviluppo di questa sul piano π_3, $T_1\,T_3$ e $T_2\,T_3$ si disporranno sulla retta $T_1\,T_2$, la quale è perpendicolare alle rette t_{13}, t_{23}, $(t_{12})^*$, $(t_{12})^{**}$; su tale retta, che conteneva già i punti C_1''' e C_2''', verranno poi a disporsi le nuove posizioni (C_3'') e (C_3') dei fulcri C_2'' e C_3'. Due punti P', P'' (prima e seconda projezione di uno stesso punto dello spazio) dopo i ribaltamenti suindicati si disporranno in due posizioni (P') e (P'') allogate su una stessa perpendicolare alle rette $(t_{12})^*$, t_{13}, t_{23}, $(t_{12})^{**}$. Se ne potrà dedurre P''' servendosi del procedimento esposto nel n. 6, cioè come segue: *Si conduca* $C_3'\,(P')$ *e se ne determini la intersezione* P_{13} *con la retta* t_{13}*; sulla* $C_1'''\,P_{13}$ *si troverà* P'''; *si unisca poi* C_3'' *a* (P'') *e se ne trovi l'intersezione* P_{23} *con* t_{23}; *la retta* $C_2'''\,P_{23}$ *taglierà la* $C_1'''\,P_{13}$ *nel cercato punto* P'''.

Aggiungiamo alcune osservazioni che riescono utili in pratica. Anzitutto si può esonerarsi dal tracciare le rette $(t_{12})^*$ e $(t_{12})^{**}$, perchè esse non intervengono in alcun modo nella costruzione testè descritta. In secondo luogo dico che *si possono assumere, sul piano del disegno, come rette* t_{13} *e* t_{23} *due rette qualsivogliano fra loro parallele e di più* (salvo certe limitazioni che verranno indicate) *pure ad arbitrio i fulcri* C_1''', C_2''', (C_3'), (C_3'') *sopra una loro perpendicolare comune.* Per dimostrare ciò faremo vedere che con questi dati si possono determinare le larghezze delle altre due facce $t_{13}\,t_{12}$ e $t_{23}\,t_{12}$ della superficie prismatica considerata; che, in altri termini si può completare la determinazione del triangolo $T_1\,T_2\,T_3$ sezione retta di tale superficie. Si considerino infatti i fulcri situati sopra tale sezione retta e si osservi che, essendo retto l'angolo $C_1'''\,C_3'\,T_2$, C_3' si troverà sulla circonferenza di diametro $C_1'''\,T_2$; ed essendo $T_2\,C_3' = T_2\,C_3')$, C_3' sarà in conseguenza determinato o riuscirà reale purchè si abbia

$$T_2\,(C_3') < T_2\,C_1'''.$$

Similmente la circonferenza di diametro $C_2'''\,T_1$ e quella di centro T_1 e

raggio $T_1(C_3'')$ determinano il punto C_3'', il quale riuscirà reale purchè sia

$$T_1(C_3'') < T_1 C_2'''.$$

Ottenuti i punti C_3' e C_3'' unendoli risp. a T_2 e T_1 si otterrà T_3; e così sarà determinata la sezione retta del prisma.

Interessa ancora conoscere in qual modo si devono scegliere i punti T_1, T_2, C_1'', C_2''', (C_3'), (C_3'') affinchè i due piani π, e π_2 risultino fra loro ortogonali. Affinchè ciò succeda il triangolo $T_1\ T_2\ T_3$ dev' essere rettangolo in T_3, cioè dev' essere

$$\text{ang. } T_1 + \text{ang. } T_2 = \frac{\pi}{2}$$

cioè

$$\cos^2 T_1 + \cos^2 T_2 = 1.$$

Ora si ha:

$$\cos T_1 = \frac{T_1\ C_3''}{T_1\ C_2'''} = \frac{T_1\ (C_3'')}{T_1\ C_2'''};$$

$$\cos T_2 = \frac{T_2\ C_3'}{T_2\ C_1'''} = \frac{T_2\ (C_3')}{T_2\ C_1'''};$$

la condizione cercata è quindi

$$\left[\frac{T_1\ (C_3'')}{T_1\ C_2'''}\right]^2 + \left[\frac{T_2\ C_3'}{T_2\ C_1'''}\right]^2 = 1;$$

essa può esprimersi dicendo che $T_1(C_3'')$ e $T_2(C_3')$ devono essere coordinate di un punto dell' ellisse avente $T_1(C_2''')$ e T_2C_1''' per semiassi. Scelti i segmenti $T_1(C_3'')$ e $T_2(C_3')$ in questo modo le due disuguaglianze dianzi trovate sono esse pure verificate.

Quella condizione, in particolare, dovrà essere soddisfatta quando ad es., si vuole che le due projezioni date sian quelle fatte sul piano verticale e sul piano di profilo di un sistema di Monge, caso questo che è importantissimo in pratica.

IV.

10. Esaurito così, almeno nelle linee generali, il primo dei problemi enunciati nell'esordio, passiamo ad occuparci del secondo.

Di una figura F *si conosca soltanto una projezione* F' su un piano π. Per risalire da F' a F si prenda un punto arbitrario C dello spazio per centro di projezione; allora, se P' è un punto qualunque di F', come punto P si potrà scegliere un punto qualsivoglia della retta CP'; se, quindi, F' è costituita da un

numero finito (n) di punti, di figure F ne esisteranno ∞^{n+3}. In ogni caso *esistono* ∞^7 *figure fra loro projettive aventi sul piano* π *per projezione la figura* F'. Supponiamo infatti di averne trovata una F; ne siano P, Q, R, S quattro punti qualunque; le rette CP, CQ, CR, CS passeranno quindi pei punti dati P', Q', R', S'. Prendiamo poi *ad libitum* un punto C_1 e, pure ad arbitrio, sulle rette C_1P', C_1Q', C_1R', C_1S' quattro nuovi punti qualisivogliono P_1, Q_1, R_1, S_1. Potremo allora costruire una figura F_1 projettiva alla F ed in cui ai punti C, P, Q, R, S corrispondano risp. C_1, P_1, Q_1, R, S_1. Allora alle rette CPP', CQQ', CRR', CSS' corrisponderanno risp. le rette C_1P_1P', C_1Q_1Q', C_1R_1R', C_1S_1S'; onde le due stelle, fra loro projettive, di centri C e C_1 sono prospettive entrambe al piano π. Se, quindi, consideriamo due punti corrispondenti X e X_1 in F e F_1, alle rette CX della prima corrisponderà la C_1X_1 della seconda, e queste due rette segheranno π nel medesimo punto X'; ciò prova che F_1 è projettata da C_1 su π nella stessa figura F' in cui F è projettata da C. Osservando da ultimo che per costruire F_1 si è scelto arbitrariamente C_1 e quindi si sono presi a piacere i punti P_1, Q_1, R_1, S_1 sulle rette C_1P', C_1Q', C_1R', C_1S', si vedrà che in F_1 vi sono *sette costanti arbitrarie* e quindi si concluderà conformemente all'enunciato.

11. Di una figura F si conoscano ora le projezioni F' e F'' fatte da due centri non assegnati sopra due piani dati. Esisteranno allora due punti (i fulcri C_2' e C_1'') dai quali le coppie di punti corrispondenti nelle due figure sono projettati mediante due fasci di raggi fra loro projettivi; essi potranno costruirsi, nel modo indicato nel n. 5, dopo di avere fissati *sei* o *sette coppie* di punti corrispondenti di F' e F''.

Seghiamo il fascio di raggi di centro C_2' con una trasversale arbitraria; otterremo una punteggiata prospettiva a quel fascio e quindi projettiva a quello di centro C_1''; onde, applicando quanto si espose nel n. 2, si potrà trasferire la punteggiata di sede t in modo che riesca prospettiva anche al fascio C_1''. Immaginando allora che, assieme alla t, venga trasportato tutto il piano che la contiene i due fasci C_2' e C_1'' risulteranno fra loro prospettivi, qualunque sia d'altronde l'angolo formato dai loro piani.

Si scelgano ora ad arbitrio due punti C_1 e C_2 sulla retta $C_1''C_2'$; se P' e P'' sono due punti qualunque di π_1 e π_2, $C_2'P'$ a $C_1''P''$ saranno raggi corrispondenti di quei due fasci prospettivi, onde si taglieranno in un punto della retta t e staranno in un piano, nel quale si trovano anche le rette C_1P' e C_2P''. Queste due rette si segano in conseguenza in un punto P avente per projezioni P' e P''. Variando la coppia P' e P'', varierà anche P e genererà una figura F avente per projezioni F' e F''.

Si noti ora che per giungere a F noi abbiamo scelto arbitrariamente

1° la retta t nel piano π_1, il che è possibile in ∞^2 modi,

2° l'angolo dei due piani π_1 e π_2, il che può farsi in ∞^1 modi;

3° i centri C_1, C_2 sulla retta $C_1''C_2'$, cosa che può farsi in ∞^2 modi;

onde nella costruzione esposta vi sono 5 elementi arbitrari; in altri termini *di figure* F, *aventi comuni due date projezioni, se ne trovano in generale* ∞^5.

Due qualunque di esse sono fra loro projettive, perchè ai punti e alle rette dell'una corrispondono risp. punti e rette dell'altro.

Per determinare la figura F è quindi necessario di conoscere, oltre le due projezioni F', F'', le lunghezze di cinque segmenti, limitati ciaseuno da due punti della figura obbiettiva.

12. Di una figura F si conoscano iuvece le projezioni F', F'', F''' sopra tre piani π_1, π_2, π_3 disposti comunque nello spazio. Per trovare F basterà che noi trasportiamo i dati per modo da disporli in posizione orientata. A tale scopo ricordiamo che tale posizione è caratterizzata dal fatto che nel punto d'intersezione dei tre piani di projezione sono riuniti i tre elementi di una terna e che in ogni punto della retta in cui due di essi si tagliano cadono due punti corrispondenti. Ciò prova che per orientare i tre piani considerati bisognerà anzitutto considerare una terna di punti corrispondenti e poi condurre per ognuno di questi nel relativo piano due rette ciascuna delle quali sia sede di una punteggiata eguale alla punteggiata corrispondente; fatto ciò, portando a coincidere i tre punti scelti e, a due a due, le punteggiate fra loro eguali si arriverà alla cercata posizione orientata.

Per ottenere ciò determiniamo anzitutto in ciascuna dei tre piani dati i due fulcri corrispondenti, applicando tre volte la costruzione del n. 5. Consideriamone due qualunque fra loro opposti, ad es. C_3'' e C_2'''; sono centri di due fasci projettivi; applicando quanto si espose nel n. 2 si potrà segarli con due rette r'' e r''' in modo da ottenere due punteggiate fra loro eguali; sia r' la retta che in π_1 corrisponde alla coppia di rette r'', r''' tracciate risp. in π_2, π_3. Siano poi O'' e O''' due punti corrispondenti in r'' e r'''. Servendosi dei risultati stabiliti nel n. 5 si potranno condurre

1.° per O' e O'' in π_1 e π_2 due rette t', t'' che seghino C_1'' e C_2' in due punteggiate fra loro eguali e nelle quali si corrispondano O' e O'';

2.° per O' e O''' in π_1 e π_3 due rette s', s''' che seghino C_1''' e C_3' in due punteggiate fra loro eguali e nelle quali si corrispondano O' e O''';

dell'arbitrarietà nella scelta di O'' e O''' si potrà disporre in modo che le rette s', s'', t', t''' risultino tutte reali. Allora spostando i tre piani π_1, π_2, π_3 in modo che coincidano r'' e r'', s''' e s', t' e t'' e che inoltre combacino O', O'', O''' si giungerà alla voluta posizione orientata. Le rette $C_2'C_3'$, $C_3''C_1''$, $C_1'''C_2'''$, formano allora un triangolo, ed un secondo ne formano le rette $C_2'''C_3''$, $C_3'C_1'''$, $C_1''C_2'$; i vertici di questo sono i tre punti C_1, C_2, C_3. Costruita (cfr. n. prec.) per mezzo dei due primi fra questi e delle figure F' e F'' una figura F, essa sarà projettata da C_3 su π_3 in F'''.

Osserviamo ora che per arrivare alla figura F noi abbiamo scelto ad arbitrio

1.° Il punto O' nel piano π_1, il che è effettuabile in ∞^2 modi;

2.° Il punto O'' sulla retta che in π_2 corrisponde alle rette $C_2'O'$, cosa possibile in ∞' modi;

nell'esposta costruzione si trovano quindi tre costanti arbitrarie; onde *vi*

sono ∞^3 *figure aventi comuni tre projezioni date*; una qualunque di esse sarà individuata conoscendosi le distanze fra tre coppie qualunque dei suoi punti.

Paragonando questo risultato con quello indicato al termine del n. 10 e del n. precedente si vede che la conoscenza di ogni nuova projezione diminuisce di due unità il numero delle costanti arbttrarie inerenti alla figura obbiettiva. Ciò induce a ritenere che se di questa si conoscessero, non soltanto tre, ma quattro projezioni, per individuarla completamente sarebbe ancora necessario di conoscere la distanza fra due suoi punti; in altre parole che *una figura è determinata di forma* (*non di grandezza*) *note che ne siano quattro projszioni centrali.* Ora questa proposizione è vera, ma non se ne conosce alcuna dimostrazione elementare quanto le considerazioni sian qui svolte; onde crediamo meglio limitarci ad enunciarla.

Luglio 1902.

ANNUNZI BIBLIOGRAFICI

Guide du Calculateur (Astronomie, Géodesie, Navigation, etc.) par *J. Boccardi* privat-docent a l'Université, chef de service a l'observatoire de Catane. *Première Partie*: *Regles pour* les calculs en général. (A. Hermann, Paris et J. *Pastore*, Catane; 1902).

Indice dei capitoli. I. Conseils Généraux—II. Tables de logarithmes — III. Remarques sur quelques tables numériques spéciales — IV. Remarques et règles pratiques pour l'usage des tables de logarithmes — V. Petites règles pratiques d'un ancien élève—VI. Des moyens graphiques dans les calculs — VII. Moyens pratiques, artifices, procédés—VIII. Continuation du même sujet — IX. Vérifications — X. Recherche des erreurs.

N. W. Rouse Ball: *Breve Compendio di Storia delle Matematiche.* Versione dall'inglese con note, aggiunte e modificazioni dei dottori *Dionisio Gambioli* e *Giulio Puliti*, riveduta e corretta dal prof. *Gino Loria* dell'Università di Genova.

È uscito il primo volume col titolo: *Le Matematiche dall'antichità al rinascimento*, versione del Dott. *Giulio Puliti* bibliotecario dell'Università di Catania, con una nota originale su la scuola pitagorica; riveduta e corretta dal prof. *Gino Loria.* (Bologna, Zanichelli 1903; prezzo L. 8).

Indice dei Capitoli. I. Matematiche egizie e fenicie—II. Le scuole jonica e pitagorica—III. Le scuole di Atene e di Cizico—IV. La prima scuola Alessansandrina—V. La seconda scuola Alessandrina—VI. La scuola bizantina—VII. Sistema di numerazione ed aritmetica primitiva — VIII. Il sorgere della scienza nell'Europa occidentale — IX. La matematica degli arabi — X. Introduzione in Europa delle opere arabe—XI. Svolgimento dell'aritmetica — XII. Le matematiche del rinascimento — XIII. La fine del rinascimento.

SUL CALCOLO ASSINTOTICO

DELLE RADICI REALI D'EQUAZIONE

NOTA

DI

F. GIUDICE.

Il metodo di Newton (1) per la risoluzione approssimata delle equazioni numeriche fu molto criticato da Lagrange (2): tuttavia, per la sua semplicità ed utilità pratica, rimase il preferito; e forse fu causa che un metodo pregevolissimo di Legendre–Cauchy (3) di sicura praticità non avesse gran diffusione: di questo metodo, che fu ridato recentemente (4), io notai l'utile, che se ne potrebbe trarre per la separazione di radici reali (5).

Il criterio di validità del metodo di Newton fu stabilito prima da Fourier (6) e poi, con maggior precisione ed estensione, da Fouret (7). Ma s'era ancor lungi dal poter dire soddisfatto il desiderio così espresso da Fourier (8): « Cette méthode d'approximation est un des éléments les plus généraux et les plus utiles de toute l'analyse; c'est pour cela qu'il importe beaucoup de la compléter et d'obvier à toutes les difficultés auxquelles elle peut être sujette ».

Io spero che questa mia nota soddisfi tutte le esigenze del calcolo assintotico delle radici reali delle equazioni numeriche.

---

(1) Newton: La méthode des fluxions et des suites infinies; Paris MDCCXL.

(2) Lagrange: Traité de la résolution des équations numériques; Paris 1808; V. p. e. pag. 164 « D'où . . .

(3) Cauchy: Analyse algébrique, 1821, pag. 464.

(4) M. A. Pellet: Comptes Rendus, 2 e 23 Dicembre 1901, pag. 917 e 1186. Di maggior importanza sono i risultati di M. Raoul Perrin, nei Comptes Rendus del 23 Dicembre 1901 a pag. 1189, fondati anch' essi sulla scomposizione del primo membro in due polinomii a coefficienti positivi, quale fu fatta da Cauchy.

(5) F. Giudice: Rend. Circ. Mat., Palermo 1887, pag. 71-72.

(6) Fourier: Bulletin des Sciences par la Société Philomatique de Paris, 1818, pag. 64.

(7) M. G. Fouret: Nouvelles Annales de Mathématique; IX, 1890, p. 569.

(8) Fourier, luogo citato, pag. 61.

Metodo di Newton perfezionato. Sia $f(x)$ una funzione reale della variabile reale x, che sia nulla quando $x = \rho$ e sia derivabile per tutti i valori di x compresi tra il numero α minore di ρ ed il numero β maggiore. Se A , R , B sono i punti d'ascisse α , ρ , β della linea l d'equazione $y = f'(x)$ ed A' , R' , B' sono le proiezioni d' essi punti sull' asse delle x, la segnata area del trapezio mistilineo

$$A' R' R A = \int_\alpha^\rho f'(x)\, dx = - f(\alpha);$$

ma se sulla perpendicolare all'asse delle x in A' si prendono un punto H d'ordinata non negativa ed uno K d'ordinata non positiva in modo che, se M ed L sono i punti d'intersezione delle parallele condotte per H e K all' asse delle x con la perpendicolare a quest'asse in R', il tratto AR della linea l non abbia punti esterni al rettangolo HKLM, allora la segnata area del trapezio mistilineo A' R' R A è compresa tra le segnate aree dei rettangoli A' R' M H , A' R' L K.

Si può far considerazioni analoghe pel trapezio mistilineo R' B' B R; per cui, se $f'(x)$ prende solo valori maggiori di a e minori di b, mentre x cresce da α a β,

$$a(\rho - \alpha) < - f(\alpha) < b(\rho - \alpha) \quad , \quad a(\rho - \beta) > f(\beta) > b(\rho - \beta).$$

Di qui, supposti diversi da zero a e b, deduconsi limitazioni per ρ, che si possono anche stabilire molto facilmente con pure considerazioni analitiche, come ora vedremo.

Si ha per ipotesi che $f(\rho) = 0$, ossia che

$$0 = f(\alpha) + (\rho - \alpha) f'(\lambda)$$

dove λ è un conveniente numero tra α e ρ. Si ha inoltre, per ipotesi, che

$$a < f'(\lambda) < b;$$

ne segue che, perchè $\rho - \alpha > 0$,

$$f(\alpha) + a(\rho - \alpha) < 0 < f(\alpha) + b(\rho - \alpha),$$

per cui od $ab > 0$ ed allora, se a e b son positivi,

$$\alpha - \frac{f(\alpha)}{b} < \rho < \alpha - \frac{f(\alpha)}{a},$$

e se a e b son negativi

$$\alpha - \frac{f(\alpha)}{a} < \rho < \alpha - \frac{f(\alpha)}{b};$$

oppure $ab < 0$ nel qual caso $a < 0$ e $b > 0$, ed allora

$$\rho > \alpha - \frac{f(\alpha)}{a} \quad , \quad \rho > \alpha - \frac{f(\alpha)}{b}.$$

Nei primi due casi $\frac{f(\alpha)}{a}$ ed $\frac{f(\alpha)}{b}$ son d'ugual segno, quindi son negativi entrambi perchè od $\alpha - \frac{f(\alpha)}{a}$ od $\alpha - \frac{f(\alpha)}{b}$, superando ρ, supera α; nel terzo caso uno è positivo ed uno è negativo: onde α è superato da entrambi i numeri $\alpha - \frac{f(\alpha)}{a}$ ed $\alpha - \frac{f(\alpha)}{b}$ nei primi due casi, da uno solo nel terzo caso.

E siccome $\rho - \beta < 0$ e

$$0 = f(\rho) = f(\beta) + (\rho - \beta) f'(\mu)$$

dove μ è un conveniente numero tra ρ e β, si riconosce parimenti che, se a e b son positivi

$$\beta - \frac{f(\beta)}{a} < \rho < \beta - \frac{f(\beta)}{b},$$

se son entrambi negativi

$$\beta - \frac{f(\beta)}{b} < \rho < \beta - \frac{f(\beta)}{a};$$

e se a è negativo e b è positivo, allora

$$\rho < \beta - \frac{f(\beta)}{a} \quad , \quad \rho < \beta - \frac{f(\beta)}{b}.$$

Adunque: *Se* $f(x)$ *è funzione reale della variabile reale* x, *che s'annulli almeno una volta mentre* x *cresca da* α *a* β *ed abbia prima derivata maggiore di* a *e minore di* b *per tutti i valori di* x *compresi tra* α *e* β, *si ha che: almeno uno dei due numeri* $\alpha - \frac{f(\alpha)}{a}$, $\alpha - \frac{f(\alpha)}{b}$ *è maggiore di* α; *se uno solo supera* α, *esso è compreso tra* α *e la minor radice superante* α *dell' equazione* $f(x) = 0$; *se sono entrambi maggiori di* α, *uno è tra* α *e la minore superante* α *delle radici dell'equazione* $f(x) = 0$, *l'altro supera questa radice: ed almeno uno dei due numeri* $\beta - \frac{f(\beta)}{a}$, $\beta - \frac{f(\beta)}{b}$ *è minore di* β; *se uno solo è minore di* β, *esso è compreso tra* β *e la maggior radice minore di* β; *se sono entrambi minori di* β, *uno è tra* β *e la maggiore delle radici minori di* β *dell' equazione* $f(x) = 0$, *l'altro è minore di questa radice.*

Da questa regola generale, con facili considerazioni, se ne deduce la seguente, particolare, che è più estesa, più completa e più comoda di quella di Newton perfezionata da Fourier:

Se $f(x)$ *è funzione reale della variabile reale* x *ed* $f(\rho) = 0$ *ed* $a < \rho < b$ *ed* $f'(x)\, f''(x)$ *è diverso da zero per ogni valore di* x *compreso tra* a *e* b, *ed* $a_0 = a$ *e* $b_0 = b$ *ed*

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{\mu_n} \quad , \quad b_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n)}{\mu_n}$$

dove μ_n *è quello di maggior valore assoluto dei due numeri* $f'(a_n)$, $f'(b_n)$, *allora*

$$\lim a_n = \lim b_n = \rho.$$

Se ν_n è quello di minor valore assoluto dei due numeri $f'(a_n)$, $f'(b_n)$, si può anche prendere $b_n - \frac{f(b_n)}{\nu_n}$ per a_{n+1} e si può prendere $a_n - \frac{f(a_n)}{\nu_n}$ per b_{n+1}, se convenga.

Metodo delle osculatrici. Se

$$\varphi(x) = f'(c) + (x - c) f''(c) + \ldots + \frac{(x - c)^{m-1}}{(m - 1)!} f^{(m)}(c),$$

la linea d'equazione $y = \varphi(x)$ ha un contatto d'ordine $m - 1$ con quella d'equazione $y = f'(x)$ nel punto d'ascissa c. La considerazione di questa linea può convenire per il calcolo assintotico delle radici reali dell'equazione $f(x) = 0$. Sia infatti ρ una radice maggiore di α o minore di β; e siano r minore ed s maggiore dei valori, che prende $f^{(m)}(x)$ mentre x cresce da α a β. Siano A il punto d'ascissa α, ed R, R_1, R_2 quelli d'ascissa ρ, e B, B_1, B_2 quelli d'ascissa β delle tre linee l, l_1, l_2 d'equazioni

$$y = f'(x) = f'(\alpha) + (x-\alpha) f''(\alpha) + \ldots + \frac{(x-\alpha)^{m-2}}{(m-2)!} f^{(m-1)}(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m)}(z).$$

$$y_1 = f'(\alpha) + (x - \alpha) f''(\alpha) + \ldots + \frac{(x-\alpha)^{m-2}}{(m-2)!} f^{(m-1)}(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^{m-1}}{(m-1)!} r$$

$$y_2 = f'(\alpha) + (x - \alpha) f''(\alpha) + \ldots + \frac{(x-\alpha)^{m-2}}{(m-2)!} f^{(m-1)}(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^{m-1}}{(m-1)!} s$$

dove z, funzione di x, è compresa tra α ed x. Si ha che

$$(y - y_1)(y - y_2) < 0$$

per tutti i valori di x tra α e β per cui, tra le perpendicolari condotte all'asse delle x pei suoi punti A' e B' d'ascisse α e β, la linea l ha comune soltanto il punto A con le linec l_1, l_2 e le separa. Se R' è il punto d'ascissa ρ dell'asse delle x, la segnata area del trapezio mistilineo A'R'RA è quindi compresa tra le segnate aree dei trapezii mistilinei A'R'R$_1$A, A'R'R$_2$A. Determinando x in modo che il segnato trapezio mistilineo limitato dall'asse delle x, dal tratto di linea l_1 od l_2 ad estremi d'ascisse x ed α e dalle ordinate di questi estremi sia équivalente ad R'A'AR, cioè ad $f(\alpha)$, il che farebbesi mediante l'equazione $\int_x^\alpha y_1\,dx = f(\alpha)$ oppure la $\int_x^\alpha y_2\,dx = f(\alpha)$ cioè per mezzo d'una delle due equazioni

$$f(\alpha) + (x-\alpha)f'(\alpha) + \ldots + \frac{(x-\alpha)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m-1)}(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^m}{m!} r = 0$$

$$f(\alpha) + (x-\alpha)f'(\alpha) + \ldots + \frac{(x-\alpha)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m-1)}(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^m}{m!} s = 0,$$

una volta otterrebbesi un valore di x compreso tra α e ρ. In modo analogo si calcola un numero tra ρ e β. Si può giungere facilmente alle stesse conclusioni con pure considerazioni analitiche.

Si ha infatti che, se δ è α oppure β,

$$0 = f(\rho) = f(\delta) + (\rho-\delta)f'(\delta) + \ldots + \frac{(\rho-\delta)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m-1)}(\delta) + \frac{(\rho-\delta)^m}{m!} k$$

dove k è un conveniente numero tra r ed s. Se

$$\varphi_1(x) = f(\delta) + (x-\delta)f'(\delta) + \ldots + \frac{(x-\delta)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m-1)}(\delta) + \frac{(x-\delta)^m}{m!} r$$

$$\varphi_2(x) = f(\delta) + (x-\delta)f'(\delta) + \ldots + \frac{(x-\delta)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m-1)}(\delta) + \frac{(x-\delta)^m}{m!} s,$$

si ha quindi che

$$\varphi_1(\delta)\,\varphi_1(\rho)\,\varphi_2(\delta)\,\varphi_2(\rho) = \left(f(\delta)\frac{(\rho-\delta)^m}{m!}\right)^2 (r-k)(s-k),$$

onde

$$\varphi_1(\delta)\,\varphi_1(\rho)\,\varphi_2(\delta)\,\varphi_2(\rho) < 0,$$

per cui una delle due equazioni $\varphi_1(x) = 0$, $\varphi_2(x) = 0$ ha certamente una radice tra δ e ρ. E precisamente, considerando i valori di $\varphi_1(\delta)\,\varphi_1(\rho)$ e di $\varphi_2(\delta)\,\varphi_2(\rho)$ e ponendo una volta α ed un'altra volta β per δ, si vede che:

Se f(x) *è funzione reale della variabile reale* x, *che s'annulla almeno una volta mentre* x *cresce da* α *a* β *ed ha derivata* m^{ma} *maggiore di* r *e minore di* s *per ogni valore di* x *compreso tra* α *e* β; *allora, quando* $f(\alpha) > 0$, *l'equazione*

$$f(\alpha) + (x-\alpha)f'(\alpha) + \ldots + \frac{(x-\alpha)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m-1)}(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^m}{m!} r = 0$$

e, quando $f(\alpha) < 0$, *l'equazione*

$$f(\alpha) + (x-\alpha) f'(\alpha) + \ldots + \frac{(x-\alpha)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m-1)}(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^m}{m!} s = 0$$

ha una radice tra α *e la minor radice maggiore di* α *dell'equazione* $f(x) = 0$.

E, quando $(-1)^m f(\beta) > 0$, *l'equazione*

$$f(\beta) + (x-\beta) f'(\beta) + \ldots + \frac{(x-\beta)^{m-1}}{(m-1)!} f^{m-1}(\beta) + \frac{(x-\beta)^m}{m!} r = 0$$

e, quando $(-1)^m f(\beta) < 0$, *l'equazione*

$$f(\beta) + (x-\beta) f'(\beta) + \ldots + \frac{(x-\beta)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m-1)}(\beta) + \frac{(x-\beta)^m}{m!} s = 0$$

ha una radice tra β *e la maggior radice minore di* β *della stessa equazione* $f(x) = 0$.

Ora, se $a_0, a_1, a_2, \ldots$ è successione numerica tendente a limite finito a ed $f(x)$ è funzione continua della variabile x, e si può fissare un numero positivo H in modo che, essendo μ un numero positivo dato, il modulo di $f(a_n) : (a_n - a_{n-1})^\mu$ sia minore di H per tutti i valori interi positivi di n, allora $f(a) = 0$, come si riconosce subito osservando che $\lim (a_n - a_{n-1}) = 0$ perchè tende a limite finito la successione $a_0, a_1, a_2, \ldots$, e $\lim f(a_n) = f(a)$ perchè la funzione $f(x)$ è continua.

Da quanto fu detto segue che:

Se f(x) *è funzione reale di variabile reale, che per i valori considerati della variabile ammette derivata* m^{ma} *maggiore di* r *e minore di* s; *e partendo dal numero reale* α, *che indicheremo anche con* α_0, *e dal maggiore* β, *che indicheremo anche con* β_0, *formiamo le due successioni*

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \qquad\qquad \beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots$$

dove, secondo che $f(\alpha)$ *è positivo o negativo,* α_{n+1} *sia la minor radice superan-*

te α_n della prima o della seconda delle seguenti equazioni

$$f(\alpha_n) + (x - \alpha_n) f'(\alpha_n) + \ldots + \frac{(x-\alpha_n)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m-1)}(\alpha_n) + \frac{(x-\alpha_n)^m}{m!} r = 0.$$

$$f(\alpha_n) + (x - \alpha_n) f'(\alpha_n) + \ldots + \frac{(x-\alpha_n)^{m-1}}{(m-1)!} f^{m-1}(\alpha_n) + \frac{(x-\alpha)^m}{m!} s = 0$$

e, secondo che $(-1)^m f(\beta)$ è positivo o negativo, β_{n+1} sia la maggior radice minore di β_n della prima o della seconda delle equazioni seguenti

$$f(\beta_n) + (x - \beta_n) f'(\beta_n) + \ldots + \frac{(x-\beta_n)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m-1)}(\beta_n) + \frac{(x-\beta_n)^m}{m!} r = 0$$

$$f(\beta_n) + (x - \beta_n) f(\beta_n) + \ldots + \frac{(x-\beta_n)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m-1)}(\beta_n) + \frac{(x-\beta_n)^m}{m!} s = 0;$$

allora, se una volta non si può continuare una delle due successioni perchè una equazione non abbia l'attesa radice,, come pure se le due successioni si sovrappongano cioè si pervenga ad un β_h minore d'un α_k, l'equazione $f(x) = 0$ non ha radici tra α e β: se invece le due successioni, senza sovrapporsi, continuano senza fine, in tal caso tendono entrambe a limiti e lim α_n è la minore e lim β_n è la maggiore delle radici comprese tra α e β dell'equazione $f(x) = 0$; se lim α_n = lim β_n v' è unica radice tra α e β. In luogo di r ed s nelle equazioni determinanti α_{n+1} e β_{n+1} si possono mettere un qualsiasi numero minore ed uno qualsiasi maggiore dei valori, che prende $f^{(m)}(x)$ mentre x cresce da α_n a β_n, e convien fissarli, più che si possa, vicini tra loro.

Si riconosce inoltre subito che:

Se $f(x)$ ha derivate $(m+1)^{ma}$ ed $(m+2)^{ma}$ diverse da zero per tutti i valori di x da α_n a β_n ed equazione determinante α_{n+1} o β_{n+1}, con l'indicato procedimento, sia

$$f(\gamma) + (x - \gamma) f'(\gamma) + \ldots + \frac{(x-\gamma)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m-1)}(\gamma) + \frac{(x-\gamma)^m}{m!} f^{(m)}(\gamma) = 0,$$

dove γ sarà α_n o β_n; allora, se ρ sia radice tra α_n e β_n, avrà una radice tra α_{n+1} o β_{n+1} e ρ l'equazione

$$f(\gamma) + (x-\gamma) f'(\gamma) + \ldots + \frac{(x-\gamma)^m}{m!} f^{(m)}(\gamma) + \frac{(x-\gamma)^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\delta) = 0$$

dove

$$\delta = \alpha_n \qquad se \qquad f^{(m+1)}(\alpha_n) f^{(m+2)}(\alpha_n) > 0$$

$$\delta = \beta_n \qquad » \qquad f^{(m+1)}(\alpha_n) f^{(m+2)}(\alpha_n) < 0.$$

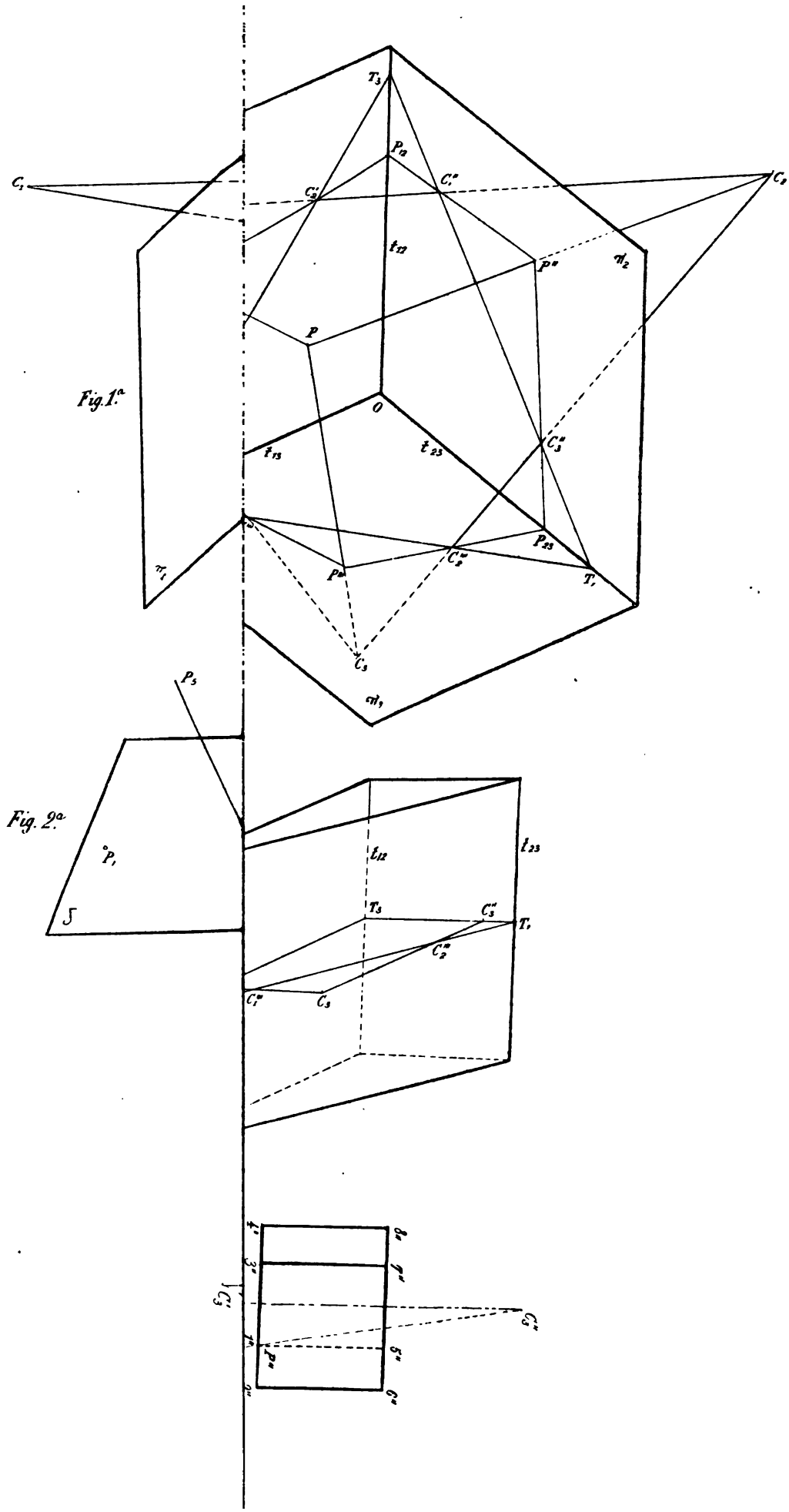


Fig. 1.ª
Fig. 2.ª
T_3
P_a
C_1
C_2
C_3'
C_1''
t_{12}
P''
π_2
P
O
t_{13}
t_{23}
C_3''
P_{23}
C_2''
T_1
π_1
C_3
P_5
P_1
S
t_{12}
t_{23}
T_3
C_3''
T_1
C_2''
C_1''
C_3

SULLE FUNZIONI SFERICHE SIMMETRICHE

DEL CAMPO AD N DIMENSIONI

MEMORIA

DEL

Dott. VIRGILIO GIULOTTO (a Mantova).

(*Contin. e fine, V. vol.* XXXIX (1901), *pag.* 162–180).

CAPITOLO III.

Relazioni ricorrenti di Beltrami e Corollari- Proprietà integrali delle funzioni sferiche di prima specie-Nuova espressione delle funzioni sferiche di seconda specie-Frazione continua di Gauss.

§. 1. Sieno $\varphi_n(\xi)$ e $\varphi_{n-1}(\xi)$ due funzioni in ξ di grado n ed $n-1$ rispettivamente.

Poniamo:

$$\frac{d\varphi_n(\xi)}{d\xi} = a\xi \frac{d\varphi_{n-1}(\xi)}{d\xi} + b\,\varphi_{n-1}(\xi)$$

$$\frac{d\varphi_{n-1}(\xi)}{d\xi} = \alpha\xi \frac{d\varphi_n}{d\xi} + \beta\,\varphi_n(\xi) \tag{1}$$

con a, b, α, β costanti indeterminate.

Derivate le (1) rispetto a ξ e fatte le debite sostituzioni, si ottengono per $\varphi_n(\xi)$ e $\varphi_{n-1}(\xi)$ le seguenti equazioni differenziali del second'ordine:

$$(1 - a\alpha\xi^2)\cdot\frac{d^2\varphi_n}{d\xi^2} - (a\beta + b\alpha + 2a\alpha)\,\xi\,\frac{d\varphi_n}{d\xi} - (a+b)\,\beta\varphi_n = 0 \tag{2}$$

$$(1 - a\alpha\xi^2)\,\frac{d^2\varphi_{n-1}}{d\xi^2} - (a\beta + b\alpha + 2a\alpha)\,\xi\,\frac{d\varphi_{n-1}}{d\xi} - (\alpha+\beta)\,b\varphi_{n-1} = 0 \tag{3}$$

e poichè coll'assumere

$$a = \frac{1}{a} \quad , \quad b = (n + N - 3)\, a \quad , \quad \beta = -\frac{n}{a},$$

esse si riducono, per qualsiasi valore di a e quindi anche per $a = 1$, alle note equazioni differenziali:

$$(1 - \xi^2)\frac{d^2R_n}{d\xi^2} - (N - 1)\,\xi\,\frac{dR_n}{d\xi} + n(n + N - 2)\,R_n = 0 \tag{4}$$

$$(1 - \xi^2)\frac{d^2R_{n-1}}{d\xi^2} - (N - 1)\,\xi\,\frac{dR_{n-1}}{d\xi} + (n-1)(n+N-3)\,R_{n-1} = 0 \tag{5}$$

cui soddisfano rispettivamente

$$R_n = AP_n + BQ_n$$

$$R_{n-1} = A'P_n + B'Q_n$$

con A , B , A' , B' costanti arbitrarie, si può senz'altro asserire che: se due funzioni $\varphi_n(\xi)$ e $\varphi_{n-1}(\xi)$ la prima di grado n la seconda di grado $n - 1$ sono legate fra loro dalle relazioni

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_n(\xi)}{d\xi} &= \xi\,\frac{d\varphi_{n-1}(\xi)}{d\xi} + (n + N - 3)\,\varphi_{n-1}(\xi) \\ \frac{d\varphi_{n-1}(\xi)}{d\xi} &= \xi\,\frac{d\varphi_n(\xi)}{d\xi} - n\,\varphi_n(\xi), \end{aligned} \tag{6}$$

esse sono rispettivamente integrali delle equazioni differenziali (4) e (5).

Ci proponiamo ora di vedere inversamente se, o sotto quali condizioni, fra due successive R_n possono sussistere le relazioni (6).

Si verifica intanto che, a dette relazioni, soddisfano due P_n consecutive.

Posto infatti

$$A_n = \frac{(N - 2)\,N\,(N + 2)\,\ldots\ldots\,(N + 2\,n - 4)}{n\,!} \tag{7}$$

$$a_{n,s} = \frac{n(n - 1)(n - 2)\,\ldots\ldots\,(n - 2\,s + 2)(n - 2\,s + 1)}{2\cdot 4\,\ldots\,2s\,(N + 2\,n - 4)(N + 2\,n - 6)\ldots(N + 2\,n - 2\,s - 2)}$$

e sostituite nelle relazioni (6) a φ_n e φ_{n-1} rispettivamente:

$$P_n = A_n \sum_{s=0} (-1)^s a_{n,s} \xi^{n-2s} \qquad \text{e} \qquad P_{n-1} = A_{n-1} \sum_{s=0} (-1)^s a_{n-1,s} \xi^{n-1-2s},$$

tenendo conto dell' identità

$$a_{n-1,s} = \frac{(n-2s)(N+2n-4)}{n(N+2n-2s-4)} a_{n,s},$$

si trova con facili calcoli che le (6) sono identicamente soddisfatte dalle funzioni P_n e P_{n-1}, purchè fra due coefficienti A_n consecutivi sussista la relazione

$$A_n = \frac{2n+N-4}{n} A_{n-1}$$

che segue immediatamente dalla (7).

Esaminiamo ora se, almeno con una conveniente scelta del fattore A_0'' che figura nell'espressione generale di Q_n, (Cap. II° § 2) fra due consecutive di tali funzioni possono sussistere le (6).

Per questo posto, poichè A_0'' dipenderà in generale da n:

$$A_0'' = A_n'$$

e

$$a'_{n,s} = \frac{(n+N-2)(n+N-1)(n+N)\ldots\ldots(n+N+2s-4)(n+N+2s-3)}{2\cdot 4\ldots 2s(2n+N)(2n+N+2)\ldots\ldots(2n+N+2s-4)(2n+N+2s-2)},$$

assumiamo come funzione φ_n la Q_n definita da:

$$Q_n = A'_n \sum_{s=0}^{\infty} a'_{n,s} \xi^{-(n+N+2s-2)}$$

Sostituendo nella prima delle (6), e tenendo conto dell'uguaglianza

$$a_{n,s} = \frac{2s(2n+N-2)}{(n+N-3)(n+N+2s-4)} a_{n-1,s},$$

si giunge facilmente all'equazione:

$$\sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \frac{2n+N-2}{n+N-3} A_n' - A'_{n-1} \right\} \xi^{-(n+2s+N-3)} = 0$$

la quale (essendo $N \geq 3$) è identicamente soddisfatta se fra A_n' e A'_{n-1} sussiste la relazione:

$$A_n' = \frac{n + N - 3}{2n + N - 2} A'_{n-1}$$

ossia (convenuto di assumere $A_0' = 1$) se è:

$$A_n' = \frac{(N-2)(N-1)N \ldots\ldots (n+N-4)(n+N-3)}{N(N+2)\ldots\ldots(2n+N-4)(2n+N-2)}.$$

E poichè in tale ipotesi (come si potrebbe in modo analogo facilmente verificare) è soddisfatta anche la seconda delle (6), si può concludere che, assunto in generale

$$Q_n = \frac{(N-2)(N-1)\ldots\ldots(N+n-4)(N+n-3)}{N(N+2)\ldots\ldots(N+2n-4)(N+2n-3)}$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(N+n-2)(N+n-1)\ldots(N+n+2s-4)(N+n+2s-3)}{2\cdot 4\ldots 2s(N+2n)(N+2n+2)\ldots(N+2n+2s-2)} \xi^{-(N+n+2s-2)},$$

fra due consecutive di tali funzioni sussistono effettivamente le relazioni (6).

E così risulta assodato che:

Fissata

$$R_0 = AP_0 + BQ_0$$

con

$$P_0 = 1 \qquad Q_0 = (N-2)\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(N-1)(N+1)\ldots(N+2s-3)}{2\cdot 4\ldots 2s(N+2s-2)} \xi^{-(N+2s-2)},$$

tutte le funzioni R_n *definite dalle seguenti equazioni*

$$\frac{dR_n}{d\xi} = \xi \frac{dR_{n-1}}{d\xi} + (n+N-3)R_{n-1}$$

$$\frac{dR_{n-1}}{d\xi} = \xi \frac{dR_n}{d\xi} - n R_n \qquad (a)$$

e formate sulle stesse costanti A *e* B, *riproducono nelle loro componenti* P_n *e* Q_n *quelle funzioni che già abbiamo rappresentate con questi simboli.*

Le (a), nel caso particolare di $N = 3$, si riducono alle ben note relazioni

ricorrenti già stabilite dal Beltrami per le ordinarie funzioni sferiche [1]. Il procedimento che ad esse ci ha condotti ci sembra anche notevolmente più semplice di quello seguìto dal Beltrami e che abbiamo dovuto completamente abbandonare.

Dalle (a) si deducono ora facilmente parecchie altre relazioni notevoli. Si ha infatti da esse:

$$\begin{aligned} n\,R_n &= (n + N - 3)\,\xi\,R_{n-1} - (1 - \xi^2)\frac{dR_{n-1}}{d\xi} \\ (n + N - 3)\,R_{n-1} &= n\,\xi\,R_n + (1 - \xi^2)\frac{dR_n}{d\xi} \end{aligned} \qquad (b)$$

e così, mutando nella prima di queste n in $n+1$ e sommando membro a membro colla seconda, si ricava:

$$(n + N - 3)\,R_{n-1} - (2n + N - 2)\,\xi\,R_n + (n + 1)\,R_{n+1} = 0 \qquad (c)$$

Cambiando invece n in $n+1$ nella prima delle (a) e sottraendovi la seconda si deduce:

$$\frac{d\,(R_{n+1} - R_{n-1})}{d\xi} = (2n + N - 2)\,R_n. \qquad (d)$$

Se poi alla relazione che si ha da quest'ultima mutando n in $n-1$ si aggiungono le altre che se ne ricavano cambiando successivamente n in $n-2$, $n-4$ ecc. sostituendo inoltre, nel caso di n impari, a $\frac{dR_1}{d\xi}$ il valore offerto dalla prima delle (a) si ottiene:

$$\frac{dR_n}{d\xi} = \begin{cases} (2n+N-4)R_{n-1}+(2n+N-8)R_{n-3}+\ldots+NR_1+\frac{dR_0}{d\xi} \; \textit{per n pari} \\ \\ (2n+N-4)R_{n-1}+(2n+N-8)R_{n-3}+\ldots(N+2)R_2+(N-2)R_0+\xi\frac{dR_0}{d\xi} \; \textit{per n impari} \end{cases} \qquad (e)$$

relazione che, nel caso particolare di $R_n = P_n$, (essendo $P_0 = 1$) diventa:

$$\frac{dP_n}{d\xi} = \sum_{m=1} (2n + N - 4m)\,P_{n-2m+1}). \qquad (e')$$

---

[1] Beltrami. Sulle funzioni sferiche d'una variabile (Rendiconti dell'Istituto Lombardo 1887).

Se poi, cambiato nuovamente n in $n-1$ nella (d) si sommano membro a membro le relazioni che si deducono dando ad n successivamente i valori 2, 3, 4,..., n e si sostituisce a $\frac{dR_1}{d\xi}$ il valore dato dalla prima delle (a) si giunge alla relazione:

$$\frac{d(R_n + R_{n-1})}{d\xi} = \sum_{m=1}^{n-1} (N + 2m - 2) R_m + (1 - \xi) \frac{dR_0}{d\xi} \qquad (f)$$

che per $R_n = P_n$ diventa:

$$\sum_{m=1}^{n-1} (N + 2m - 2) P_m = \frac{d(P_n + P_{n-1})}{d\xi} \qquad (f')$$

§. 2.° Moltiplichiamo per $(1-\xi^2)^{\frac{N-3}{2}}$ le equazioni differenziali cui soddisfano rispettivamente la P_n e P_m; abbiamo:

$$\frac{d}{d\xi}\left[(1-\xi^2)^{\frac{N-2}{2}} \frac{dP_n}{d\xi}\right] + n(n + N - 2)(1-\xi^2)^{\frac{N-3}{2}} P_n = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{d}{d\xi}\left[(1-\xi^2)^{\frac{N-1}{2}} \frac{dP_m}{d\xi}\right] + m(m + N - 2)(1-\xi^2)^{\frac{N-3}{2}} P_m = 0 \qquad (2)$$

Se dalla (1) moltiplicata per P_m sottragghiamo la (2) moltiplicata per P_n otteniamo:

$$P_n \frac{d}{d\xi}\left[(1-\xi^2)^{\frac{N-1}{2}} \frac{dP_n}{d\xi}\right] - P_n \frac{d}{d\xi}\left[(1-\xi^2)^{\frac{N-1}{2}} \frac{dP_m}{d\xi}\right] +$$

$$+ (n - m)(N + n + m - 2)(1-\xi^2)^{\frac{N-3}{2}} P_n P_m = 0$$

ossia:

$$\frac{d}{d\xi}\left[(1-\xi^2)^{\frac{N-1}{2}} \left(P_m \frac{dP_n}{d\xi} - P_n \frac{dP_m}{d\xi}\right)\right] + (n - m)(n + N + m - 2) P_n P_m (1-\xi^2)^{\frac{N-3}{2}} = 0.$$

E poichè la funzione $(1-\xi^2)^{\frac{N-1}{2}} \left(P_m \frac{dP_n}{d\xi} - P_n \frac{dP_m}{d\xi}\right)$ è finita e continua in ogni intervallo, integrando fra -1 e $+1$ si ricava:

$$\text{per } n \neq m \qquad \int_{-1}^{+1} P_n P_m (1-\xi^2)^{\frac{N-3}{2}} d\xi = 0. \qquad (a)$$

Vogliamo ora vedere qual'è il valore dell'integrale per $m = n$.

Dalla relazione ricorrente (c) (§. 1) abbiamo:

$$(n + N - 3)\, P_{n-1} - (2n + N - 2)\, \xi\, P_n \quad + (n + 1)\, P_{n+1} = 0$$

$$(n + N - 2)\, P_n \quad - \quad (2n + N)\, \xi\, P_{n+1} + (n + 2)\, P_{n+2} = 0$$

Moltiplicando la prima per $P_{n+1}\,(1-\xi^2)^{\frac{N-3}{2}}$, la seconda per $P_n\,(1-\xi^2)^{\frac{N-3}{2}}$ ed integrando fra -1 e $+1$, si ottiene, tenendo ragione della (α),

$$(n+1) \qquad \int_{-1}^{+1} (1-\xi^2)^{\frac{N-3}{2}}\, P^2_{n+1}\, d\xi = (2n + N - 2) \int_{-1}^{+1} \xi\, (1-\xi^2)^{\frac{N-3}{2}}\, P_n\, P_{n+1}\, d\xi$$

$$(n + N - 2) \int_{-1}^{+1} (1-\xi^2)^{\frac{N-3}{2}}\, P_n^2\, d\xi = (2n + N) \int_{-1}^{+1} \xi\, (1-\xi^2)^{\frac{N-3}{2}}\, P_n\, P_{n+1}\, d\xi$$

quindi:

$$\frac{n+1}{2n+N-2} \int_{-1}^{+1} P^2_{n+1}\, (1-\xi^2)^{\frac{N-3}{2}}\, d\xi = \frac{n+N-2}{2n+N} \int_{-1}^{+1} P_n^2\, (1-\xi^2)^{\frac{N-3}{2}}\, d\xi$$

ossia:

$$\int_{-1}^{+1} P^2_{n+1} (1-\xi^2)^{\frac{N-3}{2}}\, d\xi = \frac{(n+N-2)(2n+N-2)}{(n+1)(2n+N)} \int_{-1}^{+1} P_n^2\, (1-\xi^2)^{\frac{N-3}{2}}\, d\xi$$

ed essendo $P_0 = 1$, da questa relazione ricorrente si ricava:

$$\int_{-1}^{+1} P_n^2 (1-\xi^2)^{\frac{N-3}{2}}\, d\xi = \frac{(N-2)^2}{2n+N-2}\, \frac{(N-1)N(N+1)\ldots(n+N-3)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots n} \int_{-1}^{+1} (1-\xi^2)^{\frac{N-3}{2}}\, d\xi. \qquad (3)$$

Si tratta ora di calcolare l'integrale:

$$\int_{-1}^{+1} (1-\xi^2)^{\frac{N-3}{2}}\, d\xi$$

Posto $N - 3 = m$ ed $I_m = \int (1-\xi^2)^{\frac{m}{2}}\, d\xi$ si ottiene:

$$I_m = \frac{\xi\,(1-\xi^2)^{\frac{m}{2}}}{m+1} + \frac{m}{m+1}\, I_{m-2}$$

ed, indicando con I'_m l'integrale I_m limitato fra -1 e $+1$, si ha:

$$I_m = \frac{m}{m+1}\, I'_{m-2}.$$

Questa relazione permette di esprimere I'_m per mezzo di I'_0 o di I'_1 a seconda che m è pari od impari.

Essendo:

$$I'_0 = \int_{-1}^{+1} d\xi = \Big| \xi \Big|_{-1}^{+1} = 2$$

ed

$$I_1' = \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-\xi^2}\, d\xi = \frac{1}{2} \Big| \xi \sqrt{1-\xi^2} \Big|_{-1}^{+1} + \frac{1}{2} \Big| \text{arc. sen}\, \xi \Big|_{-1}^{+1} = \frac{\pi}{2},$$

si ha:

$$I'_m = \int_{-1}^{+1} (1-\xi^2)^{\frac{m}{2}}\, d\xi = \begin{cases} 2\, \dfrac{m(m-2)(m-4)\ldots\ldots 4\cdot 2}{(m+1)(m-1)(m-3)\ldots\ldots 5\cdot 3} & \textit{per } \mathrm{m} \textit{ pari} \\[2ex] \pi\, \dfrac{m(m-2)(m-4)\ldots\ldots 5\cdot 3}{(m+1)(m-1)(m-3)\ldots\ldots 4\cdot 2} & \textit{per } \mathrm{m} \textit{ impari} \end{cases}$$

e ricordando la posizione $m = \mathrm{N} - 3$ si ha sostituendo nella (3):

$$\int_{-1}^{+1} P^2_n\, (1-\xi^2)^{\frac{N-3}{2}}\, d\xi =$$

$$\begin{cases} 2\, \dfrac{(N-2)^2}{2n+N-2}\, \dfrac{(N-3)(N-5)\ldots 4\cdot 2}{(N-2)(N-4)\ldots 5\cdot 3}\, \dfrac{(N-1)N(N+1)\ldots(n+N-3)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots n} & \textit{per } \mathrm{N} \textit{ impari} \\[2ex] \pi\, \dfrac{(N-2)^2}{2n+N-2}\, \dfrac{(N-3)(N-5)\ldots 5\cdot 3}{(N-2)(N-4)\ldots 4\cdot 2}\, \dfrac{(N-1)N(N+1)\ldots(n+N-2)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots n} & \textit{per } \mathrm{N} \textit{ pari} \end{cases} \qquad (\beta)$$

Facendo nelle (α) e (β) $\mathrm{N} = 3$ si ottengono le note relazioni delle funzioni sferiche ordinarie:

$$\int_{-1}^{+1} P_n\, P_m\, d\xi = 0 \qquad \text{per} \qquad n \neq m \qquad \int_{-1}^{+1} P^2_n\, d\xi = \frac{2}{2n+1}$$

§. 3. Daremo ora una nuova espressione analitica della funzione Q_n in virtù della quale sarà definita in tutto il piano complesso:

La relazione (c) (§. 1) permette di esprimere P_n e Q_n rispettivamente per mezzo di P_1 P_0 e Q_1 Q_0 mediante formule del seguente tipo:

$$P_n(\xi) = \varphi_n(\xi)\, P_1(\xi) + \psi_n(\xi)\, P_0(\xi)$$

$$Q_n(\xi) = \varphi_n(\xi)\, Q_1(\xi) + \psi_n(\xi)\, Q_0(\xi)$$

dove $\varphi_n(\xi)$ e $\psi_n(\xi)$ rappresentano certi polinomi in ξ.

Da esse, eliminando $\psi_n(\xi)$ si ricava:

$$P_0\, Q_n = P_n\, Q_0 - \varphi_n(\xi)\, (P_1\, Q_0 - Q_1\, P_0). \qquad (1)$$

Per dare alla Q_n un'espressione più conveniente, calcoliamoci P_0, Q_0, P_1, Q_1. A tale scopo osserveremo anzitutto che essendo:

$$A\int (1-\xi^2)^{-\frac{N-1}{2}} d\xi + B$$

(con A e B costanti arbitrarie) l'integrale generale dell'equazione differenziale cui soddisfano le funzioni sferiche d'ordine zero, poichè (§. 1)

$$\lim_{\xi=\infty} Q_0 = 0$$

è:

$$Q_0 = \lambda\int_{\infty}^{\xi} (1-\xi^2)^{-\frac{N-1}{2}} d\xi$$

essendo λ una costante da determinarsi in guisa che si abbia per $|\xi| > 1$:

$$\lambda\int_{\infty}^{\xi} (1-\xi^2)^{\frac{N-1}{2}} d\xi = (N-2)\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(N-1)(N+1)\dots(N+2s-3)}{2\cdot 4\dots 2s(N+2s-2)}\,\xi^{-(N+2s-2)}$$

Tale determinazione si fa immediatamente. Infatti essendo:

$$(1-\xi^2)^{-\frac{N-1}{2}} = (-1)^{-\frac{N-1}{2}}\,\xi^{-(N-1)}\left(1-\frac{1}{\xi^2}\right)^{-\frac{N-1}{2}}$$

ed avendosi per mod $\xi > 1$

$$\left(1-\frac{1}{\xi^2}\right)^{-\frac{N-1}{2}} = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(N-1)(N+1)\dots(N+2s-3)}{2\cdot 4\dots\dots 2s}\,\xi^{-2s},$$

è per mod $\xi > 1$:

$$\int_{\infty}^{\xi} (1-\xi^2)^{-\frac{N-1}{2}} = (-1)^{\frac{N-1}{2}}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(N-1)(N+1)\dots(N+2s-3)}{2\cdot 4\dots 2s(N+2s-2)}\,\xi^{-(N-2+2s)}$$

e quindi:

$$\lambda = (-1)^{\frac{N-3}{2}}(N-2).$$

Si ha così:

$$P_p = 1 \qquad Q_0 = (-1)^{\frac{N-3}{2}}(N-2)\int_{\infty}^{\xi}(1-\xi^2)^{-\frac{N-1}{2}} d\xi$$

od anche:

$$P_0 = 1 \qquad Q_0 = (N-2)\int_{\xi}^{\infty}(\xi^2-1)^{-\frac{N-1}{2}} d\xi$$

e per le (*b*) (§. 1)

$$P_1 = 1 \qquad Q_1 = (N\ \ 2)^2 \xi \int_\xi^\infty (\xi^2-1)^{-\frac{N-1}{2}} d\xi - (N-2)(\xi^2-1)^{-\frac{N-3}{2}}$$

e conseguentemente per la (1):

$$Q_n(\xi) = (N-2)\, P_n \int_\xi^\infty (\xi^2-1)^{-\frac{N-1}{2}} d\xi - (N-2)\, \varphi_n(\xi)\, (\xi^2-1)^{-\frac{N-3}{2}} \tag{2}$$

$\varphi_n(\xi)$ essendo un polinomio in ξ di grado $n-1$.

§. 4. Le relazioni trovate ci permettono di giungere ad un risultato, che, nella teorica delle funzioni sferiche ordinarie, è d'importanza notevole.

Posto per comodo nell'espressione (2) di Q_n:

$$S_n = (N-2)\, \varphi_n(\xi)\, (\xi^2-1)^{-\frac{N-3}{2}}$$

si ha

$$Q_n = (N-2)\, P_n \int_\xi^\infty (\xi^2-1)^{-\frac{N-1}{2}} d\xi - S_n \tag{2'}$$

Abbiamo visto essere (Cap. III° §. 1°):

$$(n+N-3)\, P_{n-1} - (2n+N-2)\, \xi\, P_n + (n+1)\, P_{n+1} = 0 \tag{3}$$

$$(n+N-3)\, Q_{n-1} - (2n+N-2)\, \xi\, Q_n + (n+1)\, Q_{n+1} = 0 \tag{4}$$

Moltiplichiamo la (3) per $(N-2)\int_\xi^\infty (\xi^2-1)^{-\frac{N-1}{2}} d\xi$ e sottragghiamo da essa la seconda. Tenendo ragione della ξ (2') ricaviamo:

$$(n+N-3)\, S_{n-1} - (2n+N-2)\, \xi\, S_n + (n+1)\, S_{n+1} = 0 \tag{5}$$

Possiamo dunque dire che la relazione ricorrente (*c*) (§. 1) valida per P_n e Q_n sussiste ancora per S_n.

Poniamo ora:

$$P_n(\xi) = \frac{(N-2)\, N\, (N+2) \ldots (N+2)(n-2)}{\pi(n)}\, p_n(\xi) \tag{6}$$

$$S_n(\xi) = \frac{(N-2)\, N\, (N+2) \ldots (N+2)(n-2)}{\pi(n)} (N-2)\, (\xi^2-1)^{-\frac{N-3}{2}}\, s_n(\xi) \tag{7}$$

e sostituiamo queste espressioni di P_n ed S_n rispettivamente nelle (3) e (5);

facendo le debite riduzioni otteniamo per p_n e s_n le relazioni ricorrenti:

$$p_{n+1} = \xi p_n - \frac{n(n+N-3)}{(2n+N-4)(2n+N-2)} p_{n-1} \tag{8}$$

$$s_{n+1} = \xi s_n - \frac{n(n+N-3)}{(2n+N-4)(2n+N-2)} s_{n-1}. \tag{9}$$

Ciò posto consideriamo la seguente frazione continua:

$$\cfrac{\beta}{\alpha + \cfrac{\beta_1}{\alpha_1 + \cfrac{\beta_2}{\alpha_2 + \ddots \; \alpha_{n-2} + \cfrac{\beta_{n-1}}{\alpha_{n-1} + \ddots}}}} \tag{α}$$

La ridotta di un ordine qualunque r è una frazione che ha per numeratore (denominatore) il numeratore (denominatore) della ridotta precedente moltiplicato per α_r più il numeratore (denominatore) dell'antiprecedente moltiplicato per β_r. Dunque, desgnata in generale con $\frac{H_n}{K_n}$ la ridotta di ordine n è:

$$H_{n+1} = H_n \alpha_n + H_{n-1} \beta_n \tag{10}$$

$$K_{n+1} = K_n \alpha_n + K_{n-1} \beta_n \tag{11}$$

Però, perchè le ridotte $\frac{H_1}{K_1}$ ed $\frac{H_2}{K_2}$ che si ottengono dalle (10) ed (11) coincidano rispettivamente con quelle che si hanno dalla frazione continua (α), è necessario imporre alle (10) ed (11) le condizioni: $H_0 = 0$, $K_0 = 1$, $H_1 = \beta$, $K_1 = \alpha$.

Pertanto se nelle (8) e (9) si pone:

$$p_n = K_n, \quad s_n = H_n, \quad \xi = \alpha_n, \quad -\frac{n(n+N-3)}{(2n+N-4)(2n+N-2)} = \beta_n,$$

si hanno le (10) ed (11), onde le (8) e (9) potranno essere interpretate come relazioni che legano rispettivamente i numeratori ed i denominatori di una frazione continua che si otterrà dalla (α) facendo le debite sostituzioni, quando sieno soddisfatte le condizioni:

$$p_0 = K_0 = 1 \qquad \text{ed} \qquad s_0 = H_0 = 0$$

Queste condizioni sono veramente soddisfatte come risulta dalle (6) e $(7)_1$ tenendo presenti i valori di P_0 e di S_0 (§. 3).

Però, per poter scrivere la frazione continua di cui $\frac{s_n}{p_n}$ è l'n^{ma} ridotta, è necessario procurarsi anche le espressioni di p_1 e di s_1.

Si raggiunge facilmente lo scopo servendosi delle (7) ed (8) e ricordando le espressioni di P_1 e di S_1 (§. 3). Si ottiene:

$$s_1 = H_1 = \beta = \frac{1}{N-2} \qquad\qquad p_1 = K_1 = \alpha = \xi.$$

Allora, poichè per la (12) è:

$$\beta_1 = -\frac{1\cdot(N-2)}{(N-2)N} \qquad \beta_2 = -\frac{2\,(N\ \ 1)}{N(N+2)} \qquad \beta_3 = -\frac{3N}{(N+2)(N+4)} \text{ ecc.}$$

possiamo concludere che $\frac{s_n}{p_n}$ $(n = 1\,,\,2\,\ldots)$ è la ridotta n^{ma} della seguente frazione continua:

$$\xi - \cfrac{\frac{1}{N-2}}{\xi - \cfrac{\frac{1\,(N-2)}{(N-2)\,N}}{\xi - \cfrac{\frac{2\,(N-1)}{N\,(N+2)}}{\xi - \cfrac{\frac{3N}{(N-2)(N-4)}}{\xi - \ldots}}}}$$

Questa frazione continua, che è la generalizzazione di quella di Gauss per le funzioni sferiche ordinarie [1], permettendoci di calcolare s_n e p_n (per n=1,2...) ci pone in grado di conoscere, a causa delle posizioni fatte e della nota espressione di Q_n, (§. 3) le due funzioni sferiche simmetriche di prima e di seconda specie.

---

[1] C. F. Gauss. Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi.

OSSERVAZIONI

PER UNA TEORIA PURAMENTE ANALITICA ED ELEMENTARE

DELLE FUNZIONI CIRCOLARI ED IPERBOLICHE E LORO RELAZIONI

COLL' ESPONENZIALE

NOTA

DI

ROBERTO VOLPI.

La via che ordinariamente si segue nel trattare la Teoria delle funzioni circolari, definendo queste sul circolo e poi sviluppandone le più elementari proprietà con dimostrazioni parte geometriche e parte analitiche, è certo una delle più adatte per l'insegnamento, ma può lasciar alquanto a desiderare dal lato scientifico. Sotto questo aspetto ci sembra interessante un metodo che segua esclusivamente un indirizzo analitico o geometrico; e tanto più se da esso possono scaturire per via diretta altre importanti conseguenze, che colla stessa facilità ed uniformità di metodo non potrebbero dedursi, svolgendo la Teoria nel modo solito. In questa Nota si tratta appunto delle funzioni circolari con metodo puramente analitico, e di pari passo si procede per le iperboliche, fino a giungere alla definizione dell'esponenziale in tutto il campo dei numeri complessi. Ciò si fa partendo dalle proprietà formali di tali funzioni, mostrando come queste, associate alla condizione della continuità, possano servire a definire le funzioni stesso ed a stabilirne le proprietá elementari. Si è poi cercato di rimanere sempre in un campo elementarissimo (eccetto per alcune osservazioni non essenziali), usando soltanto le prime nozioni sui limiti, sui numeri complessi, il concetto puro e semplice di continuità, evitando quello di serie.

Diciamo *esponenziale* ogni funzione uniforme, finita e continua in ogni punto al finito reale o complesso e sempre soddisfacente alla legge iterativa

$$f(x+y) = f(x)\,f(y).$$

L'esistenza di tali funzioni, anche non analitiche, risulta nel seguito. Per ora limitiamoci a notare che la a^x, con a positivo $\neq 1$, offre esempio di esponenziale nel campo dei numeri reali e che tale funzione può definirsi affatto elementarmente nel modo che segue: per x intero positivo sia $a^x = a \cdot a \ldots a$ (x volte); per $x = \frac{m}{n}$ (razionale positivo) sia $a^x = \left| \sqrt[n]{a^m} \right|$ (valore aritmetico di $\sqrt[n]{a^m}$); per x irrazionale positivo, definito dalle due classi contigue M, N, sia a^x definito dalle due classi, pure contigue, rappresentate simbolicamente da a^M, a^N; per $x = 0$ sia $a^x = 1$; e per x negativo $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$. È poi facile mostrare che un esponenziale, funzione reale positiva di variabile reale, deve essere della forma a^x, notando per es. che il suo logaritmo aritmetico è una funzione distributiva, soddisfacente alle note condizioni del Cauchy per ridursi alla forma kx.

Si considerino le funzioni

$$f(x) = \alpha(u(x) + v(x)) \ , \ \varphi(x) = \beta(u(x) - v(x)) \ ,$$

essendo $u(x)$ e $v(x)$ due esponenziali ed α e β costanti. Per la $f(x)$ e $\varphi(x)$ si ricavano subito i *teoremi d'addizione.*

$$f(x+y) = \frac{1}{2\alpha} f(x) f(y) + \frac{\alpha}{2\beta^2} \varphi(x) \varphi(y) \ , \ \varphi(x+y) = \frac{1}{2\alpha} [f(x) \varphi(y) + f(y) \varphi(x)]$$

ed inoltre

$$\frac{f(x) f(y)}{(2\alpha)^2} - \frac{\varphi(x) \varphi(y)}{(2\beta)^2} = \frac{1}{2} [u(x) v(y) + u(y) v(x)] \ ,$$

che per $x = y$ dà

$$\frac{f(x)^2}{(2\alpha)^2} - \frac{\varphi(x)^2}{(2\beta)^2} = u(x) v(x).$$

Si scelga poi $v(x)$ in modo che sia $v(x) u(x) = 1$: con questo $v(x)$ rimane ancora un esponenziale, avendosi anzi $v(x) = u(-x)$, giacchè

$$u(-x) = \frac{u(x) u(-x)}{u(x)} = \frac{u(0)}{u(x)} = \frac{1}{u(x)} = v(x).$$

Di più si fissino le α e β, dando ad esse successivamente le coppie di valori

$$\alpha = \frac{1}{2} \ , \beta = -\frac{i}{2} \ ; \quad \alpha = \frac{1}{2} \ , \beta = \frac{1}{2}.$$

Si dà così origine a due categorie di funzioni f e φ. Quelle della prima, che sono a dirsi *circolari*, verranno indicate rispettivamente con $c(x)$ ed $s(x)$, quelle della seconda, che sono a dirsi *iperboliche*, con $ch(x)$ ed $sh(x)$. Per le funzioni circolari valgono quindi le formule

$$c(x) = \frac{1}{2}(u(x) + u(-x))\ (1'),\ s(x) = \frac{1}{2i}(u(x) - u(-x))\ (2'),$$

$$c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y)\ (1);\ s(x+y) = s(x)c(y) + s(y)c(x)\ (2),\ s^2(x) + c^2(x) = 1(\alpha),$$

e per le iperboliche le formule analoghe $ch(x) = \dfrac{u_1(x) + u_1(-x)}{2}$ etc. etc.

Dalle (1') e (2') risulta

$$\omega(x) = i\, s(ix) = \frac{1}{2}(u(ix) - (u - ix)),\ \lambda(x) = c(ix) = \frac{1}{2}(u(ix) + u(-ix)).$$

Siccome $u(ix)$ è manifestamente un esponenziale, si trae che $\omega(x)$ e $\lambda(x)$ sono una coppia di funzioni iperboliche e di più che, nel caso di $u(x) = -u_1(ix)$, $sh(x)$ è nel campo dei numeri reali ciò che è $is(x)$ nel campo degli immaginari e reciprocamente: analogamente per $c(x)$ rispetto a $ch(x)$. Risulta quindi che per definire in tutto il campo dei numeri complessi due funzioni circolari e le corrispondenti iperboliche (nel senso che all'$u(x)$ delle prime corrisponda $-u(-ix)$ nelle seconde) basta definire ciascuna delle quattro funzioni nel campo dei numeri reali e poscia applicare convenientemente i Teor. di addizione dati sopra. Si avrà così

$$s(\mu + i\nu) = s(\mu)\, c(i\nu) + s(i\nu)\, c(\mu) = s(\mu)\, ch(\nu) - i\, sh(\nu)\, c(\mu),\ \text{etc. etc.}$$

L'esistenza di funzioni iperboliche reali risulta immediatamente dall'esistenza della a^x (esponenziale reale di variabile reale), avendosi e dovendosi avere:

$$s(x) = \frac{1}{2}(a^x - a^{-x}) \quad , \quad ch(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x}).$$

Si hanno le ordinarie funzioni senh x e cosh x per a tale che sia $\lim \dfrac{sh(x)}{x} = 1$, ossia

$$\lim_{x=0} \frac{a^x - a^{-x}}{2x} = \lim_{x=0} \frac{1}{a^x}\, \frac{a^{2x} - 1}{2x} = \lim_{z=0} \frac{a^z - 1}{z} = 1,$$

e quindi fuori del limite $\dfrac{a^z - 1}{z} = \varepsilon(z)$, con $\lim\limits_{z=0} \varepsilon(z) = 1$,

donde

$$a = \left[(1 + z\,\varepsilon(z))^{\frac{1}{z\varepsilon(z)}} \right]^{b(z)}.$$

Il secondo membro di questa ultima uguaglianza ha manifestamente per limite e, quindi

$$\operatorname{sen}h\, x = \frac{1}{2}\,(e^{x} - e^{-x}) \;, \quad \cos h\, x = \frac{1}{2}\,(e^{x} + e^{-x}).$$

Una simile analisi per le funzioni circolari ci riesce alquanto più laboriosa, quando si voglia ottenere una dimostrazione diretta dell'esistenza di tali funzioni nel campo dei numeri reali, evitando cioè la nozione di potenza ad esponente complesso, nonchè le prime nozioni sulle funzioni analitiche ed in particolare sulle serie di potenze, che sarebbe certo necessario invocare volendo far dipendere lo studio delle funzioni circolari, definite come sopra, dalla considerazione dell'esponenziale a^{ix}. Premettiamo che dalle (1) (2) (α) si deduce subito

$$s(o)=0 \quad c(o)=1 \;,\; s(-x)=-s(x) \;,\; c(-x)=c(x) \;,\; s(2x)=2\,s(x)\,c(x) \;,\; c(2x)=c^2(x)-s^2(x)$$

$$s\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\,(1 - c\,(x))} \qquad c\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\,(1 + c\,(x)} \quad (3).$$

Supponiamo che esista un valore ω di x per cui si abbia $s\,(x) = c\,(x)$, da cui

$$s\,(\omega) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad c\,(\omega) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Applicando reiteratamente le (3) si trova

$$s\,(2\omega) = 1 \;,\; s\,(4\omega) = 0 \;,\; s\,(8\omega) = 0 \ldots \quad c\,(2\omega) = 0 \;,\; c\,(4\omega) = -1 \;,\; c\,(8\omega) = 1 \ldots,$$

e da queste, coll'aiuto dei Teor. d'addizione, $s(x + 8\omega) = s(x)$, $c(x+8\omega)=c(x)$; cioè che $s(x)$ e $c(x)$ debbono essere periodiche col periodo 8ω. Ponendo poi $4\omega = p$ si ricava con tutta facilità

$$s(p-x)=s(x) \;,\; s(p+x)=-s(x) \quad c(p-x)=-c(x) \;,\; c(p+x)=-c(x),$$

$$s\left(\frac{p}{2} - x\right) = c\,(x) \quad c\left(\frac{p}{2} - x\right) = s(x).$$

Da queste e dalle precedenti formule si deduce che, per definire $s\,(x)$ e $c\,(x)$

per ogni x reale, basta definirle da o ad un valore ω che, ove esista, renda $s(x) = c(x) = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Aggiungiamo ancora che, essendo $u(x) = c(x) + i\,s(x)$, e per m intero e positivo $u(mx) = u(x)^m$, si ricava

$$c(mx)+i\,s(mx) = [c(x)+i\,s(x)]^m = c^m + \binom{m}{1} ic^{m-1} - \binom{m}{2} c^{m-2}\,s + \ldots$$

e, se $c(mx)$, $s\,mx)$, $c(x)$, $s(w)$ sono reali,

$$c(mx) = c^m - \binom{m}{2} c^{m-2}\,s^2 + \binom{m}{4} c^{m-4}\,s^4 - \ldots \quad (4),$$

$$s\,(mx) = \binom{m}{1} c^{m-1}\,s - \binom{m}{3} c^{m-3}\,s^3 + \ldots \qquad (5).$$

Se poi per due funzioni $S(x)$ e $C(x)$ valgono le relazioni

$$C(mx)+i\,S(mx) = [C(x)+i\,S(x)]^m \quad , \quad C(rx)+i\,S(rx) = [C(x)+i\,S(x)]^r ,$$

qualunque siano gli interi m ed r, moltiplicando queste uguaglianze membro a membro ed uguagliando le parti reali e le immaginarie, si deduce che per $C\,(mx + rx)$ ed $S\,(mx + rx)$ valgono i soliti Teor. di addizione.

Premesso questo passiamo a dimostrare che esistono due funzioni reali $S(x)$ e $C(x)$ aventi il valore $\frac{\sqrt{2}}{2}$ in un punto reale $\omega \neq 0$ prefissato ad arbitrio, positive da 0 a 2ω, determinate e finite per ogni valore reale di x, continue e ad un valore in tutto il loro campo di validità e sempre soddisfacenti alle solite formule d'addizione ed alla $S^2 + C^2 = 1$. Sia ω un numero reale positivo $e \neq 0$ che fissiamo ora per sempre, e poniamo $S(\omega)=C(\omega)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Per valori di $S(x)$ e $C(x)$ nel punto $\frac{\omega}{2^r}$ si prendano rispettivamente i valori aritmetici di

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - c\left(\frac{\omega}{2^{r-1}}\right)\right)} \quad e \quad \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + C\left(\frac{\omega}{2^{r-1}}\right)\right)}.$$

Dimostriamo ora che nel campo dei numeri $\frac{\omega}{2^r}$ (per $r = 0, 1, 2, \ldots, n$) la $C(x)$ è decrescente la $S(x)$ crescente, che è $\lim S\left(\frac{\omega}{2^n}\right) = 0$ e quindi $\lim\limits_{n=\infty} C\left(\frac{\omega}{2^n}\right) = 1$. Infatti, dopo aver verificato che è $C(\omega) < C\left(\frac{\omega}{2}\right)$, si supponga che sia $C\left(\frac{\omega}{2^n}\right) > C\left(\frac{\omega}{2^{n-1}}\right)$.

Allora dalla

$$C\left(\frac{\omega}{2^n}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + C\left(\frac{\omega}{2^{n-1}}\right)\right)} \quad \text{si trae} \quad C\left(\frac{\omega}{2^n}\right) < \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + C\left(\frac{\omega}{2^n}\right)\right)},$$

donde

$$C\left(\frac{\omega}{2^n}\right) > 2C^2\left(\frac{\omega}{2^n}\right) - 1.$$

Essendo poi

$$C\left(\frac{\omega}{2^{n+1}}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + C\left(\frac{\omega}{2^n}\right)\right)},$$

si deduce

$$C^2\left(\frac{\omega}{2^{n+1}}\right) > \frac{1 + 2C^2\left(\frac{\omega}{2^n}\right) - 1}{2} = C^2\left(\frac{\omega}{2^n}\right),$$

da cui, per essere le basi dei quadrati positive, $C\frac{\omega}{2^{n+1}} > C\left(\frac{\omega}{2^n}\right)$. Dalla relazione evidente $S^2 + C^2 = 1$ si ricava poi con tutta facilità $S\left(\frac{\omega}{2^n}\right) > S\left(\frac{\omega}{2^{n+1}}\right)$. Per dimostrare la seconda parte dell'enunciato si moltiplichino membro a membro le uguaglianze evidenti

$$S\left(\frac{\omega}{2^r}\right) = 2\,S\left(\frac{\omega}{2^{r+1}}\right) C\left(\frac{\omega}{2^{r+1}}\right), \quad \text{per} \quad r = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

ottenendo

$$S(\omega) = 2^n\, S\left(\frac{\omega}{2^n}\right) C\left(\frac{\omega}{2}\right) C\left(\frac{\omega}{2^r}\right) \ldots C\left(\frac{\omega}{2^n}\right),$$

da cui

$$1 = 2^{n+1}\, S\left(\frac{\omega}{2^n}\right) C(\omega)\, C\left(\frac{\omega}{2}\right) \ldots C\left(\frac{\omega}{2^n}\right),$$

$$1 > 2^{n+1}\, S\left(\frac{\omega}{2^n}\right) C^{n+1}(\omega) = \sqrt{2^{n+1}}\, S\left(\frac{\omega}{2^n}\right),$$

donde

$$0 < S\left(\frac{\omega}{2^n}\right) < \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}}, \quad \text{che dà} \quad \lim_{n=\infty} S\left(\frac{\omega}{2^n}\right) = 0.$$

Ora si definiscono $S(x)$ e $C(x)$ nei punti $\frac{m\omega}{2^n}$, con m intero fra 0 e 2^n, mediante

le uguaglianze

$$S\left(\frac{m\omega}{2^n}\right) = \binom{m}{1} C\left(\frac{\omega}{2^n}\right)^{m-1} S\left(\frac{\omega}{2^n}\right) - \binom{m}{3} C\left(\frac{\omega}{2^n}\right)^{m-3} S\left(\frac{\omega}{2^n}\right)^3 \ldots,$$

$$C\left(\frac{m\omega}{2^n}\right) = C\left(\frac{\omega}{2^n}\right)^m - \binom{m}{2} C\left(\frac{\omega}{2^n}\right)^{m-2} S\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 + \ldots.$$

Applicando poi le (4), si definiscono le $S(x)$ e $C(x)$ in tutti i punti (λ) della forma $4k\,\omega \pm \frac{m\omega}{2^n}$. In questo campo di numeri le $S(x)$ e $C(x)$ sono ad un valore: per questo basta evidentemente mostrare che, ponendo

$$S = \binom{m}{1} C\left(\frac{\omega}{2^n}\right)^{m-1} S\left(\frac{\omega}{2^n}\right) - \ldots \quad C = C\left(\frac{\omega}{2^n}\right)^m - \ldots$$

$$S_1 = \binom{2m}{1} C\left(\frac{\omega}{2^{n+1}}\right)^{2m-1} S\left(\frac{\omega}{2^{n+1}}\right) - \ldots, \quad C_1 - C\left(\frac{\omega}{2^{n+1}}\right)^{2m} \ldots,$$

si ha $S = S_1$ e $C = C_1$. Infatti è

$$C + iS = \left[C\left(\frac{\omega}{2^n}\right) + i\,S\left(\frac{\omega}{2^n}\right)\right]^m,$$

$$C_1 + i\,S_1 = \left[C\left(\frac{\omega}{2^{n+1}}\right) + i\,S\left(\frac{\omega}{2^{n+1}}\right)\right]^{2m} = \left[C\left(\frac{\omega}{2^n}\right) + i\,S\left(\frac{\omega}{2^n}\right)\right]^m:$$

da ciò, essendo S, S_1, C, C_1 reali, si trae $S = S_1$ e $C = C_1$. Per le $S(x)$ e $C(x)$ valgono le (1) e (2)..., giacchè per 2 punti $\frac{m\omega}{2^n}$ $\frac{m'\omega}{2^{n'}}$, basta ridurre queste due frazioni allo stesso denominatore, poniamo 2^n, porre $\frac{\omega}{2^n} = x$ e ripetere quando si è detto dopo le (5): coll'aiuto poi delle (4) si stabilisce che le (1) (2)... valgono per tutti i punti (λ). Di più si ha

$$C^2\left(\frac{m\omega}{2^n}\right) + S^2\left(\frac{m\omega}{2^n}\right) = C\left(\frac{m\omega}{2^n} - \frac{m\omega}{2^n}\right) = C(0),$$

che, è superfluo il dirlo, supponiamo $= 1$. Ora passiamo a rilevare che le $S(x)$ e $C(x)$ nei punti $\frac{m\omega}{2^n}$ fra 0 ed ω, sono positive, che $S(x)$ è crescente e $C(x)$ decrescente, che se α ed α' sono due numeri $\frac{m\omega}{2^n}$, la cui differenza sia piccolissima, tali sono anche le differenze $|s(\alpha) - s(\alpha')|$ e $|c(\alpha) - c(\alpha')|$. A tal uopo in-

dichiamo con m un intero fra 0 e 2^n e poniamo che per ogni intero positivo $r \leq m$ si abbia

$$S\left(\frac{r\omega}{2^n}\right) > 0\ ,\ C\left(\frac{r\omega}{2^n}\right) > 0\ ,\ S\left(\frac{r\omega}{2^n}\right) > S\left(\frac{(r-1)\omega}{2^n}\right)\ ,\ C\left(\frac{r\omega}{2^n}\right) < C\left(\frac{(r-1)\omega}{2^n}\right):$$

allora, se $m+1 \leq 2^n$, le stesse disuguaglianze debbono valere per $r = m+1$. Sia r la minima potenza di 2 che supera $m+1$: si avrà $m+1=2^r-k$, con $0<k<2^{r-1}$ e $k \leq m$. Sarà

$$C\left(\frac{(m+1)\omega}{2^n}\right) = C\left(\frac{\omega}{2^{n-r}}\right) C\left(\frac{k\omega}{2^n}\right) + S\left(\frac{\omega}{2^{n-r}}\right) S\left(\frac{k\omega}{2^n}\right);$$

il che mostra essere $C\left(\frac{(m+1)\omega}{2^n}\right) > 0$, per essere somma di due prodotti con fattori positivi. Analogamente, ponendo $m+1 = 2r+h$ con $0 < 2^r$ e $h \leq m$, si trova $S\left(\frac{(m+1)\omega}{2^n}\right) > 0$. Di più si ha

$$C\left(\frac{(m+1)\omega}{2^n}\right) - C\left(\frac{m\omega}{2^n}\right) = C\left(\frac{m\omega}{2^n}\right)\left[C\left(\frac{\omega}{2^n}\right)-1\right] - S\left(\frac{m\omega}{2^n}\right) S\left(\frac{\omega}{2^n}\right)$$

quantità manifestamente negativa. Coll'aiuto di questa uguaglianza e della $C^2\left(\frac{r\omega}{2^n}\right) + S^2\left(\frac{r\omega}{2^n}\right) = 1$ per $r = m\ ,\ m+1$, si ricava pure $S\left(\frac{(m+1)\omega}{2^n}\right) > S\left(\frac{m\omega}{2^n}\right)$.

Finalmente, per l'ultima parte dell'enunciato si supponga $\alpha - \alpha' < \frac{1}{2^\lambda}$, con λ int. posit. grande a piacere ed $\alpha' = \frac{m\omega}{2^n} = \frac{2^{\lambda-n}m\omega}{2^\lambda} = \frac{k\omega}{3^\lambda}$. Si avrà

$$|C(\alpha) - C(\alpha')| = \left(\frac{k\omega}{2^\lambda}\right) - C\left(\frac{(k+1)\omega}{2^\lambda}\right) - C\left(\frac{k\omega}{2^\lambda}\right)\left[1 - C\left(\frac{\omega}{2^\lambda}\right)\right] + S\left(\frac{k\omega}{2^\lambda}\right) S\left(\frac{\tilde{\omega}}{2^\lambda}\right).$$

Essendo $C\left(\frac{k\omega}{2^\lambda}\right) < 1$, $S\left(\frac{k\omega}{2^\lambda}\right) < 1$ e, per λ abbastanza grande,

$$1 - C\left(\frac{\omega}{2^\lambda}\right) < \frac{\varepsilon}{2}\quad ,\quad S\left(\frac{\omega}{2^\lambda}\right) < \frac{\varepsilon}{2},$$

con ε piccolo a piacere, si ricava $|c(\alpha) - c(\alpha')| < \varepsilon$. In modo analogo, o meglio per mezzo della $C^2 + S^2 = 1$ si dimostra che $|s(\alpha) - s(\alpha')| < \varepsilon'$. Ora si può passare a definire $S(x)$ e $C(x)$ in qualunque punto reale o, ciò che basta, in ogni punto α fra 0 ed ω. Si formino due classi M ed N, ponendo in M tutti i valori

di $S(x)$ nei punti $\frac{m\omega}{2^n}$ fra 0 ed α, ed in N tutti quelli nei punti $\frac{m\omega}{2^n}$ fra α ed ω Da quanto si è detto risulta molto facilmente che M ed N sono contigue e quindi che definiscono un numero da assumersi come valore di $S(\alpha)$. Analogamente per definire $C(\alpha)$. Le $S(x)$ e $C(x)$ così definite sono evidentemente continue e rispettivamente crescenti e decrescenti da 0 ad ω e quindi da $+$ a $-\infty$ ed inoltre soddisfano sempre alle (1) (2) ..., potendosi porre $S(x) = S\left(\frac{m\omega}{2^n}\right) + \varepsilon$ con ε piccolo a piacere etc. etc. (¹). Passiamo ora a dimostrare che qualunque sia ω il $\lim\limits_{x=0} \frac{S(x)}{x}$ esiste finito e determinato. Avendosi

$$S\left(\frac{\omega}{2^n}\right) = 2S\left(\frac{\omega}{2^{n+1}}\right) C\left(\frac{\omega}{2^{n+1}}\right) < 2\, S\left(\frac{\omega}{2^{n+1}}\right)$$

si ricava

$$S\left(\frac{\omega}{2^n}\right) : \frac{\omega}{2^n} < S\left(\frac{\omega}{2^{n+1}}\right) : \frac{\omega}{2^{n+1}} :$$

questo mostra che, quando x tende a zero per valori della forma $\frac{\omega}{2^n}$, $\frac{S(x)}{x}$ tende ad un limite determinato, che non può essere ∞, perchè, detta δ la differenza dei due membri della precedente disuguaglianza si ha subito

$$\delta = \frac{2^n}{\omega}\left[2S\left(\frac{\omega}{2^{n+1}}\right) - S\left(\frac{\omega}{2^n}\right)\right] = \frac{2^{n+1}}{\omega} S\left(1 - C\left(\frac{\omega}{2^{n+1}}\right)\right) =$$

$$= \frac{2^{n+2}}{\omega} S\left(\frac{\omega}{2^{n+1}}\right) S^2\left(\frac{\omega}{2^n}\right) < \frac{2^{n+2}}{\omega} S\left(\frac{\omega}{2^{n+1}}\right) = \frac{2}{\omega} S\left(\frac{\omega}{2^{n+1}}\right) \text{ cioè } \lim_{n=\infty} \delta = 0.$$

Dinotando con l il limite di $S\left(\frac{\omega}{2^n}\right) : \frac{\omega}{2^n}$ ed avendosi

$$y = S\left(\frac{m\omega}{2^n}\right) : \frac{m\omega}{2^n} = C^{m+1}\left(\frac{\omega}{2^n}\right) \cdot \frac{S\left(\frac{\omega}{2^n}\right)}{\frac{\omega}{2^n}} - \frac{(m-1)(m-2)}{2} C^{m-3}\left(\frac{\omega}{2^n}\right) \frac{S^3\left(\frac{\omega}{2^n}\right)}{\frac{\omega}{2^n}} + , \ldots ,$$

(¹) Del resto è ben noto che una funzione $f(x)$ (reale di variabile reale), definita in un assieme G di numeri uniformemente condensato e continua in tale campo, resta determinata come funzione continua in tutto il campo dei numeri reali.

Si può poi aggiungere che se la $f(x)$ nell'assieme G soddisfa ad una legge formale espressa da

$$F(x_1\, x_2 \ldots x_n\, f(x_1)\, f(x_2) \ldots f(x_n)\; f(\varphi_r(x_1\, x_2 \ldots x_n) = 0,$$

essendo F e φ_r simboli di funzioni continue, la $f(x)$ soddisfa evidentemente a questa legge in tutto il campo dei numeri reali.

si trae

$$\left| y - C^{m-1}\left(\frac{\omega}{2^n}\right) \frac{S\left(\frac{\omega}{2^n}\right)}{\frac{\omega}{2^n}} \right| < m^2 \left(\frac{\omega}{2^n}\right)^2 \cdot \left[\frac{S\left(\frac{\omega}{2^n}\right)}{\frac{\omega}{2^n}} \right]^3 + m^4 \left(\frac{\omega}{2^n}\right)^4 \cdot \left[\frac{S\left(\frac{\omega}{2^n}\right)}{\frac{\omega}{2^n}} \right]^5 + \ldots,$$

per essere

$$\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-r+1)}{\lfloor r} < m^{r-1} \quad \text{e} \quad c\left(\frac{\omega}{2^n}\right) < 1.$$

Avendosi poi $\frac{m\omega}{2^n} < \varepsilon$ piccolo a piacere ed $\left| \frac{S\left(\frac{\omega}{2^n}\right)}{\frac{\omega}{2^n}} \right| \leq l$, si ha

$$\left| y - C^{m-1}\left(\frac{\omega}{2^n}\right) \frac{S\left(\frac{\omega}{2^n}\right)}{\frac{\omega}{2^n}} \right| < \varepsilon^2 l^3 (1 + l\varepsilon + (l\varepsilon)^2 + \ldots) \leq \frac{\varepsilon^2 l^3}{1 - \varepsilon l}.$$

Questo mostra che $\lim y = l$. Indichi finalmente x un numero qualunque ed α e α' due numeri della forma $\frac{m\omega}{2^n}$. È chiaro che per ogni x si possono scegliere α ed α' in modo che sia $\alpha < x < \alpha'$, $\left| \frac{\alpha}{\alpha'} \right| = 1 - \varepsilon$, $\left| \frac{\alpha'}{\alpha} \right| = 1 + \varepsilon'$, con ε ed ε' piccoli a piacere. Si avrà

$$s(\alpha) < s(x) < s(\alpha') \ , \ \frac{\alpha}{\alpha'} \frac{s(\alpha)}{\alpha} < \frac{s(x)}{x} < \frac{s(\alpha')}{\alpha'} \frac{\alpha'}{\alpha} :$$

al tendere di x comunque a zero $\frac{\alpha}{\alpha'}$ ed $\frac{\alpha'}{\alpha}$ si possono far tendere ad 1; allora $\frac{s(\alpha)}{\alpha}$ ed $\frac{s(\alpha')}{\alpha'}$ tendono ad l e quindi anche $\frac{s(x)}{x}$ tende ad l. Il limite l si può calcolare coll'approssimazione che si vuole mediante le espressioni

$$\frac{1}{\omega} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\omega} \lambda_1 \ , \ \frac{2}{\omega} \sqrt{\frac{1-\lambda_1}{2}} \ , \ldots , \ \frac{2^n}{\omega} \sqrt{\frac{1-\lambda_n}{2}}, \text{ ove } \lambda_\nu = \sqrt{\frac{1+\lambda_{\nu-1}}{2}}.$$

Se poi si vuole che sia $l = 1$, nel qual caso $S(x) = \operatorname{sen} x$ e $C(x) = \cos x$, dovrà essere ω uguale al limite della successione

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \ , \ 2\sqrt{\frac{1-\lambda_1}{2}} \ , \ldots , \ 2^r \sqrt{\frac{1-\lambda_r}{2}} \ , \ldots \qquad (6)$$

[Il quadruplo di questo limite è π. Difatti se y è la metà di una corda presa su di un cerchio di raggio 1, la metà della corda sottesa dall'arco metà è $\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{2}}$. Allora partendo dalla metà del lato del quadrato iscritto, ossia da $\lambda_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, si trova che la metà del lato del 2^{n+2}-latero regolare iscritto è $\sqrt{\frac{1-\lambda_n}{2}} = p_n$, giacchè, supposto che sia

$$p_{n-1} = \sqrt{\frac{1-\lambda_{n-1}}{2}}\ , \text{ si ha } \quad p_n = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-p^2_{n-1}}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\lambda_n}{2}}.$$

Dunque la successione $\rho_0\ 2p_1\ ,\ 2^2 p_2\ ,\ 2^3 p_3 \ldots$, che per def. della Geom. Elem. ha per limite $\frac{\pi}{4}$, coincide colla successione (6)]. Si conclude ora che tutte le $S(x)$ e $C(x)$, ottenibili per diversi valori di ω, sono della forma sen kx e cos kx con $k = \frac{\pi}{4\omega}$. Anzi ora è facile dimostrare che due $s(x)$ e $c(x)$ (definite come in principio) nel campo dei numeri reali debbono essere di tale forma. Difatti la $s(x)$ in x_0 abbia il valore $s(x_0)$, che possiamo supporre numericamente minore di uno, essendo la $s(x)$ continua ed $s(0) = 0$: si potrà sempre trovare un numero k tale che sia sen $kx_0 = s(x_0)$. Allora, come risulta dall'applicazione delle solite leggi formali, la $s(x)$ e sen kx riescono coincidenti nei punti λx_0, con λ razionale; e siccome questi punti costituiscono un assieme uniformemente condensato da $+$ a $-\infty$ e le $s(x)$ e sen kx sono continue, risulta che esse coincidono per ogni x. Similmente per $c(x)$, come si può mostrare in modo analogo, oppure coll'aiuto della $c^2 + s^2 = 1$.

Passiamo ora a definire l'esponenziale a^{ix} per valori reali di x. Dalla $e^x = \cosh x + \operatorname{senh} x$, ponendo $2x$ per x, si ha $e^{2x} = \cosh ix + i(-i \operatorname{senh} ix) = c(x) + i\, s(x)$, essendo $c(x)$ e $s(x)$ una coppia di funzioni circolari corrispondenti nel senso definito in principio. Se $c(x)$ ed $s(x)$ debbono esser reali, allora si è provato che deve essere $c(x) = \cos kx$, $s(x) = \operatorname{sen} kx$, con k costante, ed in tal caso si dovrebbe porre per definizione $e^{ix} = \cos kx + i \operatorname{sen} kx$, con k costante da determinarsi. Ma ammettendo la eventuale esistenza di coppie di funzioni $c(x)$ ed $s(x)$, che siano complesse per valori reali della variabile, potrebbe nascere il sospetto dell'esistenza di esponenziali, che nel campo dei numeri immaginari non fosse della forma

$$\cos[k(-ix)] + i \operatorname{sen}[k(-ix)].$$

Questo dubbio viene tolto nel seguente modo. Si ponga

$$s(x) = T(x) + iV(x)\ ,\ c(x) = t(x) + iv(x)\ ,$$

donde

$$e^{ix} = c(x) + iv(x) = (t - V) + i(v + T) = A + iB,$$

essendo T, V, t, v, A, B funzioni reali di variabile reale. Dalla $e^{ix} = A + iB$ si ricava subito, nel modo solito, che A e B soddisfano alle leggi formali (ε)

$$A(x+y) = A(x)A(y) - B(x)B(y) \quad , \quad B(x+y) = A(x)B(y) + A(y)B(x),$$

e che per $x=0$ è $A=1$ e $B=0$; che $A-iB$ è ancora un esponenziale e quindi che

$$(A + iB)(A - iB) = A^2 + B^2$$

è un esponenziale a^x reale e di variabile reale. Allora si ricava $B = \pm\sqrt{a^x - A}$ e quindi

$$A(x + y) = A(x)A(y) - \sqrt{(a^x - A^2(x)) - x(a^y - A^2(y))}$$

Ma dalla (ε), ponendo $y = -x$, si deduce

$$A(-x) = \frac{A(x)}{a^x} \qquad B(-x) = -\frac{B(x)}{a^x}:$$

allora l'eguaglianza precedente per $y = -x$ diventa

$$1 = \frac{A^2}{a^x} \pm \frac{1}{a^x}(a^x - A^2),$$

che è soddisfatta, senza portare un evidente assurdo, soltanto per $a = 1$, ossia per $A^2 + B^2 = 1$. Ma allora le funzioni reali di variabile reale $A(x)$ e $B(x)$ soddisfano alle tre leggi fondamentali, che permettono di concludere che $A(x) = \cos kx$ e $B(x) = \operatorname{sen} kx$. Si conclude che $e^{ix} = \cos kx + i \operatorname{sen} kx$, e che non esistono funzioni $c(x)$ ed $s(x)$ che siano complesse per x reale, giacchè calcolando T, t, V, v in funzione di A e B, si troverebbe con tutta facilità

$$s(x) = \frac{B(1 + A^2 + B^2)}{2(A^2 + B^2)} + i\,\frac{A(1 - (A^2 + B^2))}{2(A^2 + B^2)} = B$$

e similmente $c(x) = A$. Si è dunque portati ad ammettere l'identità

$$e^{ix} = \cos kx + i \operatorname{sen} kx.$$

Se poi z è una variabile complessa $= u + iv$ si porrà

$$e^z = e^{\mu+i\nu} = e^{\mu} e^{i\nu} = (\cosh \mu + \operatorname{senh} \mu)(\cos k\nu + i \operatorname{sen} k\nu).$$

La e^z in tutto il campo dei numeri complessi sarà un esponenziale nel senso dichiarato in principio. Difatti essa soddisfa alla legge iterativa, perchè

$$e^{\mu+i\nu} e^{\mu'+i\nu'} = e^{\mu} e^{i\nu} e^{\mu'} e^{i\nu'} = e^{\mu+\mu'} e^{i(\nu+\nu')} = e^{(\mu+\mu')+i(\nu+\nu')} = e^{(\mu+i\nu)+(\mu'+i\nu')},$$

ed è continua, perchè lo sono le funzioni reali $\cosh \mu$, $\operatorname{senh} \mu$, $\cos k\nu$, $\operatorname{sen} k\nu$. Si conclude da questo che la continuità e l'uniformità non sono condizioni sufficienti per affermare che in tutto il campo dei numeri complessi una funzione iterativa sia della forma e^{jx}, con e^{ix} definito dall' identità di Eulero $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$, mentre lo sono quanto si restringa la variabile al campo dei numeri reali; e ciò contrariamente a quando avviene per le funzioni distributive, per le quali, come è noto, basta l'uniformità e la continuità per ridurle alla forma kx in tutte il campo dei numeri complessi. (Si vegga la Nota sulle funzioni distributive nella recente Opera dei prof.ri Pincherle e Amaldi «sulle Operazioni distributive»).

Consideriamo ora il $\lim\limits_{z=0} \dfrac{e^z - 1}{z}$, o, ciò che manifestamente è lo stesso, $\lim \xi = \lim \dfrac{e^{z(\lambda - i\mu)} 1}{2(\lambda + i\mu)}$ al tendere di λ e μ a zero. Si avrà

$$\lim \xi = \lim e^{\lambda+i\mu} \frac{e^{\lambda+i\mu} - e^{-(\lambda+i\mu)}}{2(\lambda + i\mu)} = \lim \frac{e^{\lambda} e^{i\mu} - e^{-\lambda} e^{-i\mu}}{2(\lambda + i\mu)} = \lim \frac{\operatorname{senh}\lambda \cos k\mu + i \cosh\lambda \operatorname{sen} k\mu}{\lambda + i\mu}.$$

Ora si ha

$$\lim \frac{\operatorname{sen} k\mu}{\mu} \cos \lambda = k$$

e fuori dal limite $\operatorname{sen} k\mu \cos \lambda = k\mu + \mu\varepsilon$ e similmente $\operatorname{sen} \lambda \cos k\mu = \lambda + \lambda\varepsilon'$, essendo ε ed ε' due numeri che tendono a zero assieme a λ e μ. Risulta:

$$\lim \xi = \lim \frac{\lambda + \lambda\varepsilon' + i(k\mu + \mu\varepsilon')}{\lambda + i\mu} = \lim \frac{\lambda + k\mu i}{\lambda + i\mu} + \lim \frac{\lambda\varepsilon' + i\mu\varepsilon}{\lambda + i\mu}.$$

Ora si supponga $k = 1$; si avrà

$$\lim \xi = 1 + \lim \frac{\lambda\varepsilon + i\mu\varepsilon}{\lambda + \varepsilon\mu} = 1.$$

Se poi è $k \neq 1$, non può essere $\lim \xi = 1$, giacchè si ha

$$\lim \frac{\lambda + i k\mu}{\lambda + i\mu} = 1 + \lim \frac{i(k-1)}{\dfrac{\lambda}{\mu} - 1},$$

che varia al varlare di $\lim \frac{\lambda}{\mu}$ e che non ha limile quando non l'ha questo rapporto. Se dunque si vuole che e^z sia funzione uniforme, finita in tutto il campo dei numeri complessi, che goda della proprietà iterativa e che sia $\lim \frac{e^z-1}{z} = 1$ si deve porre $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$. Finiamo osservando che tenendo la via da noi seguita nel definire a^z, vien messo in tutta evidenza il carattere convenzionale dell'identità $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$.

Ciò non apparisce a prima vista, quando nel modo solito si definisce la e^z mediante la serie esponenziale. Questo avviene perchè una serie di potenze, quando definisce una funzione, essa non può essere che analitica. Ora il porre $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$ allo scopo che si abbia $\lim \frac{e^z - 1}{z} = 1$, equivale appunto ad esigere che la e^z sia funzione analitica, cioè che si abbia $\lim_{z=0} \frac{e^{z'+z} - e^{z'}}{z} = e^z \lim \frac{e^z - 1}{z}$, determinato ed indipendente dal modo in cui z tende a zero.

Iglesias, 31 Marzo 1902.

SULLE VARIETÀ DEL QUARTO ORDINE CON PIANO DOPPIO

DELLO SPAZIO A QUATTRO DIMENSIONI

NOTA

DEL

Dott. GIUSEPPE MARLETTA.

(*Contin.*, *Vol.* XL, *pag.* 265-274)

II.

Rappresentazione spaziale della varietà Γ.

14. Teniamoci per ora nel caso più generale di una varietà Γ d'ordine n con un piano π multiplo secondo $n-2$; sulla quale (n. 12) esiste una curva c d'ordine r con $r-1$ punti in π.

Un iperpiano Σ passante per π seca c in un sol punto variabile, dal quale proiettando la conica secondo cui π è secato dalla quadrica ulteriore intersezione di Γ con Σ, si ottiene un cono quadrico. Al variare di Σ questo cono genera una varietà rigata Π. Per aver l'ordine di questa, osserviamo che per un punto A di π passano le $n-2$ generatrici di essa, congiungenti A con gli $n-2$ punti di c fuori da π, dove questa curva è secata dagli $n-2$ iperpiani tangenti a Γ in A.

Inoltre, anche le $r-1$ rette che uniscono questo punto con gli $r-1$ punti di c che stanno in π, sono generatrici di Π: dunque *la multiplicità di* π *per* Π *è* $(n-2)+(r-1)=n+r-3$; per conseguenza l'ordine in quistione è

$$(n+r-3)+2=n+r-1.$$

Evidentemente, poi, *la curva* c *è doppia per* Π.

Le due varietà Γ e Π, che si toccano lungo π, si taglieranno, a prescindere da questo piano, *lungo una superficie* φ *d'ordine*

$$n(n+r-1)-[(n-2)(n+r-3)+(n-2)]=3n+2r-4,$$

contenente la curva c *come doppia.*

Un iperpiano Σ per π seca la superficie φ, fuori da questo piano nelle due sole rette comuni alla quadrica e al cono (ulteriori intersezioni di Σ rispettivamente con le varietà Γ e Π): ne segue, che la superficie φ è secata da π lungo *una curva d'ordine* $3n+2r-6$. Inoltre, poichè questa curva è iperellittica, e sono in tutto (n° 7 bis) $4n-6$ i punti doppi della sua involuzione quadratica, essa è del genere $p=2n-4$.

È poi evidente, che questa superficie φ si può considerare come il luogo delle coppie di rette di Γ incidenti π e secantisi sopra la curva c.

15. La semplice infinità dei piani delle coppie di generatrici coniugate sulla rigata iperellittica φ, costituiscono una varietà Ξ di cui vogliamo trovare l'ordine. Cerchiamo primieramente il numero di essi piani, che passano per un punto arbitrario M di π. Perciò, nel fascio di raggi di π avente M per centro, s'istituisce una corrispondenza di Chasles; chiamando corrispondenti due raggi, ogni qualvolta proiettano due punti coniugati della curva iperellittica $\varphi\pi$.

Di questa corrispondenza gl'indici sono eguali entrambi a $3n + 2r - 6$, e quindi le coincidenze saranno $2(3n + 2r - 6)$: dalle quali togliendo le $4n - 6$ coincidenze dovute ai coni quadrici in iperpiani passanti per π, e le $2(r - 1)$ coincidenze dovute agli $r-1$ punti in cui la c è secata da π, rimangono $2(n+r-2)$ coincidenze; e però concludiamo, che le rette congiungenti due punti coniugati della curva $\varphi\pi$, e passanti per M sono in numero di $n+r-2$ [1]. Ne segue, che *la multiplicità del piano* π *per la varietà* Ξ *è* $n+r-2$; e che per conseguenza *questa varietà è d'ordine* $n + r - 1$.

La totale intersezione di Ξ con Γ, a prescindere da π, è la superficie φ.

16. Consideriamo ora in particolare il caso di $n = 4$.

Un iperpiano Ω' non passante per π, sechi questo piano lungo una retta t', la φ in una curva f', e le varietà Ξ e Π rispettivamente nelle superficie ξ' e π'. Se ora noi ci serviamo del metodo esposto nel n° 11, per mettere in corrispondenza biunivoca la data varietà Γ con l'iperpiano Ω', prendendo come *direttrice* una retta c e di Γ, non incidente π, possiamo subito affermare che l'*immagine* di questo piano in Ω' è la superficie π'. La curva f' è (n° 14) del decimo ordine, si appoggia in otto punti alla retta t', ed ha il punto $O' \equiv c\,\Omega'$ come doppio.

Le rette di Γ incidenti π e che si appoggiano alla c, riferiscono la curva f' e questa retta, in modo che ad un punto di c corrispondono due punti di f'; mentre ad un punto di f' corrisponde un sol punto di c. Osservando inoltre che i punti di *diramazione* sulla retta c sono dieci, indicando con p il genere della curva f' ed applicando una nota formola di Zeuthen, si ha $p = 4$.

16*bis*. Nel caso generale di una varietà d'ordine n con un piano $(n-2)$plo, si ha $p = 2n - 4$. Come del resto doveva essere, giacchè la rigata φ è (n. 14) di tal genere.

17. Per un punto qualunque di π passano due rette le quali si appoggiano alla c, e sono situate nei due iperpiani tangenti a Γ. Ne segue che le *due im-*

---

[1] Altrimenti vedi Segre. « Intorno alla geometria sopra una rigata algebrica Rend. d. R. Acc. dei Lincei, IV, 3, 1887₂.

magini di quel punto *saranno allineate* col punto O'. Ma questo punto è doppio per π', che è una superficie del quarto ordine: quindi concludiamo che una retta qualunque di Ω' uscente da O' seca ulteriormente π' in due punti, che sono immagini di uno stesso punto di π.

Se rammentiamo (¹) che, data una superficie del quarto ordine con una retta doppia, esistono otto piani passanti per questa che secano ulteriormente la superficie in una coppia di rette: e che, se la superficie ha un punto doppio, *due* di questi piani vengono assorbiti da quello determinato dal punto doppio e dalla retta doppia: ritroviamo (n° 7) che nella semplice infinità di coniche determinate in π dalle quadriche ulteriori intersezioni di Γ con iperpiani per esso, ve ne sono *sei* spezzate in due rette.

18. Nella corrispondenza birazionale fra i punti di Γ e di Ω', gli *elementi fondamentali* di Ω' sono la retta t', la curva f' e il punto O'. Ad un punto D' di t', considerato come appartenente ad Ω', corrisponde in Γ la cubica (piana) ulteriore intersezione di questa varietà col piano D'c. Al *punto fondamentale* O', considerato in Ω', corrispondono in Γ tutti i punti della quadrica situata nell'iperpiano O'π.

Infine ad un punto E' di f', considerato anch'esso come appartenente ad Ω', corrispondono *tutti* i punti della retta di Γ incidente π, che passa per E', (e che si appoggia alla retta c).

Gli *elementi fondamentali* della varietà Γ sono: il piano π, la retta c, e la conica giacente nel piano O' t', conica che chiameremo e.

Ad un punto A di π corrispondono i due punti, tracce in Ω' delle congiungenti A coi punti in cui la c è secata dai due iperpiani tangenti a Γ in A. Ad un punto B di c corrisponde la traccia in Ω' del piano tangente in B alla quadrica ulteriore intersezione di Γ coll'iperpiano Bπ. Infine ad un punto C di e, considerato come appartenente a Γ, corrispondono in Ω' *tutti* i punti della retta O' c.

19. Sia k una curva di Γ, d'ordine m, ed avente a punti in π, b punti in c, e t in e.

Un iperpiano variabile Σ passante per π seca ulteriormente k in $m-a$ punti, che chiameremo corrispondenti del punto Σc. La rigata ψ, generata dalle congiungenti due punti corrispondenti, è d'ordine $2m-a-b$, ha la retta c come direttrice multipla secondo $m-a$, ed è secata da π lungo una curva d'ordine $m-b$. Ne segue che l'immagine k' di k in Ω' è una curva d'ordine $2m-a-b-t$, che ha $m-b-t$ punti sulla retta t', si appoggia in $4m-3a-2b$ punti alla f', e che infine contiene il punto O' come multiplo secondo il numero $m-a-t$. *Viceversa* è facile dimostrare che in Ω' una curva definita come k' è *immagine* di una curva di Γ definita come k.

(¹) Vedi, p. es., Salmon. « Traité de Géométrie Analytique » III partie (par O. Chemin) §§ 555, 557.

20. Pongasi in particolare $a=m-1$, e $t=0$. Si ha: *ordine di* $k'=m+1-b$; *numero di punti di* k' *in* $t'=m-b$; *numero di punti in* $f'=3+m-2b$; *multiplicità di* $O'=1$.

Quindi abbiamo che la curva razionale k' soddisfa a $2+(m-b)+(m+3-2b)= = 2m-3b+5$ condizioni; e per conseguenza le curve (razionali) della nostra varietà Γ, d'ordine m con $m-1$ punti in π (e nessun punto in e), sono in numero $4(m+1-b)-(2m-3b+5)=2m-b-1$ volte infinito.

Ciò d'accordo col fatto che le curve m del n° 12 sono in numero

$$(4x+4y+4z-6)-(n+2x+2y+2z-5)=2(x+y+z-2)+3-n$$

volte infinito; e che, nell'ipotesi $x+y+z-2=m$, $n=4$, e $b=0$, questo numero è precisamente $2m-1$. Si può osservare che, affinchè esistano in Γ curve d'ordine m aventi $m-1$ punti in π, deve essere $2m \geq n-3$, se Γ si suppone d'ordine n, con π in qualità di piano $(n-2)$plo. Facendo $b=0$, $n=4$, e successivamente $m=1, 2, 3$, si hanno i risultati seguenti:

1) Una retta di Γ che non incontra π, nè c, nè e, ha per immagine una conica passante per il punto O', la quale si appoggia in un punto alla retta t', e in quattro punti alla curva f': e viceversa.

2) Una conica di Γ avente un punto in π, e che non incontri nè c, nè la conica e, ha per immagine una cubica gobba, che passa semplicemente per O', si appoggia in due punti alla t' e in cinque punti alla f': e viceversa.

3) Una cubica gobba di Γ, avente due punti in π e nessun punto in c o in e, ha per immagine una quartica (di seconda specie), che passa semplicemente per O', si appoggia in tre punti alla t', e in sei punti alla f': e viceversa.

21. Sia data ora in Ω' una curva k' d'ordine s, che abbia a' punti comuni colla retta t', b' con la curva f' (fuori da t'); e che inoltre abbia il punto O' per multiplo secondo il numero q.

Ripetendo le considerazioni analoghe a quelle, che si fecero al n.° 19, possiamo concludere che k' è l'immagine di una curva k di Γ d'ordine $m=5s-3a'-b'-2q$, avente $b=4s-3a'-b'-q$ punti sulla retta c, secata in $a=4s-2a'-b'-2q$ punti dal piano π; e che infine ha $t=s-a'-q$ punti in comune con la conica fondamentale e. È facile vedere che, viceversa, una curva di Γ definita come la k, ha per immagine nello spazio Ω' una curva definita come la k'.

21 *bis*. Nel caso generale di una varietà Γ d'ordine n con un piano π $n-2)plo$, se indichiamo con c una *curva direttrice* della varietà, cioè una curva (razionale) d'ordine r, con $r-1$ punti in π, i due sistemi di relazioni che, data la curva k' di Ω', ci danno i *numeri caratteristici* della corrispondente curva k di Γ; e che, viceversa, data questa ci danno i *numeri caratteristici* della (corrispondente k' di Ω', sono i seguenti:

$$(1)\qquad \begin{cases} m=(n+r)(s-a')+2a'-b'-2\Sigma q_i \\ a=(n+r-1)(s-a')+2a'-b'-2\Sigma q_i \\ b=s(n+r-1)-a'(n+r-2)-b'-\Sigma q_i \\ t_i=s-a'-q_i \qquad (i=1, 2, \dots, r) \end{cases}$$

e

$$
(2)\qquad \begin{cases} s = r(m-a) + m - b \mid \Sigma t_i \\ a' = r(m-a) + a - b - \Sigma t_i \\ b' = (r+n)(m-a) - m - 2(b'-a) \\ q_i = m - a - t_i \qquad\qquad (i = 1, 2, \dots, r). \end{cases}
$$

Dove la lettera t_i $(i = 1, 2, \dots, r)$ sta per indicare il numero dei punti, che la curva k ha in comune con la conica e_i $(i = 1, 2, \dots, r)$; e q_i rappresenta la moltiplicità della curva k' nel punto O'_i $(i = 1, 2, \dots, r)$.

22. Alle *sezioni piane* d di Γ corrispondono in Ω' *sestiche* d' del genere $p=2$, con *quattro* punti sulla retta t', aventi il punto O' come *doppio*, e che si appoggiano in altri *dieci* punti alla curva fondamentale f'. Abbiamo così diciotto condizioni per le [1] ∞^{24} sestiche di genere $p = 2$ in Ω', d'accordo col fatto che i piani di S_4 sono ∞^6.

Ad una generatrice qualunque della quadrica, che Γ ha in un iperpiano arbitrario Σ passante per π, corrisponde nello spazio Ω' una retta, che si appoggia in un punto alla t', ed in un punto anche alla f'. Questo è uno dei due punti, dove questa curva è incontrata, fuori dalla t', dal piano $\Sigma\Omega'$.

Ad una retta generica g' di Ω' corrisponde in Γ una curva del quinto ordine (appartenente allo spazio ordinario), che ha quattro punti (allineati) in π, altri quattro sulla retta fondamentale c, ed uno sulla conica e.

23. Analogamente a quanto si fece nei numeri 19 e 21 per le *curve*, possiamo dimostrare che, data una varietà Γ d'ordine n con un piano π multiplo secondo $n-2$, se indichiamo con ρ l'ordine d'una sua superficie avente in π per traccia una curva d'ordine α_1, e che abbia inoltre la curva direttrice c multipla secondo β_1, e la conica e_i $(i = 1, 2, \dots, r)$ multipla secondo τ_i; e se indichiamo con σ l'ordine della superficie ad essa corrispondente in Ω'; superficie per cui la retta t' è multipla secondo α, la curva f' è multipla secondo β, ed il punto O'_i $(i = 1, 2, \dots, r)$ è γ_i-*plo*, si hanno i seguenti due sistemi di relazioni:

$$
(1)\qquad \begin{cases} \rho = (n+2r)\sigma - (n+2r-2)\alpha - (3n+2r-4)\beta - 2\Sigma\gamma_i \\ \alpha_1 = (n+2r-2)\sigma - (n+2r-4)\alpha - (3n+2r-6)\beta - 2\Sigma\gamma_i \\ \beta_1 = \sigma - \alpha - 2\beta \\ \tau_i = \sigma - \alpha - \gamma_i \qquad\qquad (i = 1, 2, \dots, r) \end{cases}
$$

---

[1] Segre — " Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algebriques ". Math. Annalen, Bd. XXX, 1887.

e

$$
(2)\qquad \begin{cases}
4\sigma = (n+2r+2)\rho - (2r+n)\alpha_1 - (4r+4n-4)\beta_1 - 4\Sigma\tau_i \\
4\alpha = (n+2r-2)\rho - (n+2r-4)\alpha_1 - (4r+4n-8)\beta_1 - 4\Sigma\tau_i \\
2\beta = \rho - \alpha_1 - 2\beta_1 \\
\gamma_i = \rho - \alpha_1 - \beta_1 - \tau_i \qquad\qquad (i = 1, 2, \dots, r).
\end{cases}
$$

24. Da queste relazioni deduciamo per $n = 4$, ed $r = 1$, che ad una sezione iperplanare ε della varietà quartica Γ, corrisponde nello spazio Ω' una superficie ε' del *quinto ordine,* che ha la retta t' come tripla, il punto O' come doppio, e passa semplicemente per la curva f'.

Ad un piano generico di Ω' corrisponde in Γ una superficie del *sesto ordine,* secata da π lungo una quartica, che passa semplicemente per la retta c e per la conica e.

25. Vogliamo ora dimostrare che gli *elementi fondamentali dello spazio* Ω', cioè la curva f' e la retta t', *sono i soli elementi fondamentali dello spazio rappresentativo di* Γ; cioè vogliamo dimostrare, come per essi venga individuato un sistema lineare ∞^4 di superficie ε' del quinto ordine, aventi la retta t' tripla, il punto O' doppio, passanti semplicemente per la curva f', e non aventi altri punti o linee in comune.

Sappiamo (¹) che le superficie del quinto ordine con la retta t' tripla, soddisfano per ciò solo ad $N_3 = \frac{3\cdot 4}{2\cdot 3}(3\cdot 5 - 2\cdot 3 + 5) = 28$ condizioni lineari, indipendenti, e, se inoltre debbono avere il punto dato O' come doppio, dovranno per ciò soddisfare ad altre quattro condizioni. Quindi possiamo affermare che le superficie del quinto ordiue colla retta t' tripla ed il puuto O' doppio, sono, almeno, in numero $\left[\binom{5+3}{3} - 1\right] - 28 - 4 = 23$ volte infinito. Queste superficie secano la curva f', fuori da t' e da O', in $10\cdot 5 - 8\cdot 3 - 2\cdot 2 = 22$ punti; e quindi sopra f' esse determinano una serie lineare di gruppi di punti d'ordine 22, e di una certa dimensione q. È evidente che, una volta conosciuto il numero q, basterà far passare una superficie del quinto ordine, come quelle che si considerano, per $q+1$ punti scelti ad arbitrio sulla f', perchè questa curva giaccia per intero sulla detta superficie, cioè il numero $q+1$ sarà la *postulazione* della f' rispetto alle superficie del quinto ordine, con t' tripla ed O' doppio.

Ora è noto (¹) che, se $q > Q - p$ (dove Q e p sono rispettivamente l'ordine della serie lineare di gruppi di punti e il genere della curva), deve essere $Q \leq 2p - 2$. Nel nostro caso è invece $Q > 2p - 2$, perchè è $Q = 22$ e $p = 4$, quindi

---

(¹) Noether — l. c.

(¹) Brill-Noether — " Ueber die algebraischen Functionen und ihere Anwendung in der Geometrie ". Math. Annalen, Bd. VII.

è, nella presente quistione, $q \leq Q - p$, ossia $q \leq 18$. E in allora le superficie del quinto ordine con t' tripla, O' doppio, e passanti semplicemente per f', costituiscono un sistema lineare (ε') di dimensione $y \geq 23 - (18 + 1)$, cioè $y \geq 4$. Il sistema (ε') seca un piano qualunque ω, non passante per O', nè per t', secondo un altro sistema lineare (e') di curve del quinto ordine e genere $p = 3$, che è della stessa dimensione y; atteso che ω non può staccarsi da alcuna superficie del sistema, per l'ipotesi fatta. Ammettiamo ora, se pure è possibile, che le superficie del sistema (ε') abbiano tutte in comune, oltre delle t' ed f', una curva semplice (anche spezzata) d'ordine m, numero che, evidentemente, deve soddisfare alle limitazioni: $1 \leq m \leq 6 (= 5^2 - 3^2 - 10)$. Se c è una curva generica del sistema lineare (e'), su di essa le altre curve di questo sistema staccano una serie lineare d'ordine $6 - m$ e di dimensione $y - 1 \geq 3$. Ora giacchè si ha: (1) $y - 1 > (6 - m) - 3$ (3 essendo il genere delle curve e'), deduciamo che si deve avere: $6 - m \leq 2 \cdot 3 - 2$, cioè $m \geq 2$.

La (1) ci dice che la serie lineare di gruppi di punti sulla curva c, è una serie *speciale;* quindi dovrebbe essere secata sulla c da coniche aventi il punto $t'\omega$ come doppio, le quali perciò non potrebber formare un sistema lineare più che ∞^2; il che contraddice ad $y - 1 \geq 3$.

Ora possiamo subito dimostrare che è $y - 1 = 3$, cioè $y = 4$. Infatti sappiamo che, se si ha $Q > 2p - 2$ deve essere $q \leq Q - p$; ma nel nostro caso (non avendosi, come si è dimostrato, alcun'altra curva comune alle superficie ε', dalle t', ed f' in fuori) è precisamente $6 > 2 \cdot 3 - 2$: quindi sarà $y - 1 \leq 6 - 3$, cioè $y - 1 \leq 3$; quindi $y - 1 = 3$, ossia $y = 4$, c. v. d.

In modo analogo si prova, che non possono esistere punti fondamentali *semplici* staccati.

Poc'anzi abbiamo tacitamente supposto la non esistenza d'una *retta fondamentale doppia* $(6 - 4 = 2)$, o di un *punto fondamentale doppio staccato.* Ora si osservi che, se le curve del sistema lineare (e') avessero un punto *doppio* comune, sarebbe $6 - 4 = 2$ il grado della *serie caratteristica;* la quale per ciò non potrebbe avere più che *due dimensioni*, in opposizione ad $y - 1 \geq 3$.

26. Data una retta c di Γ non incidente π, vediamo *quante* siano le rette della varietà che si appoggiano a quella senza incontrar questo piano.

Se d è una di tali rette, il piano dc secherà ulteriormente la varietà lungo una coppia di rette uscenti dal punto D, dov'esso incontra π. Ne segue che D è un punto doppio per la traccia in π della superficie φ (n.° 14) relativa alla retta c. Viceversa, se D è un punto doppio per tale curva, il piano Dc conterrà, oltre la retta c, due rette uscenti da D: e quindi anche una quarta retta, non incidente π, ma incontrante c. Ora la curva $\varphi\pi$ è (n.° 14) dell'ottavo ordine, di genere $p = 4$, ed ha perciò diciassette punti doppi; dunque:

« *Una retta qualunque della varietà* Γ *non incidente il piano doppio* π, *è incontrata da altre diciassette rette della varietà non incidenti a quel piano* ».

Questo risultato si poteva anche ottenere dalla rappresentazione spaziale di Γ, osservando che una retta di questa varietà, che non incontri π, ma che si

appoggi alla retta c, ha per immagine sullo spazio rappresentativo una retta uscente dal punto fondamentale O', la quale incontra in altri due punti la curva f'.

III.

Punti doppi staccati della varietà Γ.

27. Vogliamo ora trovare il massimo numero finito di punti doppi, che la varietà quartica Γ può avere fuori dal piano π, senza contenere una linea, nè una superficie doppia.

Abbiamo visto che per il piano π passano (n.° 6) dieci iperpiani ciascuno dei quali seca ulteriormente la varietà secondo un cono quadrico. Se M è un punto doppio staccato di Γ, l'iperpiano $M\pi$ assorbirà *due* di questi dieci iperpiani: come si può vedere esprimendo, nell'equazione della varietà, che il punto fondamentale D, p. es., sia un punto doppio per essa. In allora, procedendo come è accennato alla fine del n.° 6, si staccherà da quel certo discriminante il fattore λ^2; e ciò significa, che dei dieci iperpiani, due coincidono con quello fondamentale di equazione $x_5 = 0$. Adunque tutti i punti doppi staccati che la varietà Γ può avere, potranno essere distribuiti al più in *cinque* iperpiani passanti per π.

Vediamo ora quanti ve ne possono essere in uno qualunque Σ di questi cinque iperpiani.

Se ve n'è un solo A, la quadrica ulteriore intersezione di Σ con Γ è un cono quadrico, che ha il punto A per vertice. Questo cono, poi, degenera in due piani μ e ν, se Γ acquista un altro punto doppio staccato A_1 in Σ. Evidentemente le due rette $\pi\mu$ e $\pi\nu$ sono bitangenti alla quartica i (n.° 3), luogo dei punti cuspidali del piano π. Se quindi è Ξ un iperpiano qualunque passante per μ, l'ulteriore intersezione di Ξ con Γ sarà una superficie cubica τ secante μ nella retta $\mu\pi$, e in una conica che passa per A ed A_1 e pei due punti in cui la quartica i è toccata dalla retta $\mu\pi$: perchè in ciascuno di questi due punti accade, che i due iperpiani tangenti a Γ coincidono con Σ, e quindi in essi il piano μ è tangente alla superficie cubica τ.

Al variare di Ξ si ottiene in μ un fascio di coniche, i punti base del quale sono i quattro punti testè nominati.

Si noti ora che, oltre di questi due punti doppi, la varietà Γ in Σ non ne può avere alcun altro. Infatti se un terzo punto doppio staccato C fosse nella retta AA_1, questa sarebbe doppia per Γ, in quanto si appoggia a π; e noi per ipotesi abbiamo ammesso che la varietà non abbia che un numero *finito* di punti doppi fuori dal suo piano doppio. Se poi C fosse fuori della retta AA_1, i due piani μ e ν coinciderebbero; e in allora la quartica i (n.° 3) acquisterebbe due punti doppi sulla retta $\mu\pi \equiv \nu\pi$: giacchè l'inviluppo della serie di coniche d'equazione (1) (n.° 7), ha per equazione: $4u_1w_1 - v_1^2 = 0$; e quindi, se è $t = 0$ l'equazione della retta $\mu\pi \equiv \nu\pi$, cioè se si ha $w_1 = t^2$, la quartica i acquista due punti doppi nei punti $v_1 = 0$, $t = 0$.

Pertanto la conica ulteriore intersezione di $\mu \equiv \nu$ con la superficie cubica τ,

dovendo passare pei tre punti A , A_1 , C, e per quei due punti doppi della i, non muterebbe al variare di Ξ; e per conseguenza sarebbe *doppia* per Γ, ciò che contradice alla ipotesi testè rammentata.

Concludiamo adunque:

« *Il massimo numero finito di punti doppi che la varietà quartica* Γ *può avere fuori del suo piano doppio* π, *è dieci*; *e questi dieci punti doppi saranno divisi in cinque coppie, ciascuna delle quali determina una retta incidente* π.

27 *bis*. Una varietà d'ordine n con un piano π $(n-2)$*plo*, può avere fino a $4n-6$ punti doppi staccati, divisi in $2n-3$ coppie, ciascuna delle quali determina una retta incidente π.

28. Sia A un punto doppio staccato della varietà quartica Γ. Il *cono sestico a due dimensioni* costituito dalle rette uscenti da esso e che incontrano ivi Γ in quattro punti riuniti, si spezza nel cono quadrico di Γ che giace nell'iperpiano $A\pi$, e in un cono χ del quarto ordine.

Sia g una delle *quattro* generatrici di χ che incontran π. Il piano tangente a χ lungo questa retta seca ulteriormente la varietà in una *cubica*, che oscula g in A, e che inoltre passa per il punto $g\pi$.

Ne segue che da essa si stacca la retta g; cioè che il piano tangente a χ lungo la g, tocca Γ lungo questa stessa retta. Dunque la varietà Γ ed il cono χ si toccano nelle quattro generatrici di quest'ultimo incidenti il piano π.

Da ciò ne inferiamo senz'altro che « *le rette di* Γ *uscenti dal punto doppio* A *e non incidenti* π *sono otto* ».

29. Sia A un punto doppio staccato di Γ, ed r una delle otto rette di questa passanti per esso. Le rette di Γ incidenti π e che si appoggiano ad r, costituiscono una superficie del decimo ordine composta del cono quadrico ulteriore intersezione di Γ coll' iperpiano $A\pi$, e di una rigata φ dell' ottavo ordine, la cui traccia in π è una sestica iperellittica o del genere $p=3$, giacchè sono *otto* i punti doppi della sua involuzione quadratica. Se Q è un punto doppio di questa curva, il piano Qr secherà Γ nella r, in due rette uscenti da Q, di cui nessuna passerà per A, ed in un'altra retta, non incidente π, ma uscente da A; giacchè questo punto è doppio per la varietà. Ora i punti doppi della sestica o sono sette; quindi per A passano, oltre della r, altre sette rette di Γ non incidenti il piano π. È evidente poi che, viceversa, ad ogni retta di Γ uscente da A e non incidente π, corrisponde un punto doppio della curva o. Adunque concludiamo, di nuovo, che per il punto doppio A passano *otto* rette di Γ non incidenti π.

Se dalle dodici intersezioni della o con la q, traccia in π del cono quadrico staccato dall'iperpiano $A\pi$, si escludono le tracce delle due generatrici di questo cono che sono posizioni limiti di generatrici della rigata φ, si ottengono dieci punti, che in corrispondenza ci danno *dieci* rette di Γ non incidenti π, le quali si appoggiano alla r, senza passare per A.

Complessivamente la r è incontrata da *diciassette* (n.° 26) rette della varietà, non incidenti il piano doppio di questa.

Analogamente si ragioni, se la varietà Γ ha un altro punto doppio A_1 nell'iperpiano $A\pi$.

30. Supponiamo ora che Γ abbia quattro punti doppi staccati A, A_1, B, B_1, divisi in due coppie in iperpiani passanti per π. Siano α, α_1; β, β_1 le coppie di piani in cui si specializzano le due quadriche ulteriori intersezioni di Γ coi due piani $A\pi \equiv A_1\pi$ e $B\pi \equiv B_1\pi$. Se r è una retta della varietà non incidente π ed uscente da A, essa incontra uno solo, p. es., β, dei due piani β, β_1. Nella presente ipotesi, il luogo delle rette di Γ incidenti π, e che si appoggiano ad r, è costituito dai piani α, α_1, β, e da una rigata φ del settimo ordine, la cui traccia in π è una quintica o del genere $p = 2$. Se Q è un punto doppio di o, nel piano Qr esisterà una retta di Γ non incidente π, la quale passa per A e incontra β_1. Se T è un punto comune alla curva o ed alla retta $\beta\pi$, diverso per altro dalle tracce di quelle due rette di β che son posizioni limiti delle generatrici di φ; allora il piano Tr, conterrà anche una rette di Γ non incidente π, uscente da A e che incontra β. Ma i punti doppi di o sono quattro, e i punti comuni a questa stessa curva ed alla retta $\beta\pi$ sono cinque: dunque concludiamo che dal punto doppio A escono otto rette di Γ, quattro delle quali incontrano solamente il piano β, e le altre quattro incontrano solamente β_1.

31. Abbia Γ altri due punti doppi C, C_1 in uno stesso iperpiano per π; e siano γ, γ_1 i due piani di Γ, in cui si specializza la quadrica ulteriore intersezione di essa coll'iperpiano $C\pi \equiv C_1\pi$. Sia inoltre γ il piano incontrato dalla r. Il luogo delle rette della varietà che incontran π ed r, è costituito dai piani α, α_1, β, γ, e da una rigata del sesto ordine, la cui traccia in π è una quartica ellittica o. Se Q è un punto doppio di questa, il piano Qr seca Γ nella r, in due rette uscenti da Q, e lungo un'altra retta non incidente π, la quale passa per il punto doppio A. Questa retta poi evidentemente incontra soltanto i piani β_1 e γ_1. Se T è un punto comune alla quartica o ed alla retta $\beta\pi$, il piano Tr conterrà una retta di Γ non incidente π, la quale passa per A ed incontra i piani β e γ_1.

Punti come T ne abbiamo quì due; giacchè bisogna escludere le tracce in π delle due rette di β, posizioni limiti delle generatrici di φ. Analogamente due dei quattro punti comuni alla quartica o ed alla retta $\gamma\pi$, ci daranno due rette di Γ non incidenti π, uscenti dal punto doppio A ed appoggiate ai due piani γ e β_1. Infine si osservi che se è $P \equiv \pi\gamma\beta$, il piano Pr seca Γ lungo la r, lungo le due rette $P \cdot r\beta$, $P \cdot r\gamma$, e secondo una retta non incidente π, la quale passa dal punto doppio A ed incontra i due piani β e γ. Concludiamo adunque, anche in questo caso, che per il punto doppio A passano otto rette di Γ non incidenti π. Di queste otto rette due incontrano la coppia di piani β, γ; due la coppia β, γ_1; due la β_1, γ; ed altre due la coppia β_1, γ_1.

32. La varietà Γ abbia ancora due punti doppi D, D_1 in uno stesso iperpiano per π; e siano δ e δ_1 i due piani, in cui si specializza la quadrica ulteriore intersezione di Γ coll'iperpiano $D\pi \equiv D_1\pi$. Inoltre fra questi due piani sia δ quello incontrato dalla r. Il luogo delle rette di Γ incidenti π e che si appog-

giano alla retta r, è costituito dai piani α, α_1, β, γ, δ, e da una rigata φ del quinto ordine, la cui traccia in π è una cubica razionale o. Se Q è il punto doppio di questa, il piano Qr segherà Γ nella r, in due rette uscenti da Q, e in un'altra retta, non incidente π, la quale passa per A e incontra i piani β_1, γ_1, δ_1. La retta $\beta\pi$ incontra la cubica o in tre punti, escludendo dai quali le tracce delle due rette di β, posizioni limiti delle generatrici di φ, rimane un solo punto d'intersezione, che con la retta r individua un certo piano, il quale contiene una retta di Γ non incidente π, uscente da A, e incidente i piani β, γ_1, δ_1. Analogamente si hanno altre due rette della varietà non incidenti π, uscenti da A, e che incontrano rispettivamente i piani β_1, γ, δ_1 e β_1, γ_1, δ. Infine si osservi che il punto comune alle due rette $\beta\pi$ e $\gamma\pi$ ci fornisce una retta di Γ non incidente π, uscente da A e che incontra i piani β, γ, δ_1. Analogamente i due punti $\beta\delta\pi$ e $\gamma\delta\pi$ ci forniscono due rette di Γ, non incidenti π, uscenti da A e che incontrano rispettivamente l'una i piani β, γ_1, δ, e l'altra i piani β_1, γ, δ.

Adunque per il punto doppio A passano otto rette della varietà, non incidenti π e tali, che ciascuna di esse incontra i piani di una sola delle otto terne, che si possono formare coi piani β, β_1; γ, γ_1; , δ, δ_1, prendendone uno per ognuna delle tre coppie.

33. Supponiamo, infine, che Γ abbia il massimo numero (finito) di punti doppi fuori dal piano π; cioè abbia ancora (n.° 27) un'altra coppia E, E_1 di punti doppi in uno stesso iperpiano per π: e siano ε ed ε_1 i due piani, che costituiscono l'ulteriore intersezione di Γ con l'iperpiano $E\pi \equiv E_1\pi$. In questo caso il luogo delle rette di Γ incidenti π e che si appoggiano alla retta r, è costituito dai piani α, α_1, β, γ, δ, ε (se quest'ultimo è incontrato da r), e da una rigata φ del quarto ordine avente per traccia in π una conica dotata di un punto doppio, giacchè, com'è noto, nel caso in esame i cinque iperpiani per π contenenti rispettivamente le cinque coppie di punti doppi staccati, assorbono completamente i dieci iperpiani per π, che secano ulteriormente la varietà in coni quadrici.

Per considerazioni analoghe a quelle fatte nei numeri precedenti, deduciamo che il punto doppio della conica $\varepsilon\pi$ ci fornisce una retta di Γ non incidente π, uscente da A, e che incontra i piani β_1, γ_1, δ_1, ε_1. Il punto comune alle due rette $\beta\pi$ e $\gamma\pi$, ci fornisce una retta della varietà non incidente il piano doppio, uscente da A e che incontra i piani β, γ, δ_1, ε_1. Analogamente i punti $\beta\delta\pi$, $\beta\varepsilon\pi$, $\gamma\delta\pi$, $\gamma\varepsilon\pi$, $\delta\varepsilon\pi$ ci danno cinque rette della varietà non incidenti π, uscenti da A e che incontrano, rispettivamente i piani $\beta\gamma_1\delta\varepsilon_1$; $\beta\gamma_1\delta_1\varepsilon$; $\beta_1\gamma\delta\varepsilon_1$; $\beta_1\gamma\delta_1\varepsilon$; $\beta_1\gamma_1\delta\varepsilon$. In conclusione abbiamo che dal punto doppio A escono otto rette di Γ non incidenti π; esse incontrano rispettivamente i piani:

$$\beta\gamma\,\delta\,\varepsilon\ ;\ \beta_1\gamma_1\delta_1\varepsilon_1\ ;\ \beta\,\gamma\delta_1\varepsilon_1\ ;\ \beta\,\gamma_1\delta\varepsilon_1\ ;$$

$$\beta\gamma_1\delta_1\varepsilon\ ;\ \beta_1\gamma\,\delta\,\varepsilon_1\ ;\ \beta_1\gamma\delta_1\varepsilon\ ;\ \beta_1\gamma_1\delta\varepsilon.$$

34. Abbia la varietà Γ un sol punto doppio staccato A, per cui non passi la sua retta *fondamentale* c (non incidente π). La curva f' (n.° 16) di Ω' acqui-

sta un punto doppio nell'immagine di A. Questo punto doppio è però semplice per la superficie π' (n.° 16), e per le immagini delle sezioni iperplanari di Γ. Siccome poi nella presente ipotesi sono otto i coni quadrici della varietà in iperpiani per π, a prescindere da quello dovuto al punto doppio A, la curva f' è del genere $p = 3$. Se poi la varietà acquista ancora un altro punto doppio staccato A_1 nell'iperpiano $A\pi$, la curva f' si spezza in una retta a ed in una curva del *nono* ordine di genere $p = 3$, avente sette punti in t'. La retta a ha poi due punti in comune con questa curva ed uno con la retta t'. Tutto ciò si rende chiaro pensando che nel caso in esame l'iperpiano $A\pi \equiv A_1\pi$ seca ulteriormente la varietà in una coppia di piani α, α_1 secantisi nella retta AA_1; e che inoltre la retta c incontra uno solo, p. es., α, di questi due piani. La retta a è dunque la traccia in Ω' del piano α, ed i due punti ove essa si appoggia alla curva del nono ordine, sono le proiezioni in Ω' dei due punti doppi A ed A_1 fatte dal punto $c\alpha$.

Nella presente ipotesi la superficie φ (n.° 14) è costituita dal piano α e da una rigata del nono ordine, che ha in questo due generatrici.

35. Supponiamo ora che la varietà Γ abbia un altro punto doppio staccato B (fuori dalla c).

La curva del nono ordine in Ω', di cui si è parlato nel numero precedente, acquista un punto doppio, e inoltre diventa del genere $p = 2$. Se poi anche un altro punto doppio B_1 cade nell'iperpiano $B\pi$, e sono β, β_1 i due piani di Γ nell'iperpiano $B\pi \equiv B_1\pi$, il luogo delle rette della varietà, incidente π, le quali si appoggiano a c, è costituito dai piani α, β (se è β incontrato dalla c), e da una rigata dell'ottavo ordine; quindi nella presente ipotesi, la curva f' è formata dalle due rette $\Omega'\alpha$, $\Omega'\beta$, e da una curva dell'ottavo ordine del genere $p=2$, alla quale si appoggia in due punti ciascuna di quelle due rette, che d'altra parte incontrano anche la retta t'.

36. È facile ora comprendere come deve modificarsi la rappresentazione spaziale di Γ, se questa acquista altri punti doppi staccati.

In ultimo se la varietà presenta il massimo numero di punti doppi staccati che può avere, cioè dieci (n.° 27); e sono α, α_1; β, β_1; γ, γ_1; δ, δ_1; ε, ε_1 i dieci piani di essa, il luogo delle rette della varietà che incontran π e si appoggiano alla c, è costituito dai piani α, β, γ, δ, ε, se questi sono incontrati da c; e da una rigata dèl quinto ordine, la cui traccia in π è formata da una cubica spezzata in una retta ed in una conica. Se ora osserviamo che tanto questa conica quanto la retta sono riferite biunivocamente alla c, possiamo senz'altro inferirne che la f' è, nella presente ipotesi, costituita dalle tracce in Ω' dei piani α, β, γ, δ, ε, e da un luogo del quinto ordine composto da una cubica sghemba e da una conica aventi in comune il solo punto $O' \equiv c\Omega'$. La cubica, poi, si appoggia in due punti alla t', e la conica vi si appoggia in un solo punto.

37. Siano $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\varphi' = 0$, $\psi' = 0$ le equazioni di quattro coni quadrici a tre dimensioni, di prima specie, aventi un piano π in comune, e non appartenenti ad una stessa rete.

I primi tre coni si secano, a prescindere da π, in una curva g del quarto ordine con tre punti in questo piano; la quale seca il quarto cono quadrico in otto punti, di cui solamente cinque sono fuori da π.

Evidentemente, quindi, la varietà di equazione $(\varphi, \psi, \varphi', \psi')^2=0$ è del quarto ordine, ha il piano π come doppio, ed i cinque punti comuni, fuori da questo, ai sopradetti coni quadrici, anche come doppi.

É superfluo poi osservare che di questi cinque punti doppi, due qualunque determinano una retta non incidente il piano π.

Di una varietà siffatta possiamo anche dare una *generazione proiettiva.*

I singoli coni quadrici dei fasci (1) $\varphi-\lambda\psi=0$ e $\varphi'-\lambda\psi'=0$, riferiti proiettivamente fra loro, generano, come luogo della superficie comune a due coni corrispondenti, una varietà Γ del quarto ordine avente il piano π come doppio.

La superficie base del primo fascio si comporrà del piano π e di una superficie del terzo ordine χ; sia analogamente χ' la rigata cubica normale che insieme col piano π costituisce la base del secondo fascio.

Un iperpiano Σ passante per π seca i due coni quadrici di equazioni $\varphi=0$ e $\psi=0$, ulteriormente in due piani, la cui retta comune appartiene alla χ; questa pertanto seca il piano π lungo una conica q. Sia, analogamente, q' la conica traccia di χ' in π.

Le due superficie χ e χ' hanno nove punti comuni, quattro dei quali giacciono nel piano π, e sono i punti in cui si seccano le due coniche q e q'; gli altri cinque punti, che giacciono fuori da π, sono doppi per la varietà Γ. È poi evidente che due qualunque di questi cinque punti individuano una retta non incidente π.

Un iperpiano Σ passante per questo piano, seca i due fasci (1), secondo due fasci proiettivi di piani, i cui assi sono le rette di χ e di χ', giacenti in Σ. Questi fasci generano la quadrica ulteriore intersezione di Σ con Γ.

In questo modo si ottengono in detta quadrica le generatrici del sistema a cui non appartengono gli assi dei due fasci di piani generatori. Si osservi che l'equazione della varietà Γ è $\varphi\psi'-\varphi'\psi=0$, e quindi essa può anche considerarsi come generata dai due fasci proiettivi (2) $\varphi-\lambda\varphi'=0$, $\psi-\lambda\psi'=0$.

In questo modo otteniamo in ogni quadrica, ulteriore intersezione di Γ con un iperpiano Σ per π, l'altro sistema di generatrici.

Questa quadrica in entrambi i casi sarà un cono, se l'iperpiano Σ passa per uno dei sopradetti cinque punti doppi. Del resto in tal caso gli assi dei due fasci di piani proiettivi, non sono sghembi, ma s'incontrano nel punto doppio.

38. È noto che le quartiche normali di S_4 aventi tre punti in π sono ∞^{18}, e che se devono passare per un punto generico di S_4 soddisfano a tre condizioni. Sia quindi c una quartica normale di S_4, passante pei cinque punti doppi di Γ, per un altro punto generico (fuori di π) della varietà stessa, e che incontra in tre punti il piano π. Essa seca Γ in diciassette punti, e però giace in essa.

Il luogo delle rette della varietà incidenti il suo piano doppio, e che si appoggiano a questa curva c, sarà costituito dai cinque coni di Γ, e (n° 14) da

una rigata del sesto ordine avente per traccia in π una quartica. Ora dal fatto che i dieci coni quadrici della varietà, sono assorbiti dai cinque negli iperpiani per π e pei punti doppi, segue che questa quartica si deve spezzare, giacchè fuori dai detti cinque coni, non esistono rette di Γ incidenti π e che si appoggiano in uno stesso punto a c, che siano infinitamente vicine.

Non potendo poi questa quartica essere costituita da una retta ed una cubica, giacchè i tre punti che c ha in π non sono allineati, mentre sono comuni alle due parti in cui si spezza la detta quartica, segue che essa si compone di due coniche, evidentemente riferite biunivocamente alla curva c, e passanti pei tre punti tracce in π di questa.

Segue ancora che la sopradetta superficie del sesto ordine è formata da due rigate cubiche normali, secate lungo due coniche da π, e secondo due rette incidenti da un iperpiano ad arbitrio condotto per questo piano.

39. Viceversa siano λ e μ due superficie cubiche siffatte. Il luogo del punto comune alle due rette incidenti secondo le quali ulteriormente sono esse secate da un iperpiano ad arbitrio passante per π, è una curva d'ordine r con $r-1$ punti in questo piano, e che passa pei vertici dei cinque coni quadrici di Γ. In allora siccome è noto (n° 14) che il luogo delle rette di questa varietà incidenti π, e che si appoggiano ad una curva siffatta, è una rigata d'ordine $3\cdot 4+2r-4$; e d'altra parte essendo questa nel nostro caso costituita da λ, da μ e dai cinque coni in parola, deve essere $r=4$.

I tre punti di quella curva, che chiameremo c, posti in π saranno comuni alle due coniche $l\equiv\lambda\pi$ ed $m\equiv\mu\pi$. Uno qualunque B di essi è tale, che l'iperpiano per π determinato dalla generatrice di λ, p. es., che passa per esso, contiene la generatrice di μ uscente dallo stesso punto B.

Il quarto punto comune ad l ed m non può godere della medesima proprietà; giacchè se fosse altrimenti, esso apparterrebbe a c.

In allora se indichiamo con M quest'ultimo punto, e con A, B, C gli altri tra; e se proiettiamo λ (o μ) da M, otteniamo un cono quadrico che seca ulteriormente Γ in μ (o in λ). Infatti si chiamino corrispondenti due punti, uno di l e l'altro di m, qualora siano tracce in π di due generatrici, una di λ e l'altra di μ, incidenti. Proiettando da M. avremo nel fascio di raggi (M , π), una ordinaria proiettività con *tre* coincidenze, e quindi con infinite coincidenze; cioè *tutti* i piani determinati da due generatrici incidenti di λ e μ, passano per M, e ciò dimostra l'assunto.

40. Proiettiamo ora la μ da un punto M_1 (diverso da M) della conica m; otteniamo un cono quadrico che seca ulteriormente Γ in un'altra superficie cubica normale ν, tale che un iperpiano Σ per π seca λ e ν in due generatrici sghembe.

Se ora noi facciamo variare M sulla l, otteniamo ∞^1 coni quadrici formanti un fascio, che secano la varietà in altrettante rigate cubiche come la μ; tali

che per ciascuna di esse esiste nella conica $n \equiv \nu\pi$ un punto, da cui proiettando la μ che si considera, si ottiene per ulteriore intersezione con Γ *costantemente* la ν.

In questo modo adunque si ottiene un fascio di coni quadrici a tre dimensioni di base ν (con π) riferiti proiettivamente a quelli del fascio di base λ (con π), e tali che due coni corrispondenti si secano in una superficie cubica (μ) di Γ.

Concludendo si ha:

« *Qualunque varietà del quarto ordine con un piano* π *doppio, e cinque punti doppi staccati (due qualunque non in uno stesso iperpiano per* π*), è generabile mercè due fasci proiettivi di coni quadrici contenenti* π ».

(*continua*)

ALCUNE FORMOLE E PROPRIETÀ RELATIVE AI MOMENTI D'INERZIA

NOTA

DI

CESARE SPELTA

---

1. Si stabilisce facilmente la relazione:

$$1) \qquad \mu_x = \mu_y + \mu_z - 2\xi,$$

essendo μ_x il momento d'inerzia di un sistema materiale rispetto ad un asse x; μ_y, μ_z i momenti d'inerzia dello stesso sistema rispetto a 2 assi ortogonali y, z qualunque, contenuti in un medesimo piano normale ad x e segantisi in un punto qualunque o di x; ed essendo ξ il momento d'inerzia rapporto al piano yz.

Sia x_1 un asse parallelo ad x, inoltre indichiamo con μ_{y_1}, μ_{z_1} i momenti d'inerzia rispetto a 2 assi ortogonali y_1, z_1 qualunque purchè segantisi in un punto o_1 di x_1 e giacenti nel piano yz. Il momento d'inerzia μ_{x_1} rispetto ad x_1 sarà dato analogamente da

$$2) \qquad \mu_{x_1} = \mu_{y_1} + \mu_{z_1} - 2\xi.$$

Sottraendo membro a membro le 1), 2), si ottiene:

$$3) \qquad \mu_{x_1} - \mu_x = \mu_{y_1} + \mu_{z_1} - \mu_y - \mu_z.$$

2. Supponiamo che l'asse z coincida coll'asse z_1. Risulterà $\mu_z = \mu_{z_1}$; cosicchè la 3) si riduce a

$$4) \qquad \mu_{x_1} - \mu_x = \mu_{y_1} - \mu_y.$$

Supponiamo inoltre che le parallele x, x_1 siano 2 assi principali d'inerzia spiccati normalmente da 2 punti o, o_1 di un asse principale centrale d'inerzia s, e che su s coincidano z, z_1; dimodochè anche y, y_1 risulteranno 2 assi principali d'inerzia normali ad s e fra loro paralleli.

Indichiamo con a, b, a_1, b_1, a_2, b_2, ... i semiassi delle ellissi che si ottengono segando mediante piani normali ad s in o, o_1, o_2, ... gli ellissoidi d'inerzia relativi ad o, o_1, o_2, ... (essendo o, o_1, o_2, ... punti quali si vogliano di s).

Avremo (per la 4) e notando che $\mu_x = \frac{1}{a^2}$, $\mu_y = \frac{1}{b^2}$, ecc.)

$$\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{1}{b_1^2} - \frac{1}{a_1^2} = \ldots .$$

ossia

$$5) \qquad \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{ab} = \frac{\sqrt{a_1^2 - b_1^2}}{a_1 b_1} = \ldots .$$

Adunque: *Nelle ellissi ottenute segando gli ellissoidi d' inerzia relativi a punti* o, o_1, o_2, ... *di un asse principale centrale d'inerzia* s *mediante piani normali ad* s *in* o, o_1, o_2, ... *le eccentricità stanno fra loro come le aree.* (Indicheremo tali eccentricità con ε, ε_1 ε_2, ... e tali aree con A, A_1, A_2, ...).

Siccome notoriamente i prodotti ab, $a_1 b_1$, ... diminuiscono man mano ci allontaniamo dal baricentro, deduciamo dalle 5) [1]: *Nelle dette ellissi l' eccentricità diminuisce man mano ci allontaniamo dall'ellisse il cui piano passa pel baricentro, la quale è pertanto caratterizzata dall'avere la massima eccentricità.*

3. Si noti che

$$ab = \frac{V}{kh}, \quad a_1 b_1 = \frac{V_1}{kh}, \ldots .$$

essendo V, V_1, V_2, ... i volumi degli ellissoidi d'inerzia relativi ai punti o, o_1, o_2, ...; h il semiasse (di lunghezza eguale per tutti questi ellissoidi) giacente sulla retta s; k un coefficiente numerico $\left(= \frac{4}{3}\pi\right)$.

Dimodochè, in virtù della 5), possiamo anche affermare: *Negli ellissoidi d'inerzia relativi a punti di un asse principale centrale d'inerzia* s, *i volumi stanno fra loro come le eccentricità delle ellissi sezioni principali normali ad* s.

---

[1] Escluso il caso eccezionale in cui l'ellissoide d'inerzia relativo ad un punto della s sia di rivoluzione intorno ad s.

Si osservi eziandio che, chiamando I, I_1, I_2, ... i momenti d'inerzia degli ellissoidi d'inerzia (di centri o, o_1, o_2, ...), calcolati rispetto ai piani ab, a_1b_1, a_2b_2, ..., si ha

$$I = \frac{4}{15}\pi abh^3 \ , \ I_1 = \frac{4}{15}\pi a_1b_1h^3 \ , \ldots .$$

Pertanto

$$\frac{I}{I_1} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \ , \ldots .$$

4. L'asse principale centrale d'inerzia s venga segato mediante 2 piani π, π_1 ad esso normali in 2 punti quali si vogliano o, o_1. Siano (come dianzi) x, y gli altri 2 assi principali d'inerzia relativi ad o; x_1, y_1 rappresentino gli altri 2 assi principali d'inerzia relativi ad o_1. Indichiamo rispettivamente con μ_s, μ_x, μ_y, μ_{x_1}, μ_{y_1}, ν, ν_1 i momenti d'inerzia del dato sistema rapporto ad s, x, y, x_1, y_1, π, π_1. Per la 1), avremo

$$\mu_s = \mu_x + \mu_y - 2\nu$$

$$\mu_s = \mu_{x_1} + \mu_{y_1} - 2\nu_1 \ ;$$

epperò

$$6) \qquad (\mu_{x_1} + \mu_{y_1}) - (\mu_x + \mu_y) = 2(\nu_1 - \nu).$$

Essendo (sempre come dianzi) a, b, a_1, b_1 i semiassi delle ellissi che si ottengono segando (mediante π, π_1) gli ellissoidi d'inerzia relativi ad o, o_1, la 6) equivale alla

$$\left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{b_1^2}\right) - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = 2(\nu_1 - \nu),$$

ossia alla

$$7) \qquad \frac{l_1^2}{a_1^2 b_1^2} - \frac{l^2}{a^2 b^2} = 2(\nu_1 - \nu) \ ,$$

chiamando l la corda che unisce 2 vertici consecutivi nella ellisse di semiassi a, b; analogamente l_1.

Supponiamo che π passi pel baricentro. Risulterà, come è noto, $\nu_1 > \nu$; epperò (in forza della 7))

$$\frac{l_1}{a_1 b_1} > \frac{l}{ab} \cdot$$

Onde: *Date varie ellissi ottenute segando gli ellissoidi d' inerzia relativi a punti* o , o_1 , o_2 , ... *di un asse principale centrale d'inerzia* s (*mediante piani normali ad* s *in* o , o_1 , o_2 , ...), *fra le quali l'ellisse sezione dell'ellissoide centrale d'inerzia, in questa è massimo il rapporto dell'area alla corda unente 2 vertici consecutivi.*

Di più, avendo presenti i risultati precedenti, possiamo asserire: *Dati varii ellissoidi d' inerzia relativi a punti di un asse principale centrale d' inerzia* s, *fra i quali l'ellissoide centrale, in questo è massimo il rapporto del volume alla corda unente 2 vertici consecuttvi nell' ellisse sezione principale normale ad* s. **Come anche**, in tale enunciato, alla parola *volume,* si può sostituire una qualsiasi delle 2 espressioni: *eccentricità dell'ellisse sezione principale normale ad* s ; *momento d'inerzia calcolato rispetto al piano principale normale ad* s.

5. Indichiamo con I_a , I_b , I_{a_1} , I_{b_1} , I_{a_2} , I_{b_2} , ... i rispettivi momenti d'inerzia delle aree ellittiche A , A_1 , A_2 , ... rapporto ad a , b , a_1 , b_1 , a_2 , b_2 , ... Siano invece α , β , α_1 , β_1 , α_2 , β_2 , ... i momenti d' inerzia del dato sistema rispetto ad a , b , a_1 , b_1 , a_2 , b_2 , ...

Avendosi

$$I_a = \frac{\pi}{4} ab^3 \text{, e formole analoghe per } I_b \text{ , } I_{a_1} \text{ , } I_{b_1} \text{ , ...}$$

$$\alpha = \frac{1}{a^2} \quad \text{,} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \beta \text{ , } \alpha_1 \text{ , } \beta_1 \text{ , ...}$$

risulterà

$$\frac{I_a}{I_{a_1}} = \frac{ab^3}{a_1 b_1^3} = \frac{\psi}{\psi_1} \frac{b^2}{b_1^2} ,$$

potendo, per quanto si disse, ψ , ψ_1 , ψ_2 , ... assumere rispettivamente i valori

$$\varepsilon \text{ , } \varepsilon_1 \text{ , } \varepsilon_2 \text{ , ...}$$

oppure

$$A \text{ , } A_1 \text{ , } A_2 \text{ , ...}$$

oppure

$$V \text{ , } V_1 \text{ , } V_2 \text{ , ...}$$

oppure

$$I, I_1 \text{ , } I_2 \text{ , ...}$$

Ossia otterremo

8) $$\frac{\beta}{\beta_1} = \frac{\psi I_{a_1}}{\psi_1 I_a} .$$

Similmente

$$\frac{I_a}{I_{b_1}} = \frac{ab^3}{a_1^3 b_1} = \frac{\psi}{\psi_1} \frac{b^2}{a_1^2}$$

$$\frac{\beta}{\alpha_1} = \frac{\psi I_{b_1}}{\psi_1 I_a} .$$

Ed anche

$$\frac{\alpha}{\beta_1} = \frac{\psi I_{a_1}}{\psi_1 I_b}$$

9) $$\frac{\alpha}{\alpha_1} = \frac{\psi I_{b_1}}{\psi_1 I_b} .$$

Supponendo o_1 più distante che o dal centro di gravità, inoltre

$$a > b \ , \ a_1 > b_1 \ , \ldots .$$

(dimodochè a , a_1 , ... risulteranno tra loro paralleli; come pure saranno tra loro paralleli b , b_1 , ...) ricavasi dalle 8), 9) (in valore assoluto)

10) $$\psi I_{a_1} < \psi_1 I_a \ , \ \psi I_{b_1} < \psi_1 I_b ;$$

epperò

$$\frac{\psi}{\psi_1} < \frac{I_a}{I_{a_1}} \ , \ \frac{\psi}{\psi_1} < \frac{I_b}{I_{b_1}} .$$

Inoltre, sommando membro a membro le 10) si ottiene

$$\frac{\psi}{\psi_1} < \frac{I_a + I_b}{I_{a_1} + I_{b_1}}$$

11) $$\frac{\psi}{\psi_1} < \frac{Q}{Q_1} ,$$

indicando con Q , Q_1 , Q_2 , ... i rispettivi momenti d'inerzia delle aree A , A_1 , A_2 , ... rapporto ad s.

6. Dalle 8), 9) ricaviamo (qualunque sia la posizione di o , o_1 sull' asse s)

$$\frac{\alpha_1 - \alpha}{\alpha} = \frac{\psi_1 I_b - \psi I_{b_1}}{\psi I_{b_1}}$$

$$\frac{\beta_1 - \beta}{\beta} = \frac{\psi_1 I_a - \psi I_{a_s}}{\psi I_{a_1}} .$$

Dimodochè, se o coincide col baricentro, se δ_1 è la distanza $\overline{oo_1}$, se M è la massa totale, ed applicando la nota formola

12) $$\alpha_1 - \alpha = M\delta_1^2,$$

risulta

$$\frac{M\delta_1^2}{\alpha} = \frac{\psi_1 I_b - \psi I_{b_1}}{\psi I_{b_1}}$$

$$\frac{M\delta_1^2}{\beta} = \frac{\psi_1 I_a - \psi I_{a_1}}{\psi I_{a_1}},$$

dove α, β sono per conseguenza i 2 momenti principali centrali d'inerzia calcolati rispetto agli assi principali centrali d'inerzia a, b.

Ossia

13) $$\alpha = \frac{\psi I_{b_1}}{\psi_1 I_b - \psi I_{b_1}} M\delta_1^2$$

14) $$\beta = \frac{\psi I_{a_1}}{\psi_1 I_a - \psi I_{a_1}} M\delta_1^2.$$

Dalle 12), 13) deduciamo

$$\alpha_1 = \left(1 + \frac{\psi I_{b_1}}{\psi_1 I_b - \psi I_{b_1}}\right) M\delta_1^2$$

15) $$= \frac{\psi_1 I_b}{\psi_1 I_b - \psi I_{b_1}} M\delta_1^2.$$

Perciò (dividendo la 15) per la 13))

16) $$\alpha_1 = \frac{\psi_1 I_b}{\psi I_{b_1}} \alpha.$$

Analogamente

17) $$\beta_1 = \frac{\psi_1 I_a}{\psi_1 I_a - \psi I_{a_1}} M\delta_1^2$$

18) $$= \frac{\psi_1 I_a}{\psi I_{a_1}} \beta.$$

Si vede dalle 16), 18) che i rapporti $\frac{\psi_1}{I_{a_1}}$, $\frac{\psi_1}{I_{b_1}}$ crescono man mano ci allontaniamo dal baricentro (dovendo crescere α_1, β_1).

E sempre analogamente

$$19) \qquad \alpha_2 = \frac{\psi_2 I_b}{\psi I_{b_2}} \alpha,$$

epperò (dividendo la 19) per la 16))

$$20) \qquad \alpha_2 = \frac{\psi_2 I_{b_1}}{\psi_1 I_{b_2}} \alpha_1.$$

Come anche

$$21) \qquad \beta_2 = \frac{\psi_2 I_{a_1}}{\psi_1 I_{a_2}} \beta_1.$$

Inoltre deducesi (dividendo la 16) per la 18))

$$22) \qquad \frac{\alpha_1}{\beta_1} = k \frac{I_{a_1}}{I_{b_1}},$$

indicando con k una costante.

Similmente

$$\frac{\alpha_2}{\beta_2} = k \frac{I_{a_2}}{I_{b_2}};$$

relazione che divisa per la 22) dà

$$\frac{\alpha_1 \beta_2}{\alpha_2 \beta_1} = \frac{I_{a_1} I_{b_2}}{I_{a_2} I_{b_1}}.$$

7. Dai valori 13), 15) trovati per α, α_1 si ricava

$$23) \quad p\alpha^t + q\alpha_1^u = \frac{p(\psi I_{b_1} M\delta_1^2)^t (\psi_1 I_b - \psi I_{b_1})^u + q(\psi_1 I_b M\delta_1^2)^u (\psi_1 I_b - \psi I_{b_1})^t}{(\psi_1 I_b - \psi I_{b_1})^{t+u}},$$

essendo p, q, t, u numeri arbitrarii.

Nel caso speciale di $p = -1$, $q = t = u = 1$, si ottiene la 12).

Facendo nella 23) $p = 1$, $q = -1$, $t = u = -\frac{1}{2}$, risulta

$$24) \qquad \frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} = \frac{1}{\delta_1\sqrt{M}}\sqrt{\psi_1 I_b - \psi I_{b_1}}\left(\frac{1}{\sqrt{\psi I_{b_1}}} - \frac{1}{\sqrt{\psi_1 I_b}}\right):$$

formola che somministra la differenza tra i 2 semiassi α, α_1.

Si deduce pure

$$25) \qquad \frac{\alpha_1 + \alpha}{\alpha_1 - \alpha} = \frac{\psi_1 I_b + \psi I_{b_1}}{\psi_1 I_b - \psi I_{b_1}}.$$

Relazioni analoghe si ottengono facendo comparire β, β_1 invece di α, α_1.

8. **Dalle** 13), 14) ricaviamo (assumendo ψ, ψ_1 rispettivamente eguali ad ε, ε_1):

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\varepsilon_1 I_b}{\varepsilon I_{b_1} M\delta_1^2} - \frac{1}{M\delta_1^2}$$

$$\frac{1}{\beta} = \frac{\varepsilon_1 I_a}{\varepsilon I_{a_1} M\delta_1^2} - \frac{1}{M\delta_1^2};$$

da cui (**sottraendo** membro a membro ed osservando che $\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} = \varepsilon^2$)

$$\frac{\varepsilon^3}{\varepsilon_1} = \frac{1}{M\delta_1^2}\frac{I_{a_1} I_b - I_a I_{b_1}}{I_{a_1} I_{b_1}}$$

$$26) \qquad = \frac{1}{M\delta_1^2}\frac{D_1}{I_{a_1} I_{b_1}},$$

chiamando **in** genere D_i ($i = 1, 2, 3, \ldots$) il determinante

$$\begin{vmatrix} I_{a_i} & I_{b_i} \\ I_a & I_b \end{vmatrix}.$$

Così pure dalle 15), 17) deducesi

$$\frac{1}{\alpha_1} = \frac{1}{M\delta_1^2} - \frac{\varepsilon I_{b_1}}{\varepsilon_1 I_b M\delta_1^2}$$

$$\frac{1}{\beta_1} = \frac{1}{M\delta_1^2} - \frac{\varepsilon I_{a_1}}{\varepsilon_1 I_a M\delta_1^2},$$

da cui (sottraendo membro a membro e notando che $\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\beta_1} = \varepsilon_1^2$)

27) $$\frac{\varepsilon_1^3}{\varepsilon} = \frac{1}{M\delta_1^2} \frac{D_1}{I_a I_b}.$$

Dividendo la 26) per la 27):

$$\frac{\varepsilon^4}{\varepsilon_1^4} = \frac{I_a I_b}{I_{a_1} I_{b_1}}.$$

Analogamente

$$\frac{\varepsilon^4}{\varepsilon_2^4} = \frac{I_a I_b}{I_{a_2} I_{b_2}},$$

epperò

28) $$\frac{\varepsilon_1^4}{\varepsilon_2^4} = \frac{I_{a_1} I_{b_1}}{I_{a_2} I_{b_2}}.$$

Onde: *Nelle ellissi sopra menzionate, di centri o, o_1, o_2, ..., i prodotti dei 2 momenti d'inerzia rispetto ai 2 assi stanno fra loro come le quarte potenze delle eccentricità.*

E più generalmente:

29) $$\frac{\psi_1^4}{\psi_2^4} = \frac{I_{a_1} I_{b_1}}{I_{a_2} I_{b_2}}.$$

Moltiplicando la 26) per la 27), si ottiene

30) $$\varepsilon\varepsilon_1 = \frac{1}{M\delta_1^2} \frac{D_1}{\sqrt{I_a I_b I_{a_1} I_{b_1}}}.$$

Moltiplicando la 26) per la 30):

31) $$\varepsilon^2 = \frac{1}{M\delta_1^2} \frac{D_1}{\sqrt{I_{a_1} I_{b_1}} \sqrt[4]{I_a I_b I_{a_1} I_{b_1}}}.$$

Moltiplicando la 27) per la 30):

32) $$\varepsilon_1^2 = \frac{1}{M\delta_1^2} \frac{D_1}{\sqrt{I_a I_b} \sqrt[4]{I_a I_b I_{a_1} I_{b_1}}}.$$

Consideriamo un altro punto o_2 di s, e sia δ_2 la sua distanza dal baricentro. **Avremo** analogamente (cfr. la 32))

33) $$\varepsilon_2^2 = \frac{1}{M\delta_2^2} \frac{D_2}{\sqrt{I_a I_b} \sqrt[4]{I_a I_b I_{a_2} I_{b_2}}}.$$

Dividendo le 32), 33) tra loro:

$$\frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_2^2} = \frac{\delta_2^2 D_1}{\delta_1^2 D_2} \sqrt[4]{\frac{I_{a_2} I_{b_2}}{I_{a_1} I_{b_1}}}.$$

E tenuto calcolo della 28):

$$\frac{\delta_2^2 D_1}{\delta_1^2 D_2} = \frac{(I_{a_1} I_{b_1})^{\frac{3}{4}}}{(I_{a_2} I_{b_2})^{\frac{3}{4}}}$$

$$= \frac{\psi_1^3}{\psi_2^3} \text{ (per la 29)).}$$

10. Le 13), 14), 15), 17) diventano, ponendovi al posto di ψ, ψ_1 i loro rispettivi **valori** ε, ε_1 dati dalle 31), 32):

34) $$\alpha = \frac{I_{a_1}^{-\frac{1}{4}} I_{b_1}^{\frac{3}{4}}}{I_a^{-\frac{1}{4}} I_b^{\frac{3}{4}} - I_{a_1}^{-\frac{1}{4}} I_{b_1}} M\delta_1^2$$

35) $$\beta = \frac{I_{a_1}^{\frac{3}{4}} I_{b_1}^{-\frac{1}{4}}}{I_a^{\frac{3}{4}} I_b^{-\frac{1}{4}} - I_{a_1}^{\frac{3}{4}} I_{b_1}^{-\frac{1}{4}}} M\delta_1^2$$

36) $$\alpha_1 = \frac{I_a^{-\frac{1}{4}} I_b^{\frac{3}{4}}}{I_a^{-\frac{1}{4}} I_b^{\frac{3}{4}} - I_{a_1}^{-\frac{1}{4}} I_{b_1}^{\frac{3}{4}}} M\delta_1^4$$

37) $$\beta_1 = \frac{I_a^{\frac{3}{4}} I_b^{-\frac{1}{4}}}{I_a^{\frac{3}{4}} I_b^{-\frac{1}{4}} - I_{a_1}^{\frac{3}{4}} I_{b_1}^{-\frac{1}{4}}} M\delta_1^2.$$

Valendosi delle 34), 36) si possono stabilire relazioni corrispondenti alle 23), 24), 25). Inoltre ricavasi (dividendo la 36) per la 34), e la 37) per la 35):

$$\alpha_1 = \frac{I_{a_1}^{\frac{1}{4}} I_b^{\frac{3}{4}}}{I_a^{\frac{1}{4}} I_{b_1}^{\frac{3}{4}}} \alpha$$

$$\beta_1 = \frac{I_a^{\frac{3}{4}} I_{b_1}^{\frac{1}{4}}}{I_{a_1}^{\frac{3}{4}} I_b^{\frac{1}{4}}} \beta.$$

Deduciamo

38) $$\alpha_1 \beta_1 = c \frac{1}{\sqrt{I_{a_1} I_{b_1}}},$$

indicando con c una costante.

Similmente

$$\alpha_2 = \frac{I_{a_2}^{\frac{1}{4}} I_b^{\frac{3}{4}}}{I_a^{\frac{1}{4}} I_{b_2}^{\frac{3}{4}}} \alpha \quad , \quad \beta_2 = \frac{I_a^{\frac{3}{4}} I_{b_2}^{\frac{1}{4}}}{I_{a_2}^{\frac{3}{4}} I_b^{\frac{1}{4}}} \beta;$$

epperò

$$\alpha_2 = \frac{I^{\frac{1}{4}}_{a_2} I^{\frac{3}{4}}_{b_1}}{I^{\frac{1}{4}}_{a_1} I^{\frac{3}{4}}_{b_2}} \alpha_1$$

$$\beta_2 = \frac{I^{\frac{3}{4}}_{a_1} I^{\frac{1}{4}}_{b_2}}{I^{\frac{3}{4}}_{a_2} I^{\frac{1}{4}}_{b_1}} \beta_1$$

11. Analogamente alla (38) sussiste la

$$\alpha_2 \beta_2 = c \frac{1}{\sqrt{I_{a_2} I_{b_2}}};$$

perciò

$$\frac{\alpha_2 \beta_2}{\alpha_1 \beta_1} = \frac{\sqrt{I_{a_1} I_{b_1}}}{\sqrt{I_{a_2} I_{b_2}}} = \frac{\psi_1^2}{\psi_2^2}.$$

Si ha dunque

$$\alpha_2 = \frac{\psi_1^2 \alpha_1 \beta_1}{\psi_2^2 \beta_2}. \tag{39}$$

Confrontando la (39) colla (20), si ricava

$$\beta_2 = \frac{\psi_1^3 I_{b_2}}{\psi_2^3 I_{b_1}} \beta_1. \tag{40}$$

Analogamente

$$\alpha_2 = \frac{\psi_1^3 I_{a_2}}{\psi_2^3 I_{a_1}} \alpha_1. \tag{41}$$

Notando che la (39) equivale alla

$$\alpha_2 = \frac{\sqrt{I_{a_1} I_{b_1}}}{\sqrt{I_{a_2} I_{b_2}}} \frac{\alpha_1 \beta_1}{\beta_2} \tag{42}$$

e confrontando la (42) colla (20), si deduce eziandio

$$\beta_2 = \frac{\psi_1 \sqrt{I_{a_1} I_{b2}}}{\psi_2 \sqrt{I_{a_2} I_{b1}}} \beta_1.$$

E similmente

$$\alpha_2 = \frac{\Psi_1 \sqrt{I_{a_2} I_{b_1}}}{\psi_2 \sqrt{I_{a_1} I_{b_2}}} \alpha_1.$$

Dividendo la (40) per la (20), e la (41) per la (21), si ottiene

$$\frac{\psi_1^4}{\psi_2^4} = \frac{I^2_{a_1}}{I^2_{a_2}} \; \frac{\alpha_2 \, \beta_1}{\alpha_1 \, \beta_2}$$

$$= \frac{I^2_{b_1}}{I^2_{b_2}} \; \frac{\alpha_1 \, \beta_2}{\alpha_2 \, \beta_1}$$

12. Come caso speciale delle (40), (41):

$$\alpha_1 = \frac{\psi^3 \; I_{a_1}}{\psi_1^3 \; I_a} \, \alpha \quad , \quad \beta_1 = \frac{\psi^3 \; I_{b_1}}{\psi_1^3 \; I_b} \, \beta .$$

Dunque i rapporti $\frac{I_{a_1}}{\psi_1^3}$, $\frac{I_{b_1}}{\psi_1^3}$ crescono man mano ci scostiamo dal centro di gravità. Ossia, supponendo o_2 più distante che o_1 dal baricentro,

$$\frac{\psi_1^3}{I_{a_1}} > \frac{\psi_2^3}{I_{a_2}} \quad , \quad \frac{\psi_1^3}{I_{b_1}} > \frac{\psi_2^3}{I_{b_2}}$$

$$\left(\frac{\psi_1}{\psi_2}\right)^3 > \frac{I_{a_1} + I_{b_1}}{I_{a_2} + I_{b_2}}$$

(43) $$\frac{\psi_1}{\psi_2} > \sqrt[3]{\frac{Q_1}{Q_2}},$$

indicando, come già si disse, con Q_1, Q_2 i momenti d'inerzia delle aree A_1, A_2 rispetto ad s.

Pertanto, a motivo delle (11), (43), risulta

(44) $$\sqrt[3]{\frac{Q_1}{Q_2}} < \frac{\psi_1}{\psi_2} < \frac{Q_1}{Q_2}.$$

Dalla (27):

(45) $$M\delta_1^2 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1^3} \; \frac{D_1}{I_a \, I_b}.$$

Quindi il rapporto $\frac{D_1}{\varepsilon_1^3}$ cresce (in valore assoluto) più ci allontaniamo dal

baricentro. Ossia

$$\frac{D_1}{\varepsilon_1^3} < \frac{D_2}{\varepsilon_2^3} \quad , \quad \frac{D_1}{D_2} < \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^3;$$

epperò, in virtù della (44), possiamo anche scrivere

$$\sqrt[3]{\frac{D_1}{D_2}} < \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} < \frac{Q_1}{Q_2}.$$

Inoltre dalla (31) si deduce che eziandio il rapporto $\dfrac{D_1}{(I_{a_1}, I_b)}$ aumenta man mano ci allontaniamo dal baricentro. (Come si vedrà, $D_1 > 0$).

13. Valendoci della (45), la (15) diventa

$$\alpha_1 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1^2} \frac{D_1}{I_a(\varepsilon_1 I_b - \varepsilon I_{b_1})}. \tag{46}$$

Analogamente

$$\beta_1 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1^2} \frac{D_1}{I_b(\varepsilon_1 I_a - \varepsilon I_{a_1})}. \tag{47}$$

Dividendo la (46) per la (13)

$$\alpha_1 = \frac{D_1}{I_a I_{b_1} \varepsilon_1^2 M\delta_1^2} \alpha. \tag{48}$$

Dividendo la (47) per la (14):

$$\beta_1 = \frac{D_1}{I_{a_1} I_b \varepsilon_1^2 M\delta_1^2} \beta. \tag{49}$$

Tanto dalla (48) quanto dalla (49) si ricava $D_1 > 0$, ossia

$$I_{a_1} I_b - I_a I_{b_1} > 0;$$

cioè, ponendo al posto di y i loro valori,

$$\frac{a}{b} > \frac{a_1}{b_1} \tag{50}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^\theta > \left(\frac{a_1}{b_1}\right)^\theta \tag{51}$$

(θ = numero qualunque, > 0).

Dalla (51):

$$\frac{a^\theta - b^\theta}{b^\theta} > \frac{a_1^\theta - b_1^\theta}{b_1^\theta}$$

ed *a fortiori*

$$\frac{a^\theta - b^\theta}{b_1^\theta} > \frac{a_1^\theta - b_1^\theta}{b_1^\theta}$$

ossia

(52) $$a^\theta - b^\theta > a_1^\theta - b_1^\theta :$$

relazione che comprende come caso speciale quella già stabilita al n.° 2:

$$\varepsilon > \varepsilon_1 .$$

14. Inoltre dalla (50):

$$\frac{a^2}{b} > \frac{aa_1}{b_1}$$

ed *a fortiori*

$$\frac{a^2}{b} > \frac{a_1^2}{b_1},$$

ossia

$$R > R_1 ,$$

chiamando R, R_1 i raggi di curvatura delle 2 anzidette ellissi (di centri o, o_1) negli estremi dei loro assi minori.

Siccome in tali estremi i raggi di curvatura delle due ellissi sono massimi, deduciamo: *Si considerino varie fra le menzionate ellissi di centri* o, o_1, o_2,... (*il punto* o *coincidendo col baricentro del sistema*). *L'ellisse in cui il raggio di curvatura raggiunge il valore massimo è quella che ha per centro* o.

15. Notiamo ancora che dalla (52) ricavasi

$$a^\theta (a^\theta - b^\theta) > a^\theta (a_1^\theta - b_1)$$

ed a maggior ragione

$$a^{2\theta} - (ab)^\theta > a_1^{2\theta} - (a_1 b_1)^\theta$$

Quindi

(53) $$U^\theta - A^\theta > U_1^\theta - A_1^\theta ,$$

indicando con U, U_1 le aree dei cerchi di raggi a, a_1, e nuovamente con A, A_1 le aree delle suddette ellissi di centri o, o_1.

Moltiplichiamo per h^0 ambo i membri della (53), h essendo, come al N. 3, il semiasse (giacente su s) dell'ellissoide d'inerzia relativo ad un punto qualunque dell'asse principale centrale d'inerzia s. Ricavasi

$$W^0 - V^0 > W_1^0 - V_1^0,$$

chiamando W, W_1 i volumi degli ellissoidi generati dalla rotazione intorno ad s delle 2 ellissi di semiassi a, h, a_1, h (sezioni dei 2 ellissoidi d'inerzia relativi al baricentro o e ad un punto qualsiasi o_1 di s), ed indicando nuovamente con V, V_1 i volumi di questi 2 ellissoidi d'inerzia.

Invece, moltiplicando la (53) successivamente per a^0, b^0, si ottengono 2 disuguaglianze che *a fortiori* dànno luogo alle 2 seguenti:

$$F^0 - G^0 > F_1^0 - G_1^0 \tag{54}$$

$$G^0 - H^0 > G_1^0 - H_1^0, \tag{55}$$

indicando con F, F_1 i volumi delle sfere di raggi a, a_1; con G, G_1 i volumi degli ellissoidi generati dalla rotazione delle 2 superficie ellittiche A, A_1 intorno ai loro assi minori; con H, H_1 i volumi degli ellissoidi generati dalla rotazione delle medesime 2 superficie intorno ai loro assi maggiori.

Quindi anche (dalle (54), (55)):

$$F^0 - H^0 > F_1^0 - H_1^0.$$

EVALUATION D'UNE INTÉGRALE DÉFINIE

NOTE

DE

M. LERCH à Fribourg (Suisse).

---

1. Il s'agit de l'intégrale suivante

$$\Phi(a\,,\,b) = \int_0^\infty \operatorname{arctg}\frac{a}{x}\cdot\operatorname{arctg}\frac{b}{x}\,dx\,, \tag{1}$$

dans laquelle a et b sont deux constantes réelles et positives.

Faisant d'abord $a = b$, et substituant $x = az$, il vient évidemment

$$\Phi(a\,,\,a) = a\mathrm{K}\,, \tag{2}$$

où K désigne la constante numérique $\Phi(1\,,\,1)$.

Cela étant, je considère au lieu de Φ l'intégrale suivante

$$\mathrm{S} = \int_0^\infty \left(\operatorname{arctg}\frac{a}{x} + \operatorname{arctg}\frac{b}{x}\right)^2 dx\,, \tag{3}$$

dont la valeur est évidemment

$$\mathrm{S} = (a+b)\mathrm{K} + 2\,\Phi(a\,,\,b). \tag{4}$$

Or, on a

$$\operatorname{arctg}\frac{a}{x} + \operatorname{arctg}\frac{b}{x} = \operatorname{arctg}\frac{(a+b)x}{x^2 - ab} + \begin{cases} \pi, & \text{si } x < \sqrt{ab} \\ 0, & \text{si } x > \sqrt{ab} \end{cases};$$

à cause de la discontinuité de cette somme, il faudra décomposer l'intégrale (3) en deux autres dont les limites sont respectivement O et $\sqrt{ab}$, puis $\sqrt{ab}$ et l'in-

fini. Dans la première intégrale la somme des deux arctangentes étant

$$\pi - \operatorname{arctg}\frac{(a+b)x}{ab-x^2},$$

nous aurons

$$S = \int_0^{\sqrt{ab}} \left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{(a+b)x}{ab-x^2}\right)^2 dx + \int_{\sqrt{ab}}^{\infty} \left(\operatorname{arctg}\frac{(a+b)x}{x^2-ab}\right)^2 dx.$$

En remplaçant la fonction sous le signe somme de la première intégrale par le trinôme équivalent, on obtient trois intégrales dont l'une pourra se réunir avec la deuxième intégrale de la dernière formule, et il vient

$$S = \pi^2\sqrt{ab} - 2\pi\int_0^{\sqrt{ab}} \operatorname{arctg}\frac{(a+b)x}{ab-x^2}\cdot dx. + \int_0^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{(a+b)x}{x^2-ab}\right)^2 dx.$$

J'observe maintenant que l'on a, pour $x < \sqrt{ab}$:

$$\operatorname{arctg}\frac{(a+b)x}{ab-x^2} = \operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \operatorname{arctg}\frac{x}{b},$$

et en faisant usage de l'intégration par parties qui donne

$$\int \operatorname{arctg}\frac{x}{a}dx = x \operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\log(a^2+x^2),$$

j'en tire cette formule auxiliaire

$$\int_0^{\sqrt{ab}} \operatorname{arctg}\frac{(a+b)x}{ab-x^2}\,dx = \sqrt{ab}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{b}{a}} + \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$$

$$-\frac{a}{2}\log\frac{a^2+ab}{a^2} - \frac{b}{2}\log\frac{b^2+ab}{b^2}$$

ou bien

$$= \frac{\pi}{2}\sqrt{ab} - \frac{a+b}{2}\log(a+b) + \frac{a}{2}\log a + \frac{b}{2}\log b.$$

Substituant cette valeur dans la récente expression de S, nous aurons

$$S = \pi\log\frac{(a+b)^{a+b}}{a^a b^b} + \int_0^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{(a+b)x}{x^2-ab}\right)^2 dx.$$

Pour simplifier l' intégrale qui figure encore au second membre, je pose

$$x = (a+b)z \; ; \; m = \frac{\sqrt{ab}}{a+b} ; \text{ elle devient}$$

$$J = (a+b)\int_0^\infty \left(\operatorname{arctg}\frac{z}{z^2-m^2}\right)^2 dz.$$

Substituant ensuite

$$\frac{z^2-m^2}{z} = x \, ,$$

les limites deviendront $-\infty$ et ∞, et puisque alors

$$z = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2+4m^2}) \, ,$$

$$dz = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+4m^2}}\right)dx \, ,$$

nous aurons

$$J = \frac{a+b}{2}\int_8^\infty \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)^2\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+4m^2}}\right)dx.$$

Observant que l' intégrale de la fonction impaire

$$\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+4m^2}}$$

est nulle, on a enfin

$$J = (a+b)\int_0^\infty \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)^2 dx = (a+b)K.$$

La dernière expression de S est donc

$$S = \pi \log \frac{(a+b)^{a+b}}{a^a b^b} + (a+b)K \, ,$$

et en la comparant avec la valeur (4) nous aurons la formule de Bierens de Haan

$$\Phi(a\,,b) = \frac{\pi}{2}\log\frac{(a+b)^{a+b}}{a^a b^b} \tag{5}$$

que j' avais établie en 1899 d' une autre manière [1].

---

[1] Journal (časopis) de la Société mathématique de Prague, T. XXIX, p. 39

2. Je vais faire usage du résultat obtenu pour tirer une conséquence de l'intégrale analogue à S

$$T = \int_0^\infty \left(\operatorname{arctg}\frac{a}{x} - \operatorname{arctg}\frac{b}{x}\right)^2 dx \tag{6}$$

dont la valeur est

$$T = (a+b)K - 2\,\Phi(a\,,\,b).$$

L'identité élémentaire toujours vraie

$$\operatorname{arctg}\frac{a}{x} - \operatorname{arctg}\frac{b}{x} = \operatorname{arctg}\frac{(a-b)x}{x^2+ab}$$

permet d'écrire au lieu de (6)

$$T = \int_0^\infty \left(\operatorname{arctg}\frac{(a-b)x}{x^2+ab}\right)^2 dx$$

ou bien, si l'on change x en $(a-b)x$ et supposant $a > b$,

$$T = (a-b)\int_0^\infty \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{x^2+n^2}\right)^2 dx\,, \tag{7}$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$n = \frac{\sqrt{ab}}{a-b}.$$

Cela étant, décomposons l'intégrale (7) en deux autres

$$\frac{T}{a-b} = J_1 + J_2\,, \tag{8}$$

où

$$J_1 = \int_0^n \left(\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_1^2+n^2}\right)dx_1\,,\quad J_2 = \int_n^\infty \left(\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_2^2+n^2}\right)^2 dx_2\,,$$

et transformons ces dernières-ci par les substitutions respectives

$$\frac{x_1^2+n^2}{x_1} = z_1\,,\ (x_1 < n)\,,\quad \frac{x_2^2+n^2}{x_2} = z_2\,,\ (x_2 > n)\,;$$

on aura

$$x_1 = \frac{1}{2}(z_1 - \sqrt{z_1^2 - 4n^2}) \ , \ 2n \leqq z_1 \leqq \infty ,$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(z_2 + \sqrt{z_2^2 - 4n^2}) \ , \ 2n \leqq z_2 \leqq \infty ,$$

et par conséquent

$$J_1 = -\frac{1}{2}\int_{2n}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{z}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 - 4n^2}}\right)dz ,$$

$$J_2 = \frac{1}{2}\int_{2n}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{z}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 - 4n^2}}\right)dz ;$$

la formule (8) devient de la sorte

$$\frac{T}{a-b} = \int_{2n}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{z}\right)^2 \frac{zdz}{\sqrt{z^2 - 4n^2}} ,$$

et on a cette formule nouvelle

$$\int_{2n}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{z}\right)^2 \frac{zdz}{\sqrt{z^2 - 4n^2}} = \frac{a+b}{a-b}K - \frac{2\Phi(a\,,b)}{a-b} ,$$

où

$$n = \frac{\sqrt{ab}}{a-b} .$$

On peut prendre, sans nuire à la généralité du résultat, $a = 1$, $b = q$, et en substituant les valeurs

$$K = \pi \log 2 \ , \ 2\Phi(1 \ , \ q) = \pi \log \frac{(1+q)^{1+q}}{q^q} ,$$

le second membre devient

$$\frac{\pi}{1-q} \log \frac{q^q}{\left(\frac{1+q}{2}\right)^{b+1}} ,$$

et la lettre n aura la signification suivante :

$$n = \frac{\sqrt{q}}{1-q} . , \quad 0 < q < 1.$$

Dans cette écriture, notre résultat devient

$$\int_{2n}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{z}\right)^2\frac{zdz}{\sqrt{z^2-4n^2}}=\frac{\pi}{1-q}\log\frac{q^q}{\left(\frac{1+q}{2}\right)^{1+q}}.$$

Faisant $z=\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{2n}=r$, on pourra l'écrire

$$(9)\qquad \int_0^r\left(\frac{\operatorname{arctg}x}{x}\right)^2\frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}}=\frac{2\pi\sqrt{q}}{(1-q)^2}\log\frac{q^q}{\left(\frac{1+q}{2}\right)^{1+q}}$$

où l'on a posé

$$\sqrt{q}=-r+\sqrt{r^2+1}\,,$$

r désignant une quantité positive arbitraire.

De cette intégrale on en déduira une autre en passant aux valeurs complexes de la variable r. Pour ce but je change x en rx pour avoir la forme suivante de l'équation (9)

$$\int_0^1(\operatorname{arctg}rx)^2\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}=\frac{2\pi r^2\sqrt{q}}{(1-q)^2}\left[q\log q-(1+q)\log\frac{1+q}{2}\right].$$

Considérée comme fonction analytique de la variable complexe r, l'intégrale qui constitue le premier membre reste synectique dans le plan affecté des deux *coupures* $(i\ldots\infty i)$ et $(-i\ldots-\infty i)$, segments de l'axe imaginaire. Dans la même région reste synectique la fonction algébrique

$$\sqrt{q}=-r+\sqrt{r^2+1}\,,$$

le radical y conservant le signe positif de sa partie réelle. En designant par α un angle réel entre zéro et $\frac{\pi}{2}$, on pourra donc prendre $r=i\sin\alpha$, ce qui exige qu'on fait

$$\sqrt{q}=e^{-\alpha i}.$$

Observant que

$$\operatorname{arctg}rx=\frac{1}{2i}\log\frac{1+irx}{1-irx}\,,$$

le passage anoncé aux imaginaires donnera

$$(10)\qquad \int_0^1 \left(\log\frac{1+x\sin\alpha}{1-x\sin\alpha}\right)^2 \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} = 4\pi(\alpha\sin\alpha + \cos\alpha\log\cos\alpha),$$

$$\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right).$$

Si l'on pose $\sin\alpha = a$, en transformant en même temps l'intégrale par la substitution $x = \frac{x'}{a}$, il vient

$$(10^*)\quad \int_0^a \left(\log\frac{1+x}{1-x}\right)^2 \cdot \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{4\pi}{a^2}\left(a\arcsin a + \sqrt{1-a^2}\log\sqrt{1-a^2}\right).$$

Je veux m'arrêter un moment au cas particulier de $a = 1$; en lui appliquant les substitutions successives

$$x = \cos 2\varphi \quad , \quad \operatorname{tg}\varphi = z,$$

on parvient à la formule

$$\int_0^1 \frac{1+z^2}{(1-z^2)^2}(\log z)^2\,dz = \frac{\pi^2}{4}$$

qui d'ailleurs se vérifie aisément.

SUI COMPLESSI LINEARI DI RETTE NEGLI IPERSPAZI

NOTA

DI

FRANCESCO PALATINI

Il sig. S. Kantor nel suo lavoro *Theorie der linearen Strahlencomplexe im Raume von* r *Dimensionen* (1) pone le basi di una trattazione con metodo puramente geometrico della teoria dei complessi lineari di rette negli iperspazi. Un contributo a siffatta teoria dal punto di vista geometrico è fornito da una nostra recente Nota (2), nella quale viene determinato l'ordine della varietà formata dall'insieme dei complessi degeneri di data specie, facendo uso per brevità di un risultato sui fasci di complessi noto finora soltanto per via analitica (3). Ora con la presente Nota ci proponiamo di recare un nuovo contributo all'anzidetta teoria ponendo le basi di una trattazione geometrica dei fasci di complessi lineari di rette negli iperspazi, (4) dopo aver richiamato, per comodità del lettore, le nozioni fondamentali su tali complessi, approfittando anche di quest' occasione per rettificare un teorema del Kantor sugli spazi totali di un complesso degenere, e per fissare meglio certe particolarità di cui dovremo servirci nel seguito di questo lavoro.

1. Chiamasi *complesso lineare completo di rette* (e d'ora in poi questo intenderemo di indicare quando diremo semplicemente complesso) in uno spazio S_n l'insieme di ∞^{2n-3} rette, tale d'avere una retta comune con ogni fascio generico di rette, o ciò che è lo stesso, tale che le sue rette poste in un piano vi formino

---

(1) J. für Math., vol. 118, 1897.

(2) L' *ordine della varietà che annulla i subdeterminanti* ecc. Atti Acc. Lincei, 1902.

(3) Il risultato al quale qui si accenna è quello che in un fascio generico di complessi di uno spazio di dimensione $2q+1$ ve ne sono $q+1$ di singolari.

(4) Quanto alla teoria analitica dei fasci di complessi vedasi E. v. Weber, *Ueber Schaaren von Bilinearformen,* Sitzungsb. der k. b. Ak. der Wiss. zu München, t. 28, 1898.

un fascio; esso è determinato da $\frac{(n+2)(n-1)}{2}$ rette generiche. Un complesso determina in S_n una reciprocità nella quale ogni punto (*polo*) giace nell'iperpiano (*polare*) che gli corrisponde (cioè un *sistema nullo*), essendo l'iperpiano che corriponde ad un dato punto P quello formato dai punti delle rette del complesso passanti per P. Nel caso di n dispari avviene che ad ogni punto (se il complesso è generico) corrisponde un determinato iperpiano e viceversa; invece nel caso di n pari esiste un *punto singolare* O (che chiamasi *centro* del complesso) per il quale passa l'iperpiano polare di ogni altro punto; tutte le rette passanti per esso appartengono al complesso, ed il suo iperpiano polare è indeterminato. Con ogni stella generica che abbia per centro un punto P e sia posta in uno spazio ad l dimensioni, il complesso ha in comune una stella di centro P e posta in uno spazio ad $l-1$ dimensioni; se oltre a siffatta stella esso ha in comune con la data un altro raggio, questa appartiene tutta al complesso.

Vi sono poi in qualsiasi spazio *complessi degeneri*, cioè dotati di uno spazio di dimensione $n-2r$ di punti singolari, cosicchè ogni retta ad esso incidente appartiene al complesso. Per $n=2q$ vi sono complessi (oltre a quello generico dotato di un punto singolare) aventi uno *spazio-centro* (spazio di punti singolari) di dimensione $2, 4, \ldots, 2(q-1)$, e per $n=2q+1$ ve ne sono di aventi spazio-centro di dimensione $1, 3, \ldots, 2q-1$. Ne segue che se in uno spazio $[2q+\varepsilon]$ (¹) ($\varepsilon = 0, 1$) vi è uno spazio di punti singolari di dimensione $2\lambda-1+\varepsilon$, ve n'è pure uno di dimensione $2\lambda+\varepsilon$ (passante per quello). Si ha inoltre che se un complesso possiede h punti singolari, tutto lo spazio $[h-1]$ da essi determinato è formato di punti singolari.

Sono degni di particolare attenzione gli *spazi totali*, cioè quelli di cui tutte le rette appartengono al complesso. Sono essi i *vollständige Räume* del Kantor, il quale nella citata Memoria trova che in un complesso generico di $[2q+\varepsilon]$ non vi sono spazi totali di dimensione maggiore di q e che ve n'è un numero $\frac{(q-\lambda+1)(q+3\lambda+2\varepsilon)}{2}$ volte infinito di dimensione $q-\lambda$ (la variabilità di λ incominciando da 0). Essi sono pure i *thoroughly Null Spaces* di Young (²), il quale determina parimenti (§ 23) la dimensione dell'infinità degli spazi totali delle varie possibili dimensioni di un complesso generico. Ponendo nell'ultima espressione scritta $2q+\varepsilon=n$, $q-\lambda=p$, abbiamo che la dimensione dell'infinità dei $[p]$ totali di un complesso generico di $[n]$ è data da $\frac{(p+1)(2n-3p)}{2}$.

Venendo ora agli spazi totali di un complesso dotato di un $[n-2r]$-centro, della infinità loro non trovasi alcun cenno nel citato lavoro del Young, mentre

---

(¹) Adottando una notazione introdotta dallo Schubert, indicheremo con $[r]$ uno spazio di dimensione r.

(²) *On the Null Spaces of a One-System*, ecc. Proc. of the London Math. Soc., vol. XXX, 1899.

quanto si trova esposto a questo riguardo dal Kantor va corretto; per conseguenza dovremo su essi fermarci alquanto.

2. Indicando con $[n-2r]$ il centro del dato complesso degenere, l'$S_{n-1}^{(P)}$ polare di un punto P passa per esso; preso in codesto iperpiano un punto P', il suo $S_{n-1}^{(P')}$ polare passa per P (perchè PP' è una retta del complesso), quindi taglia $S_{n-1}^{(P)}$ in un $S_{n-2}^{(PP')}$ passante per $[n-2r]$, P, P'. Preso in questo spazio un punto P'', il suo $S_n^{(P'')}$ polare passa per P, P', quindi taglia $S_{n-2}^{(PP')}$ in un $S_{n-3}^{(PP'P'')}$ passante per $[n-2r]$, P, P', P''. Così continuando si arriva ad un $S_{n-k-1}^{(PP'\dots P^{(k)})}$ passante per $[n-2r]$, P, P'', ..., $P^{(k)}$, e tale che preso in esso un punto $P^{(k+1)}$, il suo iperpiano polare passa per $[n-2r]$, P, P', ..., $P^{(k)}$, $P^{(k+1)}$. Ora se questi elementi sono tanti almeno da determinare S_{n-k-1}, l'iperpiano polare di $P^{(k+1)}$ passa per tale spazio, ogni retta del quale appartiene dunque al complesso dato, come si vede variando nel medesimo il punto $P^{(k+1)}$, quindi quel S_{n-k-1} è uno spazio totale. Ciò avviene dunque se è $n-2r+k+2 \geq n-k$, cioè $k \geq r-1$, quindi il minimo valore di k è $r-1$. Ne segue che *passano per* [n − 2r] *degli spazi totali di dimensione* n − r. Di qui risulta intanto che per $n=2q+1$, $n-2r=2\lambda+1$ e quindi $r=q-\lambda$, esistono spazi totali di dimensione $q+\lambda+1$, contrariamente a quanto afferma il Kantor nel teor. XLV della citata Memoria [1]. In ciò che segue verrà cercata la dimensione dell'infinità degli spazi totali delle diverse possibili dimensioni, non essendo esatta quella data dal citato teorema.

Se gli iperpiani polari di h *punti indipendenti* $A_1, A_2, \dots, A_h$ *dello spazio* [n] *passano per un* [n − k], *per questo passa anche l'iperpiano polare di ogni altro punto del* [h − 1] *determinato da quegli* h *punti.* Difatti preso un punto M di $[n-k]$, le rette del complesso passanti per esso riempiono un $[n-1]$ (almeno), al quale appartengono le rette $A_1M, \dots, A_hM$, quindi appartiene a questo $[n-1]$ la stella (di rette del complesso) di centro M e direttrice $[h-1]$. Ne viene che preso un punto qualunque A_{h+1} di $[h-1]$, la A_{h+1} M appartiene al complesso, e perciò l'iperpiano polare di A_{h+1} passa per M che è un punto qualunque di $[n-k]$. In particolare *se gli iperpiani polari di* n + 1 *punti indipendenti di* [n] *passano per un* [n − k], *per questo passa l'iperpiano polare di ogni altro punto di* [n], *ed esso è perciò uno spazio di punti singolari.*

Si abbia ora un complesso dotato di un $[n-r+l]$ totale. Prendo in esso $n-r+l+1$ punti indipendenti e fuori di esso altri $r-l$ punti generici. Gli iperpiani polari di questi ultimi si tagliano in un $[n-r+l]'$ che incontra lo spazio totale dato in un $[n-2r+2l]$ (almeno); gli iperpiani polari poi degli $n-r+l+1$ punti presi in $[n-r+l]$ passano tutti per questo, e quindi anche per $[n-2r+2l]$ per il quale vengono così a passare gl'iperpiani polari di $(n-r+l+1)+(r-l)=n+1$ punti indipendenti di $[n]$, per cui il complesso dato

---

[1] P. e. secondo l'enunciato di quel teorema si avrebbe per $q=1$, $\lambda=0$ che nel nostro spazio non esistono piani totali in un complesso speciale, mentre lo sono tutti quelli che passano per l'asse.

è dotato di un $[n-2r+2l]$ (almeno) di punti singolari. Dunque *se un complesso è dotato di* $[n-2r]$*-centro (soltanto) non può possedere spazi totali di dimensione maggiore di* $n-r$; *questi ultimi poi passano per l'*$[n-2r]$*-centro.*

Ora fissato in $[n]$ un $[2r-1]$, esso è tagliato dal complesso dato, che supporremo dotato di $[n-2r]$-centro, in un complesso lineare, ed ognuno degli spazi totali $[n-r]$ taglia $[2r-1]$ in un $[r-1]$ totale per il complesso ottenuto. Viceversa fissato uno degli $[r-1]$ totali di questo complesso, si vede che per il dato è totale l'$[n-r]$ che lo projetta da $[n-2r]$. Difatti presi i punti $P, P', \ldots, P^{(k)}$, dove k sia eguale ad $r-1$, in detto $[r-1]$, lo spazio $S_{n-k-1}^{(pp'\ldots p^{(k)})}$ che si ottiene nel modo indicato al principio di questo numero, e che è un $[n-r]$ totale, passa per $[r-1]$ e per $[n-2r]$, cioè è appunto l'$[n-r]$ che projetta quel $[r-1]$ da $[n-2r]$. Abbiamo dunque: *Se un complesso di* $[n]$ *ha un* $[n-2r]$*-centro, i suoi spazi totali di dimensione* $n-r$ *sono quelli che projettano dal centro gli* $[r-1]$ *totali del complesso in cui il dato è tagliato da un* $[2r-1]$, *quindi tali spazi totali sono* $\infty^{\frac{r(r+1)}{2}}$ (n.° 1 in fine).

Premesso questo, vediamo quanti spazi totali di dimensione $n-r-t$ vi sono in un complesso dotato di $[n-2r]$-centro, spazi che sono tutti contenuti negli $[n-r]$ totali. Fissato un $[n-r]$ totale, quindi passante per $[n-2r]$, e preso in esso un $[n-r-t]$ generico, se è $n-2r-t+1 \geq 0$, l'unico spazio di dimensione $n-r$ passante per $[n-2r]$ e il detto $[n-r-t]$ è l'$[n-r]$ in cui questo è stato preso, quindi essendo $\infty^{\frac{r(r+1)}{2}}$ gli spazi totali $[n-r]$, ed essendovi in ciascuno di essi $\infty^{(n-r-t+1)t}$ spazi $[n-r-t]$, ognuno generico dei quali appartiene ad un solo di quegli $[n-r]$, ne viene che *quando sia* $n-2r-t+1 \geq 0$, *la dimensione dell'infinità degli spazi totali di dimensione* $n-r-t$ *è* $\frac{r(r+1)}{2}+(n-r-t+1)t$.

Se è $n-2r-t+1<0$, l'$[n-r-t]$ preso in un $[n-r]$ totale individua con $[n-2r]$ un $[2n-3r-t+1]$ totale (dove per l'ipotesi fatta è $2n-3r-t+1<n-r$), il quale taglia un $[2r-1]$ in un $[n-r-t]'$ totale per il complesso C' in cui quel $[2r-1]$ è tagliato dal dato C; viceversa ogni $[n-r-t]'$ totale per C' è projettato da $[n-2r]$ in un $[2n-3r-t+1]$ totale per C. Allora siccome gli $[n-r-t]'$ totali per C' formano (n.° 1 in fine) un'infinità di dimensione

$$\frac{(n-r-t+1)(7r-3n+3t-2)}{2},$$

altrettanto avviene per i $[2n-3r-t+1]$ totali di C, passanti per $[n-2r]$; e siccome gli $[n-r-t]$ di un siffatto $[2n-3r-t+1]$ formano un'infinità di dimensione $(n-r-t+1)(n-2r+1)$, ed ognuno generico di essi appartiene ad un solo dei nostri $[2n-3r-t+1]$, così abbiamo che *quando sia* $n-2r-t+1<0$, *gli* $[n-r-t]$ *totali del dato complesso formano un'infinità di dimensione*

$$\frac{(n-r-t+1)(7r-3n+3t-2)}{2}+(n-r-t+1)(n-2r+1)=$$

$$=\frac{(n-r-t+1)(3r-n+3t)}{2}.$$

Siccome quest'ultima espressione può anche scriversi così

$$\frac{r(r+1)}{2}+(n-r-t+1)t-\frac{(2r-n+t-1)(2r-n+t)}{2},$$

possiamo concludere: *La dimensione dell'infinità degli spazi totali di dimensione* n - r - t *di un complesso dotato di* [n — 2r]-*centro è sempre data da*

$$\frac{r(r+1)}{2}+(n-r-t+1)t-\frac{(2r-n+t-1)(2r-n+t)}{2},$$

quando si convenga di porre eguale a zero l' espressione 2r — n + t — 1 *qualora essa risulti negativa.*

Già che ci troviamo nell'argomento degli spazi totali noteremo ancora, perchè ne avremo bisogno in seguito, che *i* [q] *totali comuni a due complessi generici di un* [2q + 1] *sono tali che per ogni punto generico ne passa uno e che due complessi generici di un* [2q] *hanno un solo* [q] *totale comune.* Quanto alla prima parte se si hanno in S_5 due complessi C , C′, gli iperpiani polari di un punto A si tagliano in un S_3, il quale sega C , C′ in due complessi C_1 , C'_1 aventi A per punto singolare, e quindi (n.° 1) dotati di rette-centro b , b' passanti per A, ed il piano bb' è il solo piano totale comune ai complessi dati passante per A. Se si hanno in S_7 due complessi C , C′, gl' iperpiani di un punto A si tagliano in un S_5 che incontra i complessi dati in due C_1 , C'_1 dotati di rette-centri b , b passanti per A. Allora un S_3 di S_5 taglia C_1 , C'_1 in due complessi C_2 , C'_2 ed il piano bb' in un punto per il quale passa una retta comune a C_2 , C'_2, retta che vien projettata da b , b' in un unico S'_3 passante per bb' e che è il solo spazio totale a tre dimensioni comune ai complessi dati passante per A. Ed ora procedendo col metodo d' induzione si arriva facilmente alla conclusione preannunciata. Quanto alla seconda parte, dati due complessi C , C′ di centri A , A′ in un [2q], essi tagliano un [2q — 1] in due complessi che hanno in comune un solo [q—1] totale passante per il punto d'incontro di [2q—1] con AA′, e questo [q—1] vien projettato da AA′ nell'unico [q] totale comune ai due complessi dati.

3. Dal secondo teorema del n.° 2 si deduce che gli iperpiani polari dei punti di uno spazio generico [h] di [n] passano tutti per l'[$n-h-1$] che è intersezione di $h+1$ di essi; viceversa poi si vede subito che gli iperpiani polari dei punti di questo [$n-h-1$] passano tutti per [h]. Due spazi siffatti chiamansi *reciproci.* È chiaro che dati due spazi reciproci, appartiene al complesso ogni retta incidente ad entrambi. Se il complesso è dotato di [$n-2r$]-centro, il reciproco di [h] passa per questo centro, perchè per questo passa l'iperpiano polare di ogni punto di [n], e se è $n-h-1 \leq n-2r$, cioè $h \geq 2r-1$, allora ogni spazio [h] ammette [$n-2r$] come reciproco. È poi evidente che se [h] è uno spazio totale, il suo reciproco passa per esso se è $h < n-h-1$, coincide con esso se è $h = n-h-1$; per $h > n-h-1$ il reciproco di [h] non è più di dimensione [$n-h-1$], essendo esso lo stesso [h]. Se poi un [h] è tale che gli iperpiani po-

lari di $h+1$ suoi punti indipendenti, e quindi quello di ogni altro suo punto, passino per esso, allora questo $[h]$ è totale per il complesso.

A proposito degli spazi reciproci sono degne di nota in un $[2q+1]$ le $[q+1]$-ple *di rette reciproche*. Di queste trovasi menzione nel citato lavoro del Kantor (§ 4.°, n.° 14) (¹). Dato un complesso generico in un $[2q+1]$, si fissi una retta g_1 dello spazio e se ne trovi lo spazio reciproco $S_{2q-1}^{(g_1)}$; in questo si fissi una retta g_2 della quale si prenda lo spazio reciproco $S_{2q-3}^{(g_2)}$ rispetto al complesso in cui $S_{2q-1}^{(g_1)}$ taglia il complesso dato. Così continuando otterremo $q+1$ rette $g_1, g_2, \dots, g_{q+1}$ che diremo formare una $(q+1)$-pla di rette reciproche rispetto al complesso dato.

Data una $(q+1)$*-pla di rette reciproche* $g_1, g_2, \dots, g_{q+1}$ *rispetto ad un complesso generico di* $[2q+1]$, *ognuna di esse è reciproca dello spazio determinato dalle rimanenti, le quali formano una* q*-pla di rette reciproche rispetto al complesso in cui questo spazio taglia il complesso dato.* Ciò avviene in virtù della costruzione se la retta che si considera è quella g_1 da cui si è partiti per ottenere la $(q+1)$-pla. Se ora invece prendiamo la g_2, l'iperpiano polare di un suo punto G_2 rispetto al complesso che si ha segando il dato con $S_{2q-1}^{(g_1)}$ passa per $g_3, g_4, \dots, g_{q+1}$ per l'anzidetta costruzione, quindi anche l'iperpiano polare di G_2 rispetto al complesso dato in $[2q+1]$ passa per quelle rette; ma questo passa anche per g_1 essendo $S_{2q-1}^{(g_1)}$ reciproco di questa retta per costruzione, dunque passa per lo spazio determinato dalle rette $g_1, g_3, g_4, \dots, g_{q+1}$. Siccome ciò avviene sempre al variare di G_2 sulla g_2, così si vede che lo spazio $[2q-1]'$ determinato dalle dette rette è reciproco di g_2. Vogliamo ora dimostrare che le rette $g_1, g_3, g_4, \dots, g_{q+1}$ formano un q-pla di rette reciproche rispetto al complesso in cui $[2q-1]'$ taglia quello dato. Preso un punto G_1 di g_1, il suo iperpiano polare in $[2q+1]$ rispetto al complesso dato passa per ipotesi per $g_2, g_3, \dots, g_{q+1}$, e vien tagliato da $[2q-1]'$ nell'iperpiano polare di esso rispetto al complesso in cui quello dato è tagliato da questo $[2q-1]'$, per cui si vede che al variare di G_1 sulla g_1 il suo iperpiano polare rispetto al detto complesso di $[2q-1]'$ passa per lo spazio determinato da $g_3, g_4, \dots, g_{q+1}$, il quale è dunque il reciproco di g_1 rispetto a tal complesso. Dopo di che in virtù della costruzione si ha che lo spazio reciproco di g_3 rispetto al complesso in cui il dato è tagliato dallo spazio determinato da g_3, $g_4, \dots, g_{q+1}$ è quello determinato da $g_4, g_5, \dots, g_{q+1}$ ecc. Ed ora ragionando in modo analogo, partendo invece che dalla g_2 successivamente da $g_3, g_4, \dots$, si arriva facilmente alla conclusione voluta.

Date q+1 *rette* $g_1, g_2, \dots, g_{q+1}$ *tali che ognuna sia reciproca dello spazio a* 2q+1 *dimensioni determinato dalle rimanenti, esse formano una* (q+1)-pla *di rette reciproche.* Il reciproco di g_1 è per ipotesi il $[2q-1]$ determinato da g_2, $g_3, \dots, g_{q+1}$. Ora un punto G_2 di g_2 ha il suo iperpiano polare, rispetto al com-

---

(¹) Cfr. anche Young, *On Systems of One-Vectors*, Proc. of the London Math. Soc., vol. XXIX, 1898, dove sono incontrate sotto un altro punto di vista.

plesso dato in $[2q+1]$, passante per $g_1, g_3, g_4, \dots, g_{q+1}$ (essendo lo spazio determinato da queste, reciproco di g_2 per ipotesi), e vien tagliato da $[2q-1]$ nell'iperpiano polare di G_2 rispetto al complesso in cui questo $[2q-1]$ taglia il dato; dunque questo iperpiano polare in $[2q-1]$ passa per le $g_3, g_4, \dots, g_{q+1}$, cioè per il $[2q-3]$ da esse determinato, quindi questo spazio (avvenendo quel fatto per ogni punto di g_2) è in $[2q-1]$ il reciproco di g_2. E così di seguito.

Chiuderò lo svolgimento di queste nozioni col far osservare come da alcune considerazioni fatte al n° 3 può tosto dedursi che dato in $[n]$ un complesso C dotato di $[n-2r]$-centro, rimane ad esso subordinato nella stella di centro $[n-2r]$ un complesso, considerando come elementi (punti) gli $[n-2r+1]$ della medesima (complesso che si ottiene projettando da $[n-2r]$ un complesso generico di un $[2r-1]$), di guisa che ognuno di questi $[n-2r+1]$ ha rispetto a tale complesso per polare una stella di ∞^{2r-2} spazi $[n-2r+1]$ che riempiono un iperpiano di $[n]$, il quale è polare di ogni punto di $[n-2r+1]$ rispetto a C, e che chiameremo pure rispetto al complesso dato C *iperpiano polare* di quel $[n-2r+1]$, il quale diremo alla sua volta *polare* di quel iperpiano. In questo senso nel complesso C ogni $[n-2r+1]$ passante per $[n-2r]$ ha un iperpiano polare passante per $[n-2r]$ e viceversa ogni iperpiano passante per $[n-2r]$ ha il suo $[n-2r+1]$ polare passante per $[n-2r]$.

4. Dati due complessi in uno spazio $[n]$, le ∞^{2n-4} rette ad essi comuni appartengono ad un sistema lineare ∞^1 di complessi (sì che per ogni altra retta dello spazio ne passa uno), che dicesi *fascio di complessi*; l'insieme di quelle ∞^{2n-4} rette si chiama *base del fascio*.

In uno spazio $[2q]$ consideriamo due complessi C, C′ dotati rispettivamente di $[2q-2r]$-centro e $[2q-2s]$-centro, tali che questi centri siano in posizione generica e non abbiano alcun punto comune, il che accadrà se è $r+s-q>0$. Ogni punto di $[2q]$ è centro di una stella, di un $[2q-2]$, di rette comuni a C, C′ (essendo $[2q-2]$ l'intersezione dei due iperpiani polari di quel punto rispetto a C, C′), e quindi a tutti i complessi del fascio da essi determinato. Vi sono però anche dei *punti singolari rispetto al fascio*, ognuno dei quali è vertice di una stella di un $[2q-1]$ di rette comuni a C, C′, e ciò accadrà per ogni punto che abbia lo stesso iperpiano polare rispetto a questi. Se è A un siffatto punto singolare, siccome l'iperpiano che è polare di esso rispetto a C ed a C′ deve passare per i due centri, così A deve trovarsi nello spazio reciproco di $[2q-2r]$ rispetto a C′, che è un $[2r-1]$ ad esso incidente in un punto H (perchè $[2q-2r]$ taglia C′ in un complesso dotato di un punto-centro H, cosicchè gli iperpiani polari di ogni punto di quello spazio passano per H, per il quale passa dunque anche $[2r-1]$ che ne è inviluppato), e nel reciproco di $[2q-2s]$ rispetto a C, che è un $[2s-1]$ ad esso incidente in un punto K; questi due spazi si tagliano in un $[2r+2s-2-2q]$, luogo dei punti tali che gli iperpiani polari di ognuno di essi rispetto a C, C′ passano per entrambi i centri. Questo spazio incontra i due centri rispettivamente in H, K ed i complessi dati in due altri C_1, C_1', ognuno dei quali ha per singolari i punti H, K (p. es. per C_1 è singolare H che appartiene a $[2q-2r]$ ed anche K, perchè ogni punto di $[2r+2s-2-2q]$ ha l'iperpiano

UofM

polare passante per K, per cui ogni retta di esso passante per K appartiene a C_1), quindi tutti i punti della retta HK, e perciò sono dotati di piani-centro α, α' passanti per HK. Ora fissato in $[2r+2s-2-2q]$ un $[2r+2s-5-2q]$, esso taglia l' S_3 determinato da α, α' in un punto per il quale passa uno spazio $[r+s-3-q]$ totale comune ai complessi in cui vengono tagliati C_1, C_1' da $[2r+2s-5-2q]$, spazio totale che viene projettato da α, α' mediante un unico $[r+s-q]$ passante per S_3 e totale per C_1, C_1' e quindi anche per C, C'. Abbiamo dunque che i due complessi dati ammettono un $[r+s-q]$ totale comune, incidente ai centri rispettivamente in H, K, e tale che ogni suo punto ha l'iperpiano polare rispetto a ciascuno dei due complessi passante (oltre che per detto $[r+s-q]$) per entrambi i centri. In particolare per $r=s=q$ ritroviamo il $[q]$ totale comune a due complessi generici di $[2q]$ già trovato per altra via alla fine del n° 2.

Ora fissato un punto A qualunque di $[r+s-q]$, il suo iperpiano polare rispetto a C è il polare dello spazio $[2q-2r+1]$ determinato dal centro e da A (n° 3 in fine), e questo iperpiano passa per $[2q-2r]$, $[2q-2s]$, $[r+s-q]$. Ora $[2q-2r+1]$ taglia $[r+s-q]$ nella retta HA. Al variare di HA intorno ad H in $[r+s-q]$ lo spazio $[2q-2r+1]$ descrive una stella $\infty^{r+s-q-1}$ di centro $[2q-2r]$ e determinata perciò da $r+s-q$ di codeste rette come HA, ed i polari dei $[2q-2r+1]$, corrispondenti a queste rette si tagliano in un $[3q-r-s]$ passante per $[2q-2r]$, $[2q-2s]$, $[r+s-q]$, cioè appunto nello spazio da questi tre determinato, e per questo passano i polari di tutti i $[2q-2r+1]$ determinati ognuno da $[2q-2r]$ e da una delle rette come HA. E siccome gli iperpiani passanti per $[3q-r-s]$ sono appunto $\infty^{r+s-q-1}$, così si vede che ogni iperpiano passante per $[3q-r-s]$ è polare di uno dei $[2q-2r+1]$ determinati da $[2q-2r]$ e da una retta di $[r+s-q]$ passante per H. I fatti analoghi valgono per C'.

Dopo ciò fissata in $[r+s-q]$ una retta HA, il $[2q-2r+1]$ che la unisce a $[2q-2r]$ ha rispetto a C un polare passante per $[2q-2r]$, $[2q-2s]$, $[r+s-q]$, e questo rispetto a C' è polare di un $[2q-2s+1]$ passante per $[2q-2s]$ e segante $[r+s-q]$ in una retta per K. Quando HA descrive nella stella di $[r+s-q]$ avente per centro H una stella di dimensione i, si vede subito che anche la corrispondente nella stella di centro K descrive una stella di dimensione i, cosicchè le due stelle si trovano in corrispondenza omografica, ed il luogo dei punti comuni a raggi corrispondenti è una curva normale Γ di ordine $r+s-q$, che è il luogo dei punti che hanno lo stesso iperpiano polare rispetto a C, C', cioè il luogo dei punti singolari rispetto al fascio determinato da C, C', o infine il luogo dei centri dei complessi di questo fascio diversi da C, C'. Dunque *se un fascio di complessi di un* [2q] *è determinato da due complessi* C, C' *dotati rispettivamente di centri di dimensione* 2q−2r, 2q−2s *situati in posizione generica e tali da essere* r+s−q>0, *il luogo dei punti singolari, ossia dei centri dei complessi del fascio diversi da* C, C', *è una curva normale razionale di ordine* r+s−q *avente un punto comune coi centri di* C, C'; *lo spazio cui appartiene questa curva è totale per tutti i complessi del fascio ed è il luogo dei punti i cui iperpiani polari passano per i centri di tutti questi complessi* (*compresi* C *e* C').

In particolare per $r=s=q$ si ha che *in un fascio generico di complessi di*

un [2q] *il luogo dei centri è una curva razionale normale del* [q] *totale comune a tutti i complessi del fascio* (¹).

Fissato ora nel nostro fascio un complesso generico C'', il suo centro M è sulla Γ e l'iperpiano polare di esso rispetto ad un complesso del fascio lo è anche rispetto ad ognuno degli altri, ed è uno di quelli che contengono le stelle di rette della base del fascio riempienti iperpiani. Preso un punto P qualunque di $[2q]$, il suo $[2q-1]$ polare rispetto a C'' passa per M, e perciò taglia la Γ in altri $r+s-q-1$ punti $M_1, M_2, \ldots, M_{r+s-q-1}$. Gli iperpiani polari delle rette $MM_1, MM_2, \ldots, MM_{r+s-q-1}$ rispetto a C'' passano per P, oltre che per il $[3q-r-s]$ determinato da $[2q-2r]$, $[2q-2s]$, $[r+s-q]$, e quindi per il $[3q-r-s+1]$, determinato da $[3q-r-s]$ e da P. Perciò abbiamo che *gli iperpiani che contengono stelle della base del fascio (diverse da quelle che hanno i centri in* $[2q-2r]$, $[2q-2s]$) *sono tali che per ogni* $[3q-r-s+1]$ *passante per il* $[3q-r-s]$ *determinato dai centri di* C, C′ *e dallo spazio cui appartiene la curva luogo dei centri degli altri complessi del fascio, ne passano* $r+s-q-1$.

5. Abbiasi in un $[2q+1]$ un fascio determinato da due complessi generici C, C′. Sia [q] uno degli spazi totali (n° 2 in fine) a q dimensioni comuni a C, C′ e quindi a tutti i complessi del fascio. Quando un punto è in questo $[q]$ i suoi iperpiani polari rispetto a C, C′ passano per esso (o in altre parole esso è reciproco di se stesso), quindi anche l'intersezione loro (che è comune a tutti i complessi del fascio) è un $[2q-1]$ passante per quel $[q]$; viceversa poi ogni iperpiano per $[q]$ ha il suo polo in questo rispetto a ciascun complesso del fascio. Fissato dunque un punto A di $[q]$, esso ha il suo iperpiano polare rispetto a C passante per $[q]$, e questo iperpiano ha il suo polo A′ rispetto C′ posto in $[q]$. Quando A si muove in un $[i]$ di $[q]$ il suo iperpiano polare rispetto a C ruota intorno ad un $[2q-i]$ passante per $[q]$, quindi il polo di tale iperpiano rispetto a C′ descrive un $[i]'$ di $[q]$. Dunque la corrispondenza fra i punti A, A′ è una omografia, e perciò vi sono $q+1$ punti uniti $B_1, B_2, \ldots, B_{q+1}$, ognuno dei quali è punto singolare rispetto al fascio. Prendiamo un $[q]'$ totale, diverso da $[q]$, comune a tutti i complessi del fascio, e siano $[2q]_1, [2q]_2, \ldots, [2q]_q$ gli iperpiani polari di $B_1, B_2, \ldots, B_q$ rispetto ai complessi del fascio; essi tagliansi in un $[q+1]$ che incontra $[q]'$ in un punto D_{q+1}. L'iperpiano polare di questo punto rispetto ad uno generico dei nostri complessi passa per $[q]'$ e contiene

(¹) Avendo avuto occasione di comunicare parecchie delle cose che trovansi in questo scritto al prof. Segre, questi mi fece osservare l'analogia di alcuni dei risultati qui contenuti con alcuni di quelli cui perviene nelle sue *Ricerche sui fasci di coni quadrici in uno spazio lineare qualunque* (Atti Acc. Torino, 1884), facendomi di più notare che una teoria completa dei fasci di complessi lineari di rette può aversi per analogia della sua teoria dei fasci di quadriche e di coni quadrici Della curva di cui si parla nell'ultimo teorema qui enunciato trovasi cenno in una nota delle *Ricerche di geometria della retta nello spazio a quattro dimensioni* del prof. Castelnuovo (Atti Ist. Veneto, 1891).

le rette $D_{q+1} B_1$, $D_{q+1} B_2, \ldots, D_{q+1} B_q$, cioè è l'iperpiano determinato da $[q]'$ o da $B_1, \ldots, B_q$, il che prova che D_{q+1} ha il medesimo iperpiano polare rispetto a tutti i complessi del fascio. Altrettanto dicasi dei punti D_q, $D_{q-1}, \ldots, D_1$ che possono ottenersi in $[q]'$ in modo analogo a $[q+1]$.

Gli iperpiani polari di $B_1, B_2, \ldots, B_q$ rispetto ad uno qualunque dei nostri complessi, p. e. rispetto a C, contengono $[q]$, quindi passano per B_{q+1}, e passano anche per D_{q+1} che è l'incontro loro con $[q]'$, cioè contengono la retta $B_{q+1} D_{q+1}$. L'iperpiano polare di D_1 rispetto ad un complesso del fascio passa per $[q]'$, quindi per D_{q+1}; inoltre essendo D_1 intersezione degli iperpiani polari di $B_2, B_3, \ldots, B_{q+1}$ con $[q]'$, il detto iperpiano polare di D_1 contiene anche la $D_1 B_{q+1}$, cioè passa per B_{q+1} e per conseguenza anche per la retta $B_{q+1} D_{q+1}$. Dopo ciò si vede che gli iperpiani polari, rispetto ad un complesso del fascio, dei punti $B_1, B_2, \ldots, B_q$, $D_1, D_2, \ldots, D_q$ passano per la retta $B_{q+1} D_{q+1}$, la quale è perciò reciproca del $[2q-1]$ determinato da quei punti. Ciò prova che le rette $B_1 D_1$, $B_2 D_2, \ldots, B_{q+1} D_{q+1}$ formano una $(q+1)$-pla di rette reciproche rispetto a ciascun complesso generico del fascio (n° 3). Ogni punto di una di queste rette ha il medesimo iperpiano polare rispetto a tutti i complessi del fascio, cioè quello determinato da quel punto e dallo spazio, reciproco di quella retta, determinato dalle rimanenti rette.

Siccome poi i $[q]$ completi comuni ai nostri complessi formano (n° 2) un sistema tale che per ogni punto di $[2q+1]$ ne passa uno; siccome d'altra parte gli spazi a q dimensioni seganti le $q+1$ rette anzidette formano appunto un sistema siffatto, ed ognuno di essi è spazio totale per ognuno dei complessi del fascio (perchè se è S_q uno di essi segante le $q+1$ rette nei punti $H_1, H_2, \ldots, H_{q+1}$, l'iperpiano polare di H_i rispetto ad un complesso del fascio, contenendo le rette $H_i H_1$, $H_i H_2, \ldots, H_i H_{i+1}, \ldots, H_i H_{q+1}$, passa per S_q, quindi passando così per questo gli iperpiani polari di $q+1$ suoi punti, vi passano pure quegli degli altri (n° 2), cioè esso è reciproco di sè stesso e perciò (n° 3) spazio totale per ciascuno dei nostri complessi), così possiamo concludere: *Dato in* [2q+1] *un fascio di complessi, esiste una* (q+1)-pla *di rette reciproche comune a tutti questi complessi*; *ogni punto di queste rette è punto singolare del fascio*, *e gli spazi* [q] *loro comuni seganti sono gli spazi a* q *dimensioni totali per la base del fascio. Le intersezioni di uno qualsiasi di questi* [q] *con le rette di quella* (q+1)-pla *sono i punti uniti di ogni omografia che si ha prendendo come corrispondenti i poli*, *rispetto a due complessi generici del fascio*, *degli iperpiani contenenti quel* [q].

Se si prende un punto K di una, g, delle $q+1$ rette nominate nell'enunciato precedente, esso ha lo stesso iperpiano polare rispetto ad ogni complesso generico del fascio (cioè quello determinato da K e dalle altre q rette), iperpiano che non contiene g, e tutte le rette di esso passanti per K appartengono alla base del fascio. Ora per questa base e per una retta per K non posta in quell'iperpiano passa un complesso del fascio, al quale apparterranno dunque tutte le rette di $[2q+1]$ passanti per K. A determinare questo complesso nel fascio può prendersi la g, il che prova che al variare di K sulla g questo complesso non varia; in altri termini esiste nel fascio un complesso ed uno solo avente

MOL

la g per retta centro. Oltre ai complessi determinati nel fascio ciascuno da una delle $q+1$ rette anzidette non ne esistono altri dotati di retta centro; in altre parole non può esservi un punto singolare fuori di quelle rette. Difatti se è L un punto singolare fuori di quelle rette, tale quindi che le rette della base per esso formano un $[2q-1]$, vuol dire che questo iperpiano è polare di L rispetto a tutti i complessi del fascio. Ora gli iperpiani polari di L rispetto ai complessi aventi per centri le rette della nostra $(q+1)$-pla g, g_1, ... contengono rispettivamente i piani Lg, Lg_1, ..., e poichè l'iperpiano polare di L deve esser lo stesso per tutti i complessi del fascio, così esso deve contenere g, g_1,..., L, cioè deve essere l'intero $[2q+1]$, ossia tutte le rette per L apparterrebbero a tutti i complessi del fascio, ossia L sarebbe punto singolare per ciascuno di essi, il che va escluso, avendo scelto per determinare il fascio due complessi generici. Si conclude che *dato un fascio generico di complessi di un* $[2q+1]$, *le rette della* $(q+1)$*-pla di rette reciproche comune a tutti quei complessi sono (esse ed esse solo) assi di complessi singolari del fascio.*

Preso uno dei complessi singolari del fascio, le sue rette sono (n° 2) quelle dei $[q+1]$, totali per esso, che projettano dall'asse i $[q-1]$ totali di un complesso non singolare di un $[2q-1]$; le rette della base del fascio risultano allora come intersezioni dei $[q+1]$ totali di uno qualunque dei complessi singolari del fascio con quelli di un altro, e mentre un $[q+1]$ generico di $[2q+1]$ taglia la base del fascio in ∞^{2q-2} rette formanti pure la base di un fascio, uno dei $[q+1]$ totali anzidetti la taglia invece in ∞^{2q-1} rette formanti un complesso lineare. Abbiamo dunque che *nel mentre le rette di un complesso lineare di un* $[2q+1]$ *sono aggruppate in modo da formare* $\infty^{\frac{(q+1)(q+2)}{2}}$ *spazi* $[q]$ *totali, quelle della base di un fascio generico lo sono in modo da formare* $\infty^{\frac{q(q+1)}{2}}$ (chè tanti sono i $[q+1]$ totali di un complesso dotato di retta-centro) *complessi lineari di* $\infty^{\frac{q(q+1)}{2}}$ *spazi* $[q+1]$ *distribuiti in* $q+1$ *gruppi, sì che quelli di uno stesso gruppo passano per l'asse di uno dei complessi speciali; il complesso che si ha in uno qualunque dei* $[q+1]$ *di uno di questi gruppi vi è segato dai* $[q+1]$ *di un altro qualsiasi dei rimanenti gruppi.*

Dati ora in $[2q+1]$ due complessi C,C′ dotati rispettivamente di $[2q+1-2r]$-centro e $[2q+1-2s]$-centro, potranno sempre considerarsi come sezioni di $[2q+1]$ con due complessi C_1, C_1' di un $[2q+2]$ passante per esso e dotati rispettivamente di $[2q+2-2r]$-centro, $[2q+2-2s]$-centro. La linea di ordine $r+s-q-1$ che è luogo dei centri dei complessi del fascio determinato da C_1, C_1', vien tagliata in $r+s-q-1$ punti singolari per complessi del fascio determinato da C, C′, per ognuno dei quali punti passerà l'asse di un complesso dotato di retta-centro. Tutto questo (n° 4) con la condizione $r+s-q-1>0$. Dunque *se un fascio di complessi di un* $[2q+1]$ *è determinato da due complessi* C, C′ *dotati rispettivamente di centro di dimensione* $2q+1-2r$, $2q+1-2s$, *situati in posizione generica e tali da essere* $r+s-q-1>0$, *il fascio contiene altri* $r+s-q-1$ *complessi degeneri dotati ciascuno di retta centro.* È chiaro che lo spazio reciproco del centro

UofM

di uno qualunque dei complessi singolari del nostro fascio rispetto ad uno generico dei complessi di questo, è quello determinato dai centri degli altri complessi singolari.

Si abbiano ancora in $[2q]$ due complessi C, C' dotati rispettivamente di $[2q-2r]$-centro e $[2q-2s]$-centro (senza che sia più necessaria la restrizione $r+s-q>0$) aventi un $[k]$ comune (e solo questo).

Allora tutte le rette incidenti a $[k]$ sono comuni a C, C', quindi a tutti i complessi del fascio (C, C'), per ognuno dei quali dunque $[k]$ è uno spazio di punti singolari. Se è $k=2h+1$ ogni complesso del fascio è dotato di $[k+1]$-centro passante per $[k]$ e che è diverso da un complesso all'altro, perchè se due di quei complessi avessero lo stesso $[k+1]$-centro, tutte le rette ad esso incidenti apparterrebbero a tutti i complessi del fascio, quindi anche a C, C' che non avrebbero così solo $[2q-2r]$, $[2q-2s]$ come spazi di punti singolari. Se poi è $k=2h$, allora $[2h]$ è centro di ogni complesso generico del fascio, e segando con un $[2q-2h-1]$ avremo in questo un fascio determinato dai complessi C_1, C_1' sezioni di C, C', dotati di $[2q-2r-2h-1]$, $[2q-2s-2h-1]$-centro, e quindi aventi ancora $r+s-(q-h-1)-1=r+s+h-q$ complessi singolari che sono sezioni di complessi di (C,C') dotati ognuno di $[2h+2]$-centro passante per $[2h]$.

In $[2q+1]$ abbiansi due complessi C, C' dotati di $[2q+1-2r]$, $[2q+1-2s]$-centro aventi in comune un $[k]$. Se è $k=2h$ ogni complesso generico del fascio è dotato di $[k+1]$-centro passante per $[k]$ e variabile da un complesso all'altro. Se è $k=2h+1$, allora $[2h+1]$ è centro per ogni complesso generico del fascio nel quale (si vede come sopra) vi sono ancora $r+s+h-q$ complessi, ognuno dotato di $[2h+3]$-centro passante per $[2h+1]$.

Torino, Dicembre 1902.

NOU

SULLA JACOBIANA DI UNA RETE DI SUPERFICIE ALGEBRICHE

NOTA

DI

MARINO PANNELLI.

1. Chiamasi *Jacobiana* di una rete di superficie algebriche la curva luogo dei punti doppi delle superficie della rete medesima.

Una rete è determinata da tre qualsivogliano delle sue superficie. Se

$$U = 0 \quad , \quad V = 0 \quad , \quad W = 0$$

sono le equazioni di quelle, ogni altra superficie della rete ha per equazione

$$\lambda U + \mu V + \nu W = 0 ,$$

dove λ, μ, ν sono tre parametri variabili. I punti e le curve che le tre superficie date hanno in comune, sono comuni a tutte le altre superficie della rete e ne costituiscono la *base*.

Si supporrà che questa base sia formata da σ punti P_h $(h = 1, 2, 3, \ldots, \sigma)$, ciascuno multiplo secondo il numero i_h, e da τ curve $C_k (k = 1, 2, 3, \ldots, \tau)$, ciascuna dell'ordine m_k, multipla secondo il numero j_k e dotata in P_h di un punto multiplo secondo il numero l_{hk}. Inoltre si ammetterà che, in virtù delle ipotesi fatte, i coni tangenti alle superficie della rete in un medesimo punto fondamentale P_h, non si decompongano in parti comuni a tutte, e i piani tangenti in uno stesso punto di una curva fondamentale C_k siano in generale tutti distinti fra loro e variabili da superficie a superficie.

Scelto il vertice $O(0, 0, 0, 1)$ del tetraedro di riferimento in un punto P_h le equazioni delle superficie U, V, W dello stesso ordine n prendono la forma

$$(1) \qquad \begin{aligned} U &= u_i x_4^{n-i} + u_{i+1} x_4^{n-i-1} + \ldots + u_n = 0 \\ V &= v_i x_4^{n-i} + v_{i+1} x_4^{n-i-1} + \ldots + v_n = 0 \\ W &= w_i x_4^{n-i} + w_{i+1} x_4^{n-i-1} + \ldots + w_n = 0 \end{aligned}$$

dove per semplicità si è posto i in luogo di i_h, e u_{i+a} , v_{i+a} , w_{i+a} sono forme del grado $i+a$ delle sole variabili x_1 , x_2 , x_3.

Se invece il vertice O si pone in un punto qualunque di una curva C_k, ed inoltre si suppone che la tangente alla curva stessa in questo punto sia la retta 34 ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$), le equazioni delle superficie medesime sono:

$$
\begin{aligned}
U &= u_j x_4^{n-j} + u_{j+1} x_4^{n-j-1} + \ldots + u_n = 0 \\
V &= v_j x_4^{n-j} + v_{j+1} x_4^{n-j-1} + \ldots + v_n = 0 \qquad (2) \\
W &= w_j x_4^{n-j} + w_{j+1} x_4^{n-j-1} + \ldots + w_n = 0
\end{aligned}
$$

dove si è posto j in luogo di j_k ed inoltre u_j , v_j , w_j sono forme del grado j delle sole variabili x_1 , x_2 , mentre u_{j+b} , v_{j+b} , w_{j+b} sono forme del grado $j+b$ delle variabili x_1 , x_2 , x_3.

2. Come è noto, la prima polare U_1 di un punto qualunque O_1 rispetto alla superficie U, è una superficie dell'ordine $n-1$, la quale possiede ogni P_h come punto multiplo secondo i_h-1, ed ogni C_k come linea multipla secondo $j_k - 1$. Inoltre il cono tangente in P_h ad U_1 è il primo cono polare della retta $P_h O_1$ rispetto al cono tangente in P_h ad U; e così i j_k-1 piani tangenti ad U_1 in un punto qualunque di C_k formano il primo gruppo polare del piano $O_1 t$ (essendo t la tangente in quel punto a C_k) rispetto al gruppo dei j piani tangenti nel medesimo punto alla superficie U.

Delle stesse proprietà gode la prima polare U_2 di un altro punto qualsiasi O_2 rispetto alla stessa superficie U.

In virtù delle ipotesi fatte sulla base della rete, i due coni tangenti in ciascun punto P_h alle due superficie U_1 e U_2 non hanno parti comuni, e così non hanno piani comuni i due gruppi di piani tangenti alle superficie medesime in uno stesso punto di una curva C_k.

Da ciò segue:

I. « La curva α, intersezione residua delle due superficie u_1 e u_2, è del- « l'ordine

$$(n-1)^2 - \Sigma(j_k - 1)^2 m_k ,$$

« la somma Σ estesa qui e in seguito a tutte le curve C_k ».

II. « La stessa curva α possiede in ogni P_h un punto multiplo secondo

$$(i_h - 1)^2 - \Sigma(j_k - 1)^2 l_{hk}.$$

3. Siano V_1 e V_2 le prime polari dei punti O_1 e O_2 rispetto alla superficie V.

I due fasci proiettivi di superficie

$$\lambda U_1 + \mu V_1 = 0$$

(3)

$$\lambda U_2 + \mu V_2 = 0$$

degli ordini $n-1$ generano una superficie φ dell'ordine $2(n-1)$.

Partendo dalle (1), l'equazione di questa superficie è

$$\begin{vmatrix} u_{i,1}x_4^{n-i} + u_{i+1,1}x_4^{n-i-1} + \dots + u_{n,1} & , & v_{i,1}x_4^{n-i} + v_{i+1,1}x_4^{n-i-1} + \dots + v_{n,1} \\ u_{i,2}x_4^{n-i} + u_{i+1,2}x_4^{n-i-1} + \dots + u_{n,2} & , & v_{i,2}x_4^{n-i} + v_{i+1,2}x_4^{n-i-1} + \dots + v_{n,2} \end{vmatrix} = 0,$$

dove per brevità si è posto

$$\frac{\partial u_{i+a}}{\partial x_r} = u_{i+a,r} \qquad \frac{\partial v_{i+a}}{\partial x_r} = v_{i+a,r}.$$

Quindi il cono tangente in P_h alla superficie φ ha per equazione

$$\begin{vmatrix} u_{i,1} & v_{i,1} \\ u_{i,2} & v_{i,2} \end{vmatrix} = 0,$$

epperò esso cono è quello generato dai due fasci proiettivi di coni

$$\lambda u_{i,1} + \mu v_{i,1} = 0$$

$$\lambda u_{i,2} + \mu v_{i,2} = 0.$$

Se invece si parte dalle equazioni (2), si trova in modo analogo che il gruppo dei piani tangenti alla superficie φ nel punto O della curva C_k, ha per equazione

$$\begin{vmatrix} u_{j,1} & v_{j,1} \\ u_{j,2} & v_{j,2} \end{vmatrix} = 0,$$

e questa mostra che il gruppo stesso è il Jacobiano dei due gruppi $u_j=0$ e $v_j=0$ dei piani tangenti nello stesso punto alle due superficie U e V.

Si ha dunque:

I. « La superficie φ è dell'ordine $2(n-1)$ e possiede ogni P_h come punto « multiplo secondo $2(i_h-1)$, ed ogni C_k come curva multipla secondo $2(j_k-1)$. « Il cono tangente in P_h a φ è quello generato dai due fasci proiettivi formati

« dai primi coni polari delle rette P_hO_1 e P_kO_2 rispetto ai coni tangenti in P_h « alle superficie del fascio $\lambda U + \mu V \equiv 0$. Il gruppo dei piani tangenti a φ in un « punto di C_k è quello dei piani doppi dell' involuzione formata dai gruppi di « piani tangenti nel medesimo punto alle superficie del fascio anzidetto ».

Una superficie ψ, analoga a φ, viene generata dai due fasci proiettivi

$$(4) \qquad \begin{aligned} \lambda U_1 + \nu W_1 &= 0 \\ \lambda U_2 + \nu W_2 &= 0 \end{aligned}$$

dove W_1 e W_2 sono le prime polari dei punti O_1 e O_2 rispetto alla superficie W.

Per il teorema precedente e per le ipotesi fatte nel n° 1, i piani tangenti alle superficie φ e ψ in uno stesso punto generico di una curva C_k, sono tutti distinti fra loro; quindi questa curva deve essere contata $4(j_k - 1)^2$ volte nella intersezione delle superficie medesime, le quali perciò si tagliano ulteriormente secondo un luogo dell'ordine

$$4(n-1)^2 - 4\Sigma(j_k - 1)^2 m_k.$$

Di questo luogo fa parte la curva α già studiata nel n° 2, perchè le due superficie U_1 e U_2 sono corrispondenti tanto nei due fasci proiettivi (3) quanto in quelli (4). Prescidendo da α, rimane una curva β, la quale, come è noto (¹) è quella generata dalle due reti proiettive

$$(5) \qquad \begin{aligned} \lambda U_1 + \mu V_1 + \nu W_1 &= 0 \\ \lambda U_2 + \mu V_2 + \nu W_2 &= 0. \end{aligned}$$

Dunque (2, I), si ha:

II. « La curva β è dell'ordine

$$3(n-1)^2 - 3\Sigma(j_k - 1)^2 m_k.$$

Per il precedente teorema I e per le ipotesi fatte nel n° 1, i due coni tangenti in P_h alle superficie φ e ψ non hanno parti comuni; quindi la completa intersezione delle superficie medesime deve possedere in P_h un punto multiplo secondo $4(i_h - 1)^2$. Togliendo da questo il grado di multiplicità di P_h per ogni curva C_k, il quale, per quanto si è provato dianzi, è $4(j_k - 1)^2 l_{hk}$, e quello della curva α già determinato (2, II), si ottiene:

(¹) Cremona: Preliminari di una teoria geometrica delle superficie. Traduzione di Curtze, art. 126.

III. « La curva β possiede in ogni P_h un punto multiplo secondo

$$3(i_h-1)^2-3\Sigma(j_k-1)^2 l_{hk}.$$

4. La rete formata dalle prime polari di un punto qualunque $Y(y_1, y_2, y_3, y_4)$ rispetto alle superficie della rete data, ha per equazione

$$\lambda(U_1y_1+U_2y_2+U_3y_3+U_4y_4)+\mu(V_1y_1+V_2y_2+V_3y_3+V_4y_4)+$$

$$+\nu(W_1y_1+W_2y_2+W_3y_3+W_4y_4)=0.$$

Questa e le due reti (5), proiettive fra loro, generano una superficie F_ρ, di cui l'equazione è

$$F_\rho=\begin{vmatrix} U_1 & V_1 & W_1 \\ U_2 & V_2 & W_2 \\ U_3 & V_3 & W_3 \end{vmatrix}+\rho\begin{vmatrix} U_1 & V_1 & W_1 \\ U_2 & V_2 & W_2 \\ U_4 & V_4 & W_4 \end{vmatrix}=0$$

dove si è posto $y_4 : y_3 = \rho$.

Ora per le U, V, W si prendano dapprima le forme (1); ordinando l'equazione risultante rispetto x_4, si trova:

$$F_\rho = \Delta x_4^{3(n-i)}+\Delta_1 x_4^{3(n-i)-1}+\Delta_2 x_4^{3(n-i)-2}+\ldots=0 \tag{6}$$

dove è

$$\Delta=\begin{vmatrix} u_{i1} & u_{i2} & u_{i3} \\ v_{i1} & v_{i2} & v_{i3} \\ w_{i1} & w_{i2} & w_{i3} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} u_{i+1,1} & u_{i2} & u_{i3} \\ v_{i+1,1} & v_{i2} & v_{i3} \\ w_{i+1,1} & w_{i2} & w_{i3} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} u_{i1} & u_{i+1,2} & u_{i3} \\ v_{i1} & v_{i+1,2} & v_{i3} \\ w_{i1} & w_{i+1,2} & w_{i3} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} u_{i1} & u_{i2} & u_{i+1,3} \\ v_{i1} & v_{i2} & v_{i+1,3} \\ w_{i1} & w_{i2} & w_{i+1,3} \end{vmatrix}+\rho(n-i)\begin{vmatrix} u_{i1} & u_{i2} & u_i \\ v_{i1} & v_{i2} & v_i \\ w_{i1} & w_{i2} & w_i \end{vmatrix}.$$

ossia

$$\Delta_1 = L + e\rho\Delta x_3,$$

quando si chiami L la somma dei primi tre determinanti, inoltre si osservi che il quarto, in virtù del teorema di Eulero sulle funzioni omogenee, è eguale ad $\frac{1}{i}\Delta x_3$, ed infine si indichi con e il numero $\frac{n-i}{i}$.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} u_{i1} & u_{i+1,2} & u_{i+1,3} \\ v_{i1} & v_{i+1,2} & v_{i+1,3} \\ w_{i1} & w_{i+1,2} & w_{i+1,3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_{i+1,1} & u_{i2} & u_{i+1,3} \\ v_{i+1,1} & v_{i2} & v_{i+1,3} \\ w_{i+1,1} & w_{i2} & w_{i+1,3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_{i+1,1} & u_{i+1,2} & u_{i3} \\ v_{i+1,1} & v_{i+1,2} & v_{i3} \\ w_{i+1,2} & w_{i+1,2} & w_{i3} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} u_{i1} & u_{i2} & u_{i+2,3} \\ v_{i1} & v_{i2} & v_{i+2,3} \\ w_{i1} & w_{i2} & w_{i+2,3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_{i1} & u_{i+2,2} & u_{i3} \\ v_{i1} & v_{i+2,2} & v_{i3} \\ w_{i1} & w_{i+2,2} & w_{i3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_{i+2,1} & u_{i2} & u_{i3} \\ v_{i+2,1} & v_{i2} & v_{i2} \\ w_{i+2,1} & w_{i2} & w_{i3} \end{vmatrix}$$

$$+ \rho \left\{ (n-i) \begin{vmatrix} u_{i1} & u_{i+1,2} & u_i \\ v_{i1} & v_{i+1,2} & v_i \\ w_{i1} & w_{i+1,2} & w_i \end{vmatrix} + (n-i) \begin{vmatrix} u_{i+1,1} & u_{i2} & u_i \\ v_{i+1,1} & v_{i2} & v_i \\ w_{i+1,1} & w_{i2} & w_i \end{vmatrix} + (n-i-1) \begin{vmatrix} u_{i1} & u_{i2} & u_{i+1} \\ v_{i1} & v_{i2} & v_{i+1} \\ w_{i1} & w_{i2} & w_{i+1} \end{vmatrix} \right\},$$

ossia

$$\Delta_2 = M + \rho N,$$

quando con M ed N si indichino le due precedenti somme di determinanti. E così di seguito. Quindi l'equazione (6) diventa:

$$(7) \qquad F_\rho = \Delta x_4^{3(n-i)} + (L + e\rho\Delta x_3)x_4^{3(n-i)-1} + (M + \rho N)x_4^{3(n-i)-2} + \ldots = 0.$$

La forma di questa equazione mostra che le superficie F_ρ costituiscono un fascio K al variare di ρ, il quale è il parametro del piano determinato dal punto Y nel fascio di piani che ha per asse la retta O_1O_2.

Ora poichè il vertice O del tetraedro di riferimento è un punto P_h, il determinante Δ, per le ipotesi fatte, è diverso da zero, poichè è noto che il Jacobiano di tre coni aventi il medesimo vertice si annulla identicamente solo quando questi coni appartengono ad uno stesso fascio. Si ha dunque:

I. « Ogni superficie F_ρ è dell'ordine $3(n-1)$, possiede in ogni P_h un punto « multiplo secondo $3(i_h - 1)$, e il cono ivi tangente alla superficie medesima è il « Jacobiano della rete dei coni tangenti nello stesso punto alle superficie della « rete data, epperò non varia col variare della superficie F_ρ nel fascio K ».

Se poi per le U, V, W si prendono le forme (2), il Jacobiano Δ è identicamente nullo, e quindi in luogo della (7), si ha l'equazione seguente:

$$(8) \qquad F_\rho = L_1 x_4^{3(n-j)-1} + (M_1 + \rho N_1)x_4^{3(n-j)-2} + \ldots = 0,$$

nella quale $L_1, M_1, N_1, \ldots$ rappresentano i risultati della sostituzione in L, M, N, ... delle funzioni $u_{j+b}, v_{j+b}, w_{j+b}$ alla funzioni $u_{i+a}, v_{i+a}, w_{i+a}$. E questa equazione mostra:

II. « Ogni superficie F_ρ possiede ogni C_k come curva multipla secondo $3j_k-2$ « e il gruppo dei piani tangenti alla superficie medesima in un punto della stessa « curva non varia col variare della superficie F_ρ nel fascio K ».

Quale è il grado di multiplicità di un punto P_h per la base del fascio K? Si considerino a tale oggetto due superficie di questo fascio, corrispondenti a due valori ρ' e ρ'' del parametro ρ, e le superficie stesse si seghino con un piano condotto ad arbitrio per P_h. Per questo piano si può scegliere uno qualunque dei due piani $x_1=0$ e $x_2=0$, per esempio il primo. Le equazioni delle due curve risultanti sono:

$$f' = \Delta_0 x_4^{3(n-i)} + (L_0 + e\rho'\Delta_0 x_3)x_4^{3(n-i)-1} + (M_0 + \rho' N_0)x_4^{3(n-i)-2} + \ldots = 0$$

$$f'' = \Delta_0 x_4^{3(n-i)} + (L_0 + e\rho''\Delta_0 x_3)x_4^{3(n-i)-1} + (M_0 + \rho'' N_0)x_4^{3(n-i)-2} + \ldots = 0,$$

indicando con Δ_0, L_0, M_0, ... i risultati della sostituzione di $x_1=0$ in Δ, L, M,.... Da queste equazioni si ricava

$$g = \frac{f'-f''}{\rho'-\rho''} = e\Delta_0 x_3 x_4^{3(n-i)-1} + N_0 x_4^{3(n-i)-2} + \ldots = 0$$

e questa curva si può sostituire, per la ricerca del numero delle intersezioni delle due curve f' ed f'' assorbite dal punto P_h, ad una qualunque delle curve medesime, e per esempio ad f''. Ciò posto, e fatto, il che è lecito, $x_4=1$, dalle equazioni di f' e di g segue:

$$d = f' \cdot ex_3 - g = [ex_3(L_0 + e\rho'\Delta_0 x_3) - N_0] + \ldots = 0.$$

Ora si sa che la multiplicità d'intersezione del punto P_h per le due curve f' e g è eguale alla differenza fra la multiplicità d'intersezione di P_h per d e g, e quella dello stesso punto per g ed ex_3.

Il punto P_h è multiplo per g secondo $3i_h-2$, e le tangenti a g in P_h sono date dall'equazione

$$\Delta_0 x_3 = 0.$$

Lo stesso punto è multiplo per d secondo $3i_h-1$, e le tangenti a d in P_h hanno per equazione

$$ex_3(L_0 + e\rho'\Delta_0 x_3) - N_0 = 0$$

e quindi sono tutte diverse dalle precedenti. Perciò la multiplicità d'intersezione di P_h per d e g, è

$$(3i_h-2)(3i_h-1).$$

L' equazione delle tangenti a g in P_h mostra che fra le tangenti medesime vi è la retta $x_3 = 0$, e che questa incontra g in

$$(3i_h - 2) + 1 = 3i_h - 1$$

punti riuniti in P_h. Questo numero dunque dà la multiplicità d'intersezione di P_h per la curva g con la retta $x_3 = 0$.

Sottraendo il numero stesso dal precedente, si ha quindi:

III. « Ogni punto P_h è multiplo secondo

$$3(i_h - 1)(3i_h - 1)$$

« per la base del fascio K ».

Quale è il grado di multiplicità per questa stessa base di una curva C_k? Si considerino ancora le due superficie del fascio K corrispondenti ai valori ρ' e ρ'' di ρ; ma come loro equazioni si prendano quelle che provengono dalla (8). Sottrando le equazioni risultanti, si ottiene

$$N_1 x_4^{3(j-1)-2} + \ldots = 0$$

e questa equazione rappresenta una superficie del fascio, che possiede nel punto O della curva C_k un punto multiplo secondo $3j_k - 1$. Quindi osservando che $L_1 = 0$ ed $N_1 = 0$ sono le equazioni di un gruppo di piani appartenenti ad un fascio e di un cono propriamente detto, si conclude;

IV. « Ogni curva C_k deve essere contata

$$(3j_k - 2)(3j_k - 1)$$

« volte come appartenente alla base del fascio K ».

5. La base del fascio K, ossia la completa intersezione di due superficie F_ρ si compone di tutte le curve C_k, della curva β studiata nel n° 3, e di un'altra curva, la quale, come è noto [1], è la Jacobiana J della data rete di superficie. Quindi chiamando x l'ordine di J e tenendo presenti i risultati già ottenuti (n° 4, I e IV; n° 3, II), si ha:

$$9(n-1)^2 = x + [3(n-1)^2 - 3\Sigma(j_k - 1)^2 m_k] + \Sigma(3j_k - 2)(3j_k - 1)m_k$$

donde si ricava:

---

[1] Cremona l. c. art. 130 — (..) A. Levi: Sulle singolarità della Jacobiana di quattro superficie nn. 7 e 8. Giornale di Battaglini. Vol. XXXIV.

I. « La Jacobiana J è dell'ordine

$$6(n-1)^2 - \Sigma(6j_k^2 - 3j_k - 1)m_k.$$

Analogamente chiamando y il grado di multiplicità per J di un punto P_h e tenendo presenti i risultati già ottenuti (n° 4, III e IV; n° 3, III), si ha:

$$3(i_h - 1)(3i_h - 1) = y + [3(i_h - 1)^2 - 3\Sigma(j_k - 1)^2 l_{hk}] + \Sigma(3j_k - 2)(3j_k - 1)l_{hk}$$

donde si ricava:

II. « La Jacobiana J possiede in ogni P_h un punto multiplo secondo

$$6i_h(i-1) - \Sigma(6j_k^2 - 3j_k - 1)l_{hk}.$$

6. Nel caso in cui la data rete di superficie appartenga ad un sistema lineare triplamente infinito S, la dimostrazione dei due teoremi del n.° prec. può esser fatta anche in un altro modo, che è bene di esporre come prova dell'esattezza dei risultati ottenuti.

La Jacobiana Θ del sistema S è una superficie dell'ordine $4(n-1)$, che possiede ogni P_h come punto multiplo secondo $4i_h - 2$, ed ogni C_k come curva multipla secondo $4j_k - 1 \cdot (\cdot\cdot)$. Un piano qualunque ω, che per ora non passi per alcuno dei punti P_h, sega dunque la superficie Θ secondo una curva H dell'ordine $4(n-1)$, per la quale ciascuno degli m_k punti d'incontro N del piano ω con una curva C_k è multiplo secondo $4j_k - 1$. La Jacobiana J della rete data giace sulla superficie Θ; epperò i suoi punti d'incontro X con ω appartengono alla curva H. Lo stesso piano ω taglia la rete data in una rete di curve, la cui Jacobiana Γ è una curva dell'ordine $3(n-1)$, che possiede in ogni punto N un punto multiplo secondo $3j_k - 1$. Essa è il luogo dei punti di contatto delle superficie della rete con il piano ω, e quindi contiene i punti doppi delle superficie della rete medesima che cadono sul piano ω, ossia i punti X. Questi punti adunque al pari dei punti N, sono comuni alle due curve H e Γ.

Il piano ω taglia il sistema di superficie S in un sistema T lineare triplamente infinito di curve, e le Jacobiane Γ delle reti contenute in questo sistema formano un altro sistema lineare triplamente infinito ed hanno in comune, oltre i punti N, altri

$$6(n-1)^2 - \Sigma(6j_k^2 - 4j_k + 2)m_k$$

punti M [1]. Ciascuno di questi gode della proprietà, che le sue rette polari rispetto a tutte le curve del sistema T, passano per uno stesso punto M'. Quindi

---

[1] Caporali: Sopra i sistemi lineari triplamente infiniti di curve algebriche piane. Memorie di Geometria. Pag. 176.

anche i piani polari di ciascun punto M rispetto a tutte le superficie del sistema S, passano per M', epperò il punto M appartiene alla Jacobiana Θ; e siccome si trova sul piano ω, così esso giace sulla curva H. Le due curve H e Γ hanno dunque in comune anche i punti M.

In tal modo queste due curve hanno in comune i punti X, M ed N: i punti X ed M sono semplici e i punti N sono multipli, secondo gradi già determinati. Chiamando x il numero dei punti X, ossia l'ordine della Jacobiana J, si ha dunque:

$$(9) \qquad 4(n-1)\cdot 3(n-1)=x+[6(n-1)^2-\Sigma(6j_k^2-4j_k+2\,m_k]+\Sigma(4j_k-1)(3j_k-1)m_k$$

donde si ricava

$$a = 6(n-1)^2 - \Sigma(6j_k^2 - 3j_k - 1)m_k\,,$$

in accordo col teorema I del n.° precedente.

In secondo luogo si supponga che il piano ω passi per un punto P_h. Esso incontra la Jacobiana Θ secondo una curva, che è ancora dell'ordine $4(n-1)$ e che possiede un punto multiplo secondo $4j_k-1$ in ciascuno degli $m_k - l_{hk}$ punti N, nei quali il piano ω sega ogni curva C_k, fuori di P_h, ma che inoltre è dotata in P_h di un punto multiplo secondo $4i_h-2$. La Jacobiana J possiede ancora ciascun punto N come punto multiplo secondo $3j_k-1$; ma di più essa ha in P_h un punto multiplo secondo $3i_h-1$. Infine il numero dei punti M è nel caso attuale:

$$6(n-1)^2-(6i_h^2-4i_h+2)-\Sigma(6j_k^2-4j_k+2)(m_k-l_{hk}).$$

Quindi chiamando y il numero dei punti d'incontro, fuori di P_h, del piano ω con la Jacobiana J, si ha:

$$4(n-1)\cdot 3(n-1)=y+[6(n-1)^2-(6i_h^2-4i_h+2)-\Sigma(6j_k^2-4j_k+2)(m_k-l_{hk})]$$
$$+(4i_h-2)(3i_h-1)+\Sigma(4j_k-1)(3j_k-1)(m_k-l_{hk})\,,$$

donde, in virtù della relazione (9), si ricava:

$$x-y=6i_h(i_h-1)-\Sigma(6j_k^2-3j_k-1)l_{hk}\,,$$

in accordo col teorema II del n.° precedente.

DI UNA RAPPRESENTAZIONE CICLICA DEI PERIODI

DELLE FUNZIONI DOPPIAMENTE PERIODICHE

COME MEZZO MNEOMONICO PER LO STUDIO DELLE FUNZIONI ELLITTICHE

NOTA

DEL

Dott. FELICE CERAMICOLA

Si danno comunemente due differenti maniere per rappresentare graficamente i periodi di una funzione semplicemente periodica: o per mezzo di segmenti uguali presi sopra una retta indefinita a partire da un certo punto origine, in ambo le direzioni; o con una circonferenza di lunghezza uguale al periodo, che si considera percorsa un numero indefinito di volte in ambo i sensi a partire da un punto origine. Questa seconda maniera dà la rappresentazione di tutto il campo infinito di variabilità in una porzione finita di linea, e gode della proprietà che tutti i valori omologhi della funzione possono considerarsi come individuati da un unico punto della figura.

Nel caso delle funzioni doppiamente periodiche la rappresentazione dei periodi mediante parallelogrammi contigui corrisponde evidentemente al primo dei

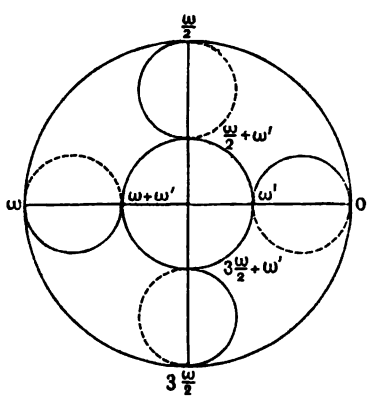


Fig. 1.

due metodi ricordati relativi alle funzioni semplicemente periodiche. Però può darsi, anche per i periodi delle funzioni doppiamente periodiche, una rappresentazione che corrisponda al secondo metodo.

Siano 2ω e $2\omega'$ i periodi. Rappresentiamo il modulo di 2ω con una circonferenza fissa (fig. 1) considerata percorsa in direzione positiva a partire da zero

il modulo di $2\omega'$ con una circonferenza tangente alla prima internamente in un punto qualsiasi, di diametro minore al raggio della precedente e percorsa nella stessa direzione a partire dal punto di tangenza. Supponiamo quindi che tutte le circonferenze rappresentanti il modulo di $2\omega'$ ruotino di un angolo infinitesimo attorno al diametro passante per la loro origine, in modo che le semicirconferenze ω' che, partendo dal detto punto di contatto, vengono percorse prima, rimangano dalla parte superiore del piano della circonferenza 2ω, e le altre rimangano dalla parte inferiore.

Tutte le infinite circonferenze $2\omega'$, che si possono immaginare sussistere in queste condizioni, formano una corona circolare costituita di due strati sovrapposti e distinti, saldati per i margini circolari interni ed esterni.

Un punto qualsiasi del consueto piano parallelogrammico può essere sempre rappresentato dall'espressione

$$2a\omega + 2b\omega' \tag{1}$$

in cui a e b sono numeri reali qualsiasi. Si voglia rappresentare tale punto col sistema di cerchi indicato: a partire dallo zero di 2ω percorreremo su questa circonferenza l'arco $2a\omega$, poi a partire dall' estremo di esso percorreremo sulla circonferenza $2\omega'$, che ivi è langente alla circonferenza 2ω, l'arco $2b\omega'$; l'estremo di questo lo chiameremo il punto $2a\omega + 2b\omega'$.

Tutti i valori della forma (1) sono compresi nella corona anulare generata dalle circonferenze $2\omega'$.

Precisamente se noi mandiamo per tutti i punti

$$2h\omega + (2k+1)\omega' \qquad [h\,,\,k = 0\,,1\,,2\,,\ldots]$$

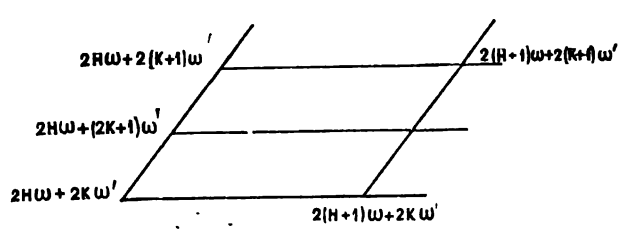


Fig. 2.

del piano parallelogrammico (fig. 2) delle rette parallele alla direzione del modulo di 2ω, verremo a dividere tutti i parallelogrammi in due parti: una costituita da punti in cui

$$2k < 2b < 2k+1 \tag{2}$$

e l'altra da quelli in cui

$$2k+1 < 2b < 2(k+1)\,; \tag{3}$$

i punti delle prime parti vengono tutti rappresentati da punti dello strato superiore della corona, i punti delle seconde parti da punti dello strato inferiore. I punti per i quali

$$2b = 2k$$

sono tutti situati sulla circonferenza esterna della corona, quelli invece per cui

$$2b = 2k + 1$$

sono situati sulla circonferenza interna.

Viceversa ad ogni punto di questa corona, considerato come appartenente al primo o al secondo strato, e ad ogni punto dei contorni di essa corrisponde un valore della forma $2a\omega + 2b\omega'$ a meno di una quantità

$$2m\omega + 2n\omega'$$

dove m ed n sono interi, positivi, negativi o nulli.

La corona circolare ci rappresenta dunque il piano parallelogrammico di una funzione doppiamente periodica e ad ogni punto della corona, immaginato

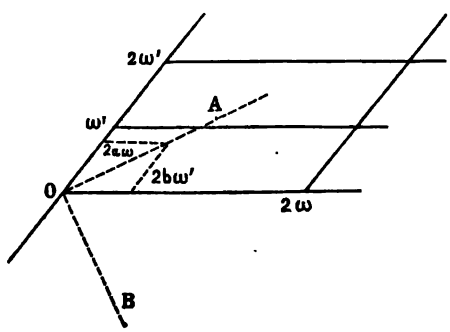


Fig. 3.

connesso ad uno dei due strati, corrispondono tutti i punti omologhi del piano parallelogrammico. In O coincidono tutti i vertici dei parallelogrammi.

Come nella rappresentazione parallelogrammica, così in questa, che potremo chiamare ciclica, si può invertire l'ordine del cammino da seguirsi per arrivare ad un determinato punto; così al punto $2a\omega + 2b\omega'$ si può pervenire percorrendo prima $2b\omega'$ poi $2a\omega$, con l'avvertenza di descrivere non l'arco $2a\omega$ sulla circonferenza 2ω, ma un arco di ugual angolo al centro sulla circonferenza di raggio uguale alla distanza del punto $2b\omega'$ dal centro del cerchio 2ω. Questo arco concentrico di $2a\omega$ dovrà essere percorso sul primo o sul secondo strato della corona secondochè si trova su quello o su questo il punto $2b\omega'$ in cui detto arco si inizia.

Si può osservare che ad una parallela al modulo del primo periodo corrisponde, in questo sistema, un cerchio concentrico al 2ω, situato nello strato superiore o nell'inferiore secondochè la parallela appartiene alla parte di parallelogrammo in cui è soddisfatta la condizione (2) o la condizione (3); ad una parallela al modulo del secondo periodo corrisponde un cerchio $2\omega'$.

Consideriamo ora nel parallelogrammo fondamentale (fig. 3) la bisettrice OA

dell' angolo dei moduli di 2ω e di $2\omega'$, uscente dal punto O; essa è costituita dai punti per i quali

$$|2a\omega| = |2b\omega'|$$

quindi nella rappresentazione ciclica (fig. 4) essa corrisponde ad uaa linea formata dai punti M a cui si perviene percorrendo nel cerchio delle ω' a partire dal punto di tangenza A un arco della stessa lunghezza di quello che, sul cerchio delle ω, va dall' origine O al punto A. Se l' arco AM fosse uguale all' arco QB, del contorno interno, il luogo dei punti M sarebbe la epicicloide descritta dal punto O nel rotolamento del cerchio di diametro OQ attorno al contorno interno della corona, ma poichè l'arco AM è uguale all'arco OA e quindi non uguale, ma direttamente proporzionale all' arco QB, ne deriva che la curva dei punti M differisce da una epicicloide per il fatto che il cerchio mobile rotolando sul cerchio base non gira di un arco uguale, ma soltanto proporzionale all'arco percorso su quello.

Se invece consideriamo la bisettrice dei moduli di 2ω e di $-2\omega'$ uscente da

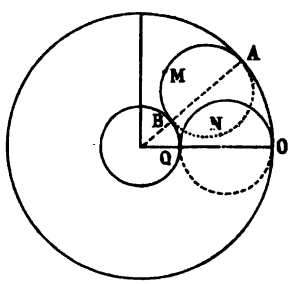


Fig. 4.

O, cioè la OB perpendicolare in O alla OA (fig. 3), troviamo che i suoi punti, essendo quelli per i quali

$$|2a\omega| = |-2b\omega'|,$$

nella rappresentazione ciclica sono punti dei cerchi $2\omega'$ che distano dai punti di tangenza di questi col cerchio 2ω, in direzione negativa, di un arco uguale a quello di 2ω che, in direzione positiva, va dall'origine O al detto punto di tangenza. Nella fig. 4, essendo l'arco AN uguale all'arco OA, N è un punto della perpendicolare considerata. Il luogo di questi punti è la ipocicloide descritta dal punto O nel rotolamento del cerchio delle $2\omega'$ sul cerchio delle 2ω

Due punti che appartengano uno a ciascuna delle due bisettrici OA ed OB (fig. 3) sopra considerate e che corrispondano rispettivamente ai valori

$$2a\omega + 2b\omega' \quad , \quad 2a\omega - 2b\omega',$$

nella rappresentazione ciclica si trovano sul medesimo cerchio $2\omega'$ simmetrici

rispetto al diametro di questo cerchio che passa per il centro della corona e situati in conseguenza su strati diversi di questa.

Ciò che si è detto per il parallelogrammo fondamentale si può ripetere per qualsiasi altro parallelogrammo.

A due punti del medesimo strato della corona simmetrici rispetto al centro di questa corrispondono due punti situati su una medesima parallela al modulo di 2ω, i cui valori z e z' soddisfano alla condizione

$$|z - z'| = |(2m + 1)\omega|$$

dove m è zero o un intero qualsiasi positivo o negativo

A due punti invece situati agli estremi di un medesimo diametro di un cerchio $2\omega'$, e in conseguenza su strati diversi della corona, corrispondono punti di una medesima parallela al modulo di $2\omega'$ e i cui valori z, z' soddisfano alla condizione

$$|z - z'| = |(2m + 1)\omega'|$$

dove m ha il significato precedente.

I punti diametrali, nei cerchi $2\omega'$, dei punti M ed N considerati (fig. 4) sono quindi punti delle parallele alle bisettrici OA ed OB (fig. 3) condotte per un punto $(2m + 1)\omega'$.

Serviamoci di questa rappresentazione per la funzione $\mathrm{sn}z$.

Poichè non ci occuperemo di quistioni che riguardino il rapporto fra i periodi, potremo conservare il diametro della circonferenza $2\omega'$ minore del raggio della circonferenza 2ω.

Abbiamo

$$\mathrm{sn}o = \mathrm{sn}\omega = o\ ,$$

$$\mathrm{sn}\frac{\omega}{2} = -\mathrm{sn}3\frac{\omega}{2} = 1$$

e da ciò appare evidente come in rapporto al primo periodo la funzione $\mathrm{sn}z$ si comporti come la funzione $\mathrm{sen}\frac{\pi z}{\omega}$.

Dalle uguaglianze

$$\mathrm{sn}\omega' = \mathrm{sn}(\omega + \omega') = \infty$$

$$\mathrm{sn}\left(\frac{\omega}{2} + \omega'\right) = -\mathrm{sn}\left(\frac{3\omega}{2} + \omega'\right) = \frac{1}{k}$$

risulta che i valori ∞, $\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$ sono distribuiti come appare dalla figura 5.

Dalla proprietà

$$\mathrm{sn}z = \mathrm{sn}(\omega - z)$$

si deduce che sono uguali tutti i valori corrispondenti a punti simmetrici rispetto al diametro $(1\ ,\ -1)$ e situati su strati diversi della corona e che ai punti di questo diametro corrispondono valori uguali nei due strati.

Poichè $\mathrm{sn}z$ è funzione dispari risultano uguali e di segno opposto i valori corrispondenti ai punti simmetrici rispetto al diametro $(o\ ,\ o)$ e situati su strati diversi della corona.

Ora siano A e B simmetrici rispetto a $(o\ ,\ o)$ e rispettivamente negli strati superiore ed inferiore e C nello strato superiore simmetrico di B rispetto $(1, -1)$;

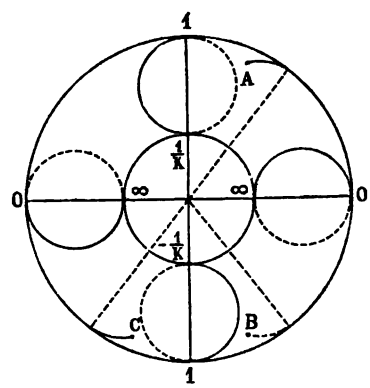


Fig. 5.

poichè da A a C si passa con l'aggiunta di ω, accoppiando le due precedenti osservazioni, deduciamo l'altra proprietà della funzione $\mathrm{sn}z$ espressa dall'uguaglianza

$$\mathrm{sn}(z + \omega) = -\,\mathrm{sn}z.$$

Con questa rappresentazione l'analogia fra le funzioni $\mathrm{sn}z$ e $\mathrm{sn}\frac{\pi z}{\omega}$, si manifesta non solo relativamente al primo periodo, ma anche relativamente a tutti i loro valori nei quadranti in cui vengono decomposti i rispettivi campi di variabilità.

La proprietà

$$\mathrm{sn}(\omega' + z) = \frac{1}{k\,\mathrm{sn}z}$$

si traduce nel fatto che a tatti i punti situati all'estremo di uno stesso diametro di un cerchio qualsiasi $2\omega'$, e in conseguenza su strati diversi della corona, corrispondono valori di $\mathrm{sn}z$ il cui prodotto è costante ed uguale ad $\frac{1}{k}$.

Simile rappresentazione potrebbe farsi per le funzioni $\mathrm{cn}z$ e $\mathrm{dn}z$, e per la $\mathrm{cn}z$ si riscontrerebbero con la funzione $\cos\frac{\pi z}{\omega}$ le stesse analogie di quelle riscontrate fra $\mathrm{sn}z$ e $\mathrm{sen}\frac{\pi z}{\omega}$.

SULLE VARIETA DEL QUARTO ORDINE CON PIANO DOPPIO

DELLO SPAZIO A QUATTRO DIMENSIONI

NOTA

DEL

Dott. GIUSEPPE MARLETTA.

(*Contin. e fine, v. Vol.* XL, *pag.* 265-274, *Vol.* XLI, *pag.* 47-61)

IV.

Superficie notevoli della varietà Γ.

41. Le rette di Γ non incidenti il piano π costituiscono una rigata θ la cui immagine θ' nell'iperpiano Ω' (20, 1) è costituita dalle ∞^1 coniche che passano per il punto O′ e si appoggiano in quattro punti alla curva f' ed in uno alla retta t'.

La traccia di questa rigata θ sul piano π è costituita da un certo numero di sue generatrici, posizioni limiti delle rette di Γ non incidenti π, ma ad esso infinitamente vicine.

Una di queste generatrici, come retta di π ha per immagine nello spazio rappresentativo Ω' uua quartica piana con un punto doppio in t', la quale si appoggia otto volte alla curva f', ed ha inoltre il punto O′ come doppio.

D'altra parte quella siessa retta come generatrice della rigata θ, ha per immagine una conica passante per O′ e che si appoggia in quattro punti alla curva f' ed in un punto alla retta t'. Ne segue, che per conoscere il numero delle generatrici (distinte) di θ che sono in π, basta trovare il numero delle sezioni della superficie π′ (n° 16), con piani passanti per O′, che si spezzano in due parti, una delle quali, e per conseguenza anche l'altra, è una conica definita come dianzi. Ora dalla rappresentazione piana della π′ (superficie del quart'ordine con la retta doppia t' e il punto doppio O′, sappiamo che le sue sezioni fatte con piani passanti per O′, hanno per immagini le cubiche $C^3_{0345678}$; che il punto *doppio* O′ ha per immagine la *retta* 012; e che inoltre, com'è facile verificare, alla curva f' corrisponde una $C^6_{0^4345678}$.

Quindi, se una di queste sezioni piane si deve spezzare, come sopra si è detto, la corrispondente immagine si scinderà nella conica C^2_{0abcd} e nella retta C^4_{ef}: dove a, b, c, d, e, f, sono i numeri 8, 4, 5, 6, 7, 8 presi in un certo modo Si osservi inoltre, che la $C^3_{0^2345678}$ ed il punto O sono immagini di due coni-

che, come quelle che consideriamo, giacenti in uno stesso piano (per il punto doppio O').

Adunque le coniche in parola che stanno sulla superficie π' sono 32; e per conseguenza le generatrici *distinte* della rigata θ nel piano π, sono *sedici*.

Sia g una di esse; vediamo qual' è la sua *multiplicità* per θ. Se g_1' e g_2' sono le due coniche componenti l'immagine della retta g nello spazio rappresentativo Ω', la superficie θ' passa con una falda per g_1' e con un'altra per g_2': corrispondentemente la rigata θ passerà con *due* falde per la generatrice g, che è quindi *doppia* per θ. Adunque:

« *La rigata delle rette di* Γ *non incidenti il piano* π, *ha sedici generatrici doppie in questo piano.*

42. Sia δ la quadrica ulteriore intersezione di Γ con un iperpiano arbitrario Σ passante per π; ed indichiamo con l la curva giacente su δ, sezione della rigata θ con Σ, a prescindere dalle generatrici che questa ha in π. Per avere l'ordine della curva l basterà trovare il numero di punti che essa ha in π: e a questo scopo cercheremo primieramente il numero dei punti che l ha in una qualunque g delle sedici generatrici doppie che θ ha nel piano π; giacchè la l non potrà essere incontrata da questo piano in punti fuori dalle dette rette.

Ora si osservi, che se è d la conica traccia di δ in π, i due punti gd sono *semplici* per l, in quanto questa deve incontrare *due* volte, e non più, la generatrice *doppia* g.

Ne segue che la curva l è del trentaduesimo ordine, e per conseguenza « *la rigata* θ *è del sessantaquattresimo ordine.*

Una retta arbitraria di Γ uscente da un punto qualunque del piano π, incontra la curva l, e quindi anche la θ in *sedici* punti.

Osserviamo inoltre che un punto doppio staccato della varietà è un punto *ottuplo* per la rigata in esame, giacchè per esso passano (n.i 28 e segg.) otto generatrici di questa.

43. Abbia Γ due soli punti doppi staccati A_1, A_2 giacenti in uno stesso iperpiano per π. La quadrica ulteriore intersezione della varietà con questo iperpiano, è specializzata in due piani μ e ν.

La rigata θ *si spezza in due altre* θ_1 *e* θ_2, la prima costituita dalle rette di Γ non incidenti π, ma che hanno un punto in comune col piano μ; e l'altra formata, analogamente, dalle rette della varietà non incidenti π ma che incontrano ν.

È evidente poi che:

a) « *Le rigate* θ_1 *e* θ_2 *sono ambedue del trentaduesimo ordine; ciascuna di esse ha in* π *sedici generatrici* (*semplici*) [1], *ed ha ottupli i punti doppi* A_1 *ed* A_2 ».

b) Se la varietà Γ acquista altri due punti doppi staccati in uno stesso iperpiano per π, la θ si spezza in *quattro* rigate, una qualunque delle quali è

---

[1] Alcune di queste proprietà si possono dimostrare considerando la rappresentazione piana della superficie π' (n.° 34).

costituita dalle rette di Γ non incidenti π e che incontrano *un piano determinato* di ciascuna delle due coppie di piani della varietà.

« *Ognuna delle sopradette quattro rigate è del sedicesimo ordine; ha inoltre, otto generatrici (semplici) in* π [1], *ed ha* (n.° 30) *come quadrupli i punti doppi di* Γ ».

c) Abbia la varietà altri due punti doppi staccati in uno stesso iperpiano per π.

« *La superficie* θ *si spezza in otto rigate dell'ottavo ordine, che hanno quattro generatrici (semplici) per ciascuna in* π, *ed hanno come doppi i punti doppi di* Γ (n.° 31) ».

d) Analogamente, se la varietà acquista altri due punti doppi staccati,

« *la* θ *si spezza in sedici rigate del quarto ordine con due generatrici (semplici) in* π *; e ciascuna di esse passa inoltre semplicemente per i punti doppi di* Γ ».

e) Se, infine, la varietà presenta dieci punti doppi staccati,

« *la superficie* θ *si spezza in trentadue rigate quadriche, ciascuna delle quali ha una generatrice in* π *e passa per cinque dei punti doppi della varietà. Di questi cinque punti due qualunque non sono in uno stesso iperpiano per* π ».

Giacchè l'intersezione, fuori da questo piano, di una delle sopradette quadriche con l'iperpiano $A_1\pi \equiv A_2\pi$, p. es., è costituita da una sola retta, la quale non può contenere che uno solo dei punti A_1, A_2.

44. Supponiamo ora nuovamente che la varietà Γ non abbia alcun punto doppio staccato; e sia τ la superficie costituita dalle coniche di Γ aventi in comune col piano π un sol punto dato H.

La traccia di τ in π è formata da un certo numero di sue coniche generatrici, posizioni limiti delle coniche della varietà incidenti nel solo punto H il piano π.

Cominciamo dall'osservare che, siccome la tangente in H ad una conica generatrice di τ, giace in *uno determinato* dei due iperpiani tangenti a Γ nel sopradetto punto, *la superficie* τ *dovrà spezzarsi in due altre* τ_1 *e* τ_2.

Sia q una conica generatrice di τ_1 in π: essa, come tale, ha per immagine sullo spazio rappresentativo Ω', una cubica gobba q' avente due punti in t', cinque in f', e passante semplicemente per O' (n.° 20, 2)). Inoltre la q' passerà per *uno determinato* dei due punti H'_1, H'_2 immagini in Ω' del punto (doppio) H: poniamo che passi per H'_1.

Una cubica siffatta di π' ha per immagine, nel piano rappresentativo di questa superficie, una delle curve generiche C^1_{ha}, C^2_{0habc}, $C^3_{0habcde}$ $(a, b, c, d, e = 3, 4, .., 8)$,

---

[1] Basta infatti considerare la rappresentazione piana di π', dalla quale risulta come le otto generatrici in π di una qualunque delle quattro rigate, sono anche generatrici della rigata costituita dalle rette di Γ non incidenti π nè quei due piani di Γ, che sono incontrati dalle generatrici della prima rigata.

dove h è l'immagine del punto H'_1. Ne segue che il numero delle coniche come la q è *trentadue.*

Cerchiamo ora l'ordine della curva s intersezione variabile della superficie τ_1 con un iperpiano Σ passante per π. Indichiamo con δ la quadrica di Γ in Σ, con d' la conica immagine in Ω' dell'altra $d \equiv \delta\pi$.

La cubica q' è incontrata, fuori della retta t', dal piano $\Sigma\Omega'$ in un sol punto Y'. Ma la τ'_1, immagine in Ω' della superficie τ_1, passa con una *sola falda* per q'; quindi la sua ulteriore intersezione s', immagine di s, con il piano $\Sigma\Omega'$, passerà con un sol ramo per Y', e in conseguenza la curva s passerà con un sol ramo per il punto Y corrispondente in q a Y'.

Adunque possiamo concludere che la curva s incontra il piano π in *trentadue* punti; e per conseguenza che

« *la superficie* τ_1 *è d'ordine novantasei* ».

Inoltre *per questa il punto* H *è multiplo secondo trentadue.*

Osserviamo ancora che ciascuna delle quattro rette di Γ uscenti da H, si appoggia in *sedici* punti alla curva s corrispondente (per quanto è noto circa le curve tracciate su quadriche).

Per la τ_2 si possono ripetere le stesse considerazioni fatte per la τ_1; a cui, pertanto essa è analoga in tutto. Notisi che due coniche della varietà situate in uno stesso piano, e che incontrino π nel solo punto H, appartengono una alla superficie τ_1, e l'altra alla superficie τ_2.

45. *a*) Se la varietà Γ acquista due punti doppi staccati in uno stesso iperpiano per π,

« *la superficie* τ_i (i = 1, 2) *si spezza in due altre del quarantottesimo ordine, aventi il punto* H *per multiplo secondo il numero sedici, per ottupli i punti doppi di* Γ, *e aventi sedici coniche generatrici in* π. *Inoltre ciascuna di queste due superficie è incontrata in otto punti, fuori di* H, *da ognuna delle quattro rette di* Γ *uscenti da questo stesso punto* ».

b) Se la varietà presenta quattro punti doppi staccati in due iperpiani per π,

« *la* τ_i (i = 1, 2) *si spezza in quattro superficie d' ordine ventiquattro, col punto* H *ottuplo, con i punti doppi di* Γ *come quadrupli, e con otto coniche generatrici in* π. *Inoltre ciascuna di queste quattro superficie è incontrata in quattro punti, fuori da* H, *da ognuna delle quattro rette di* Γ *uscenti da questo stesso punto* ».

c) Se Γ ha sei punti doppi staccati in tre iperpiani per π,

« *la superficie* τ_i (i = 1, 2) *si spezza in otto superficie del dodicesimo ordine, aventi il punto* H *quadruplo, doppi i punti doppi staccati della varietà, e quattro coniche generatrici in* π. *Inoltre ciascuna di queste otto superficie è incontrata in due punti, fuori da* H, *da ognuna delle quattro rette di* Γ *uscenti da questo stesso punto* ».

d) Se Γ ha otto punti doppi staccati in quattro iperpiani per π,

« *la* τ_i (i = 1, 2) *si scinde in sedici superficie del sesto ordine aventi due coniche in* π, *doppio il punto* H, *e semplici i punti doppi staccati della varietà.*

Inoltre ciascuna di queste superficie è incontrata in un sol punto, fuori di H, *da ognuna delle quattro rette di* Γ *uscenti da questo stesso punto* ».

e) Se infine la varietà Γ ha dieci punti doppi staccati (in cinque iperpiani per π),

« *la* τ_i (i = 1, 2) *si spezza in trentadue superficie cubiche, ciascuna avente una conica in* π, *e passante semplicemente per* H, *e per cinque dei punti doppi staccati di* Γ, *due qualunque dei quali non giacenti in uno stesso iperpiano per* π. *Inoltre ciascuna di queste superficie è incontrata in un punto solo, fuori di* H, *da due determinate delle quattro rette di* Γ *uscenti da questo stesso punto. Queste due rette non giacciono in uno stesso iperpiano per* π ».

Osserviamo che il cono proiettante dal punto H la τ_1 (o una qualunque delle superficie, in cui essa si spezza nelle varie ipotesi sopra considerate) passa per la τ_2 (o per una determinata delle varie superficie di cui questa è composta nelle stesse ipotesi); e viceversa.

V.

Contorni apparenti.

46. Consideriamo la varietà Γ nell'ipotesi che non abbia alcun punto doppio fuori dal piano π.

« *Il contorno apparente di* Γ *da un punto qualunque* H *di* π, *sopra un iperpiano arbitrario* Ω, (*non passante per questo piano*) *è una superficie* γ *del sesto ordine con la retta* Ωπ *quadrupla, e quattro punti doppi* (*posti a coppie in due piani passanti per la retta singolare*) *nelle tracce delle quattro rette della varietà uscenti da* H ».

È evidente poi che ogni punto doppio acquistato dalla varietà Γ, produce un punto doppio della superficie γ.

Viceversa ogni superficie γ di Ω, del sesto ordine, con una retta quadrupla e quattro punti doppi posti a coppie su due piani passanti per la retta singolare, è contorno apparente di una varietà Γ, di S_4, del quarto ordine, con un piano doppio (e senza alcun punto doppio fuori da questo piano).

Infatti sia (1) $f = 0$ l'equazione di γ qualora si prendano i suoi quattro punti doppi come vertici del tetraedro fondamentale delle coordinate x_2, x_3, x_4, x_5.

Si ponga ora: $y_3 = x_3$, $y_4 = x_4 - \mu x_3$, $y_2 = x_2$, $y_5 = x_5 - \nu x_2$, se sono $x_4 - \mu x_3 = 0$ ed $x_5 - \nu x_2 = 0$ le equazioni della retta quadrupla di γ.

La (1) per queste posizioni si trasformi nell'altra $f_1 = 0$. Si prenda ora un punto arbitrario A di S_4, fuori di Ω, come vertice rimanente del pentaedro fondamentale delle coordinate, e sia Γ una varietà del quarto ordine che abbia come doppio il piano ABC, e passi per le due rette AD, AE.

Sia $f_2 = 0$ l'equazione del contorno apparente γ_1 di Γ da A nell'iperpiano $x_1 = 0$. In allora γ e γ_1 sono riferiti allo stesso tetraedro fondamentale, e si può facilmente verificare che potremo determinare i coefficienti di f_2 in modo che si abbia $f_2 \equiv f_1$.

47. Si osservi che la traccia nell'iperpiano iconico Ω di un piano che proietti da un punto H di π, una qualunque delle generatrici della rigata θ (n.° 41), è una *tangente tripla* della superficie γ contorno apparente della varietà Γ dal punto H sull'iperpiano Ω. Lo stesso dicasi per la traccia del piano di una qualunque delle coniche generatrici della superficie τ.

Viceversa è chiaro che una tangente tripla di γ proiettata dal punto H dà un piano che seca la varietà lungo una quartica di cui fa parte una retta non incidente π, ovvero lungo una quartica spezzata in due coniche ciascuna delle quali ha in π il solo punto H.

Detto ciò possiamo (n.° 46) dedurre sulle tangenti triple di certe superficie del sesto ordine dello spazio ordinario, i seguenti sei teoremi, la cui dimostrazione consiste nel richiamare quanto è stato detto circa alle superficie θ e τ della varietà Γ, con l'osservazione fatta in fine del capitolo precedente.

1.°) « *Le tritangenti della superficie del sesto ordine dotata di una retta quadrupla e di quattro punti doppi, posti a coppie su due piani passanti per la medesima, costituiscono due rigate del sessantaquattresimo grado contenenti quella retta multipla secondo trentadue e quei punti multipli secondo sedici* (numeri 42, 44) ».

2.°) « *Le tritangenti della superficie del sesto ordine dotata di una retta quadrupla e di sei punti doppi, posti a coppie su tre piani passanti per la medesima, costituiscono quattro rigate del trentaduesimo grado, contenenti quella retta multipla secondo sedici e quei punti come ottupli* [nn. 43, *a*), e 45, *a*)] ».

3.°) « *Le tritangenti della superficie del sesto ordine dotata di una retta quadrupla e di otto punti doppi, posti a coppie su quattro piani passanti per la medesima, costituiscono otto rigate del sedicesimo grado, contenenti quella retta come ottupla e quei punti come quadrupli* [nn. 43, *b*), e 45, *b*)] ».

4.°) « *Le tritangenti della superficie del sesto ordine dotata di una retta quadrupla e di dieci punti doppi, posti a coppie su cinque piani passanti per la medesima, costituiscono sedici rigate dell' ottavo grado contenenti quella retta come quadrupla e quei punti come doppi* [nn. 43, *c*), e 45, *c*)] » (¹).

5.°) « *Le tritangenti della superficie del sest'ordine dotata di una retta quadrupla e di dodici punti doppi, posti a coppie su sei piani passanti per la medesima, costituiscono trentadue rigate del quarto grado contenenti quella retta come doppia e quei punti come semplici* [nn. 43, *d*), e 45, *d*)] ».

6.°) « *Nella superficie del sest' ordine dotata di una retta quadrupla e di quattordici punti doppi posti a coppie sopra sette piani passanti per questa retta, i punti doppi possono distribuirsi in sessantaquattro settuple contenute in altrettante rigate quadriche passanti per la medesima. Due punti d'una stessa settupla non sono mai in un piano con la retta singolare. Tali rigate quadriche compongono l'intero sistema delle tritangenti di questa superficie* [nn. 43, *e*), e 45, *e*)] ».

(¹) Questo teorema ed i due seguenti furono trovati, mercè una via completamente diversa, dal C.mo Prof. M. Pieri, nella sua nota: " Sulle tangenti triple di alcune superficie del sest'ordine ". — Atti della R. Acc. delle scienze di Torino. — Vol. XXIV, 1889.

48. Se la varietà Γ ha un solo punto doppio staccato A fuori da π, il suo contorno apparente da questo è una superficie γ_1 del quarto ordine con otto punti doppi. Questi sono le tracce delle otto rette di Γ non incidenti π e uscenti da A. Per ogni altro punto doppio staccato che abbia la varietà, il contorno apparente γ_1 acquista anche un altro punto doppio; e quando Γ ha dieci punti doppi, o nove (purchè in questo ultimo caso nessuna retta congiungente A con un altro punto doppio incontri π), la superficie γ_1 ha sedici punti doppi, cioè sarà *la superficie del Kummer del quarto ordine e della quarta classe.*

Il cono Λ del sesto ordine con il piano π quadruplo circoscritto a Γ da un punto H di questo, tocca la varietà stessa lungo una superficie μ dell'ottavo ordine, la cui traccia in π è una sestica.

La sezione di Γ con un piano ω interseca μ in otto punti che sono di contatto fra la detta sezione e la sestica $\Lambda\omega$.

Ne segue che la proiezione della $\Gamma\omega$ da H su un iperpiano qualunque Ω, è una quartica piana che tocca il contorno apparente γ di Γ da H in tutti gli otto punti ove l'incontra, fuori dalla retta $\Omega\pi$. Dunque l'immagine della quartica $\Gamma\omega$ è *iscritta* nel contorno apparente γ di Γ.

Analogamente l'immagine della superficie $\Xi\Gamma$ dove Ξ è un iperpiano qualunque, tocca γ lungo una curva dell'ottavo ordine avente sei punti nella retta $\Omega\pi$, cioè è iscritta in γ. Concludendo abbiamo:

« *Il contorno apparente γ della varietà Γ da un punto qualunque* H *del piano doppio π, ammette un sistema ∞^4 di superficie del quarto ordine aventi come doppia la traccia di π nello spazio iconico, e che lo toccano lungo curve dell'ottavo ordine, ed un sistema ∞^6 di quartiche (del genere* p=2) *che hanno un punto doppio nella sopradetta traccia di π, e lo toccano in otto punti* ».

49. Consideriamo ora in particolare il caso in cui la varietà Γ abbia *dieci* punti doppi staccati.

Il contorno apparente γ_1 di Γ da uno di essi A in un iperpiano generico Ω, è la superficie del Kummer del quarto ordine e della quarta classe, che, com'è noto, gode della proprietà che le quaterne dei suoi punti e dei suoi piani tangenti appartenenti ad una stessa retta, hanno lo stesso birapporto. In allora possiamo dedurre il seguente teorema per la nostra varietà Γ:

« *Per una varietà del quarto ordine con un piano doppio e dieci punti doppi staccati, la quartica (ellittica) in cui è secata da un piano qualunque uscente da uno dei punti doppi, ha lo stesso birapporto della quaterna di iperpiani tangenti uscenti dal piano stesso* ».

Se ora noi consideriamo il contorno apparente γ della varietà da un punto H di π, che, com'è noto, è una superficie del sesto ordine con una retta quadrupla e quattordici punti doppi, abbiamo:

« *Nella serie razionale della semplice infinità di superficie del quarto ordine iscritte a γ e passanti per una data quartica piana (ellittica) iscritta anch'essa a γ, e avente uno dei suoi punti doppi nella retta quadrupla di γ, ve ne sono quattro dotate di un punto doppio, che hanno lo stesso birapporto della data quartica* ».

VI.

Varietà Γ *con infiniti punti doppi fuori da* π.

50. La varietà quartica Γ abbia fuori dal suo piano doppio, *una linea piana* l come doppia, ma non contenga superficie doppie diverse da π.

Osserviamo primieramente che l'ordine di l non può essere superiore a *tre*, giacchè una retta qualunque non può contenere più di tre punti doppi senza che essa sia doppia per la varietà. Adunque la linea l non può essere che o una retta, o una conica, od una cubica.

51. *Sia* l *una retta doppia non incidente* π.

Ogni piano μ passante per l seca ulteriormente la varietà Γ in due rette uscenti dal punto $\mu\pi$. Gl'iperpiani passanti per il piano doppio secano Γ ulteriormente in coni quadrici aventi i vertici sulla retta l. In ogni punto di questa, la varietà ha un cono quadrico tangente di seconda specie con l per sostegno. Ogni iperpiano per l seca Γ lungo una superficie del quarto ordine con due rette doppie sghembe, superficie che sappiamo essere una rigata ellittica.

L'equazione della varietà in esame può mettersi sotto la forma:

$$x_4^2\varphi + x_4x_5\psi + x_5^2\chi = 0,$$

dove le φ, ψ, χ sono forme quadratiche delle x_1, x_2, x_3. Il piano doppio è il piano fondamentale di equazioni $x_4 = 0$, $x_5 = 0$; la retta doppia è lo spigolo fondamentale di equazioni:

$$x_1 = 0 \ , \ x_2 = 0 \ , \ x_3 = 0.$$

Procedendo come nel n.° 7, oppure secando, con un iperpiano qualunque ed osservando che nella superficie ottenuta vi sono sei coppie di rette non passanti per il punto doppio, è facile vedere che tra la semplice infinità di coni quadrici di Γ in iperpiani per π, ve ne sono *sei* specializzati in coppie di piani.

52. *Sia* l *una conica doppia* in un piano μ avente con π un sol punto in comune.

Questa conica deve passare per il punto $\mu\pi$.

Infatti nel caso contrario, μ farebbe parte di Γ, ed un iperpiano Σ ad arbitrio passante per μ, segherebbe ulteriormente la varietà lungo una superficie del terzo ordine con la retta $\Sigma\pi$ dome doppia; questa superficie, poi, essendo secata da μ lungo la conica l e nel punto doppio $\mu\pi$ fuori di questa, si spezza nel piano μ e in altri due piani secantisi lungo la retta $\Sigma\pi$. Adunque μ sarebbe un piano doppio per qualunque sezione di Γ con un iperpiano che lo contenga,

cioè μ sarebbe *doppio* per la varietà, e ciò contro l'ipotesi che questa abbia un numero *semplicemente* infinito di punti doppi oltre di quelli del piano π.

La varietà Γ, inoltre, nei punti della conica l ha coni quadrici tangenti di seconda specie, aventi per sostegni le tangenti di l.

Ponendo

$$\varphi_2 = a_{44}x_4^2 + a_{55}x_5^2 + a_{14}x_1x_4 + a_{15}x_1x_5 + a_{24}x_2x_4 + a_{25}x_2x_5 + a_{34}x_3x_4 + a_{35}x_3x_5 + a_{45}x_4x_5 ,$$

ed indicando con α_2, β_2, γ_2, δ_1, ε_1 forme in x_4, x_5 rispettivamente di secondo e di primo grado, l'equazione di Γ nella presente ipotesi è:

$$\varphi_2^2 + x_2^2\alpha_2 + x_3^2\beta_2 + x_2x_3\gamma_2 + \varphi_2(\delta_1x_2 + \varepsilon_1x_3) = 0 ;$$

donde il piano π ha per equazioni:

$$x_4 = 0 \ , \ x_5 = 0 ;$$

il piano della conica è quello di equazioni:

$$x_2 = 0 \ , \ x_3 = 0 ;$$

la conica ha, poi, per equazione, in quest'ultimo piano:

$$a_{44}x_4^2 + a_{55}x_5^2 + a_{14}x_1x_4 + a_{15}x_1x_5 + a_{45}x_4x_5 = 0.$$

Come si vede da questa equazione, il punto $\mu\pi$ giace sulla conica doppia, come del resto si trovò sinteticamente.

La sezione di Γ fatta con un iperpiano Σ passante per μ, è una rigata razionale del quarto ordine avente per linea doppia la conica l e la retta $\Sigma\pi$ che si appoggia nel punto $\mu\pi$ ad l. Per un punto qualunque M di questa superficie passa una sua retta che si appoggia ad l ed alla retta $\Sigma\pi$; essa è la generatrice passante per M del cono quadrico di Γ nell'iperpiano $M\pi$. Gl'iperpiani per π secano ulteriormente la varietà Γ in coni quadrici aventi i vertici sulla conica l.

53. *Sia* l *una cubica (piana) doppia.*

Evidentemente il piano μ di l appartiene a Γ. Un iperpiano Σ passante per μ seca ulteriormente la varietà in una superficie del terzo ordine che passa per l, ed ha la retta $\Sigma\pi$ come doppia; quindi affinchè questa superficie cubica non si spezzi nel piano μ ed in una coppia di piani secantisi nella retta $\Sigma\pi$, la qual cosa porterebbe di conseguenza che μ sarebbe doppio per Γ, è necessario che il punto $\mu\pi$ sia doppio per la cubica l. Adunque se la varietà Γ ha una cubica piana come linea doppia, questa deve avere come doppio il punto comune al suo piano ed al piano π.

Dal fatto che un iperpiano Σ passante per μ seca ulteriormente Γ in una superficie del terzo ordine con la retta $\Sigma\pi$ come doppia, segue che il punto $\mu\pi$ è *triplo* per la varietà. Ciò si può anche dimostrare osservando che un iperpiano Ξ passante per π seca ulteriormente Γ in un cono quadrico di cui una generatrice è la retta $\Xi\mu$.

L'iperpiano Θ tangente alla varietà in un punto qualunque di μ non situato sulla cubica l, secherà ulteriormente Γ in una superficie del terzo ordine spezzata nel piano μ e in una coppia di piani secantisi nella retta $\Theta\pi$. Ciò vuol dire che l'iperpiano Θ è tangente alla varietà in tutti i punti del piano μ, compreso il punto $\mu\pi$.

I punti della cubica l hanno coni quadrici tangenti di seconda specie, aventi per sostegni le tangenti della l.

La coppia di piani di cui poco sopra si è parlato, seca la cubica l in due punti, diversi da $\mu\pi$, i quali sono biperplanari, giacchè hanno l'iperpiano Θ come un iperpiano tangente. Questi due punti saranno i soli punti biperplanari della cubica l: infatti se un punto di l è biperplanare per la varietà Γ, uno dei due iperpiani tangenti in esso a Γ, dovrà passare per μ, e secare ulteriormente la varietà in una superficie del terzo ordine passante per l, e avente quel dato punto come doppio, il che porta di conseguenza che μ fa parte di questa superficie cubica, della quale rimane una coppia di piani secantisi in π, ed uno di questi piani passa per il dato punto della l, sicchè l'iperpiano che si considera non è altro che Θ, e quel punto è uno dei due punti biperplanari poco sopra considerati.

Siano α e β i due piani di Γ nell'iperpiano Θ. Se Σ è un iperpiano passante per α, esso seca ulteriormente la varietà in una superficie del terzo ordine, la quale dovendo passare per la retta $\Sigma\pi \equiv \alpha\beta \equiv \alpha\pi$, secherà ulteriormente α in una conica passante per il punto $\mu\pi$.

Com'è facile vedere si ha così nel piano α un fascio di coniche. Queste si toccano nel punto biperplanare situato in α, e nel punto $\mu\pi$. La tangente comune nel punto biperplanare insieme con la tangente alla cubica l nel detto punto, determinano il piano sostegno dei due iperpiani tangenti a Γ nel detto punto biperplanare. La tangente comune alle sopradette coniche nel punto $\mu\pi$ è la retta $\alpha\beta \equiv \alpha\pi$, che è quella retta in cui il piano α seca ambedue i rimanenti iperpiani tangenti alla varietà Γ nel punto triplo.

Analogamente ragionisi per il piano β.

54. Senza andare a studiare i molteplici casi in cui la varietà Γ è dotata di una curva doppia l (riduttibile o no) che non sia piana, limitiamoci solamente a dimostrare, come se questa curva doppia è *irreduttibile ed immersa* nello spazio a quattro dimensioni, non può essere d'ordine superiore al *quarto*.

Infatti nel caso contrario si osservi che un iperpiano generico Σ non passante per π seca Γ in una superficie del quarto ordine con una retta doppia e con *più* di quattro punti doppi. Ne segue [1] che esisterà in Σ *almeno una corda*

---

[1] Salmon — l. c. — § 557.

della curva l che si appoggia alla retta $\Sigma\pi$. Se quindi notiamo che gli iperpiani per questa retta sono ∞^2, mentre sono ∞^1 quelli che passano per essa e contengono un dato piano in cui essa giaccia, deduciamo senz' altro che sono ∞^1 le corde di l che incontrano una retta generica di π. Ma le rette di questo piano sono ∞^2; e d'altra parte se una corda di l l'incontra, essa si appoggia ad una semplice infinità di rette di esso, quindi possiamo senz'altro inferire che sono ∞^2 le corde di l che incidono π: Ne segue che esistono infiniti punti di l per ciascuno dei quali passa una semplice infinità di corde della stessa l incidenti π. E ciò porta di conseguenza che della linea l faccia parte una curva immersa in uno spazio di un numero di dimensioni *inferiore* a quattro, la qual cosa è contro l'ipotesi che la l sia irreduttibile ed immersa nello spazio a quattro dimensioni.

55. Se la varietà Γ oltre di π ha un altro piano π' come doppio, avente con quest'ultimo un solo punto in comune, è un cono avente questo punto per vertice.

56. Siano, invece, π e π' incidenti, ed abbiano per equazioni rispettivamente: $x_4 = 0$, $x_5 = 0$; $x_3 = 0$, $x_5 = 0$. L'equazione della varietà Γ può mettersi sotto la, forma:

$$x_3^2 x_4^2 + u_1 x_3 x_4 x_5 + u_2 x_5^2 = 0, \tag{1}$$

dove le u_1, u_2 sono forme di primo e secondo grado nelle cinque variabili

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.$$

Gl'iperpiani Σ condotti ad arbitrio per π secano ulteriormente Γ in quadriche che determinano su questo piano una serie semplicemente infinita di coniche, d'indice due, il cui inviluppo, luogo dei punti uniperplanari di π è una quartica spezzata nella retta $\pi\pi'$ contata due volte, e in una conica. Infatti l' equazione di una conica generica della serie ora detta, è:

$$\lambda^2(u_2) + \lambda(u_1)x_3 + x_3^2 = 0,$$

dove (u_2) ed (u_1) rappresentano le u_2 ed u_1 dopo aver fatto $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, e dove inoltre è $x_5 = \lambda x_4$ l'iperpiano passante per π che la determina.

Ne segue che l'equazione dell'inviluppo è:

$$4x_3^2(u_2) - x_3^2(u_1)^2 = 0, \tag{2}$$

che si scinde nella $x_3^2 = 0$ e

$$4(u_2) - (u_1)^2 = 0, \tag{3}$$

cioè nella retta $\pi\pi'$ contata due volte, e nella conica di cui la (3) è l'equazione.

Che i punti della retta $\pi\pi'$ siano uniperplanari si può dimostrare osservando che i due iperpiani tangenti a Γ in uno di essi devono contenere π e π', cioè entrambi coincidono coll'iperpiano $\pi\pi'$.

Un iperpiano Σ passante per π seca ulteriormente la varietà Γ in una quadrica che è incontrata dalla retta $\pi\pi'$ in due punti che devono quindi essere *tripli* per la varietà medesima (giacchè in ciascuno si hanno tre spazi tangenti). Di conseguenza ciascuna conica traccia in π di una quadrica di Γ in un iperpiano per esso, deve passare necessariamente pei detti due punti tripli. Che effettivamente sulla retta $\pi\pi'$ vi sono due punti tripli si può anche dimostrare analiticamente osservando che dall' equazione della conica generica della serie, si deduce che questa conica, qualunque sia λ, deve passare necessariamente pei due punti comuni alla retta $x_3 = 0$, ed alla conica $(u_2) = 0$.

Sia

$$x_5 = \lambda x_4 \tag{4}$$

un iperpiano condotto ad arbitrio per π. La (1) per la sostituzione (4), e dopo aver diviso per x_4^2, diviene un'equazione il cui discriminante, a prescindere dal fattore λ^6, eguagliato a zero, ci dà quattro valori per λ tali che la quadrica ulteriore intersezione dell'iperpiano (4) con Γ, è specializzata in un cono quadrico. Adunque concludiamo che per ciascuno dei due piani doppi passano quattro iperpiani che secano ulteriormente la varietà Γ in altrettanti coni quadrici. Quindi, in questo caso, abbiamo sulla varietà *otto* coni quadrici, divisi in due quaterne.

Una generatrice qualunque di uno dei coni di una quaterna, incontra, com'è evidente, una generatrice di ciascuno dei coni dell'altra.

Cerchiamo ora il massimo numero finito di punti doppi staccati che la varietà può avere fuori dai piani π e π'.

Se A è un tal suo punto doppio, l'iperpiano $A\pi$ conta per *due* fra i quattro iperpiani passanti per π che secano Γ ulteriormente secondo un cono quadrico, quindi tutti i punti doppi (in massimo numero finito) fuori di π e di π', che la varietà può avere, sono distribuiti in due iperpiani passanti per π, e (in pari tempo) distribuiti in altri due passanti per π'.

Vediamo ora quanti ve ne possono essere in ciascuno di questi due iperpiani, uno dei quali sia Σ.

Se ve ne sono due, e siano A e B, la quadrica ulteriore intersezione di Γ con Σ è costituita di due piani μ e ν secantisi nella retta AB. La coppia di rette $\pi\mu$, $\pi\nu$, passa pei due punti tripli, e tocca in due punti la *conica inviluppo*. In allora se se Ξ è un iperpiano per μ, esso seca ulteriormente Γ in una superficie cubica che avrà come doppio il punto triplo di Γ che è nella retta $\pi\mu$, conterrà inoltre questa retta e i due punti A e B.

Quindi la conica ulteriore intersezione di questa superficie cubica col piano μ, dovrà necessariamente passare pei punti A, B, pel punto triplo, e per il punto in cui la retta $\pi\mu$ tocca la conica inviluppo, giacchè questo punto è uniperplanare, e già l'iperpiano Σ è tangente in esso a Γ. Se dunque ora noi facciamo variare Ξ, otteniamo in μ un fascio di coniche i cui punti base sono i quattro punti ora detti.

Si dimostra poi in modo analogo a come si fece nel n.° 27, che la varietà non può avere in Σ un terzo punto doppio staccato, giacchè si suppone che essa abbia un numero *finito* di punti doppi fuori dai piani π e π'.

Concludiamo adunque che:

« *La varietà del quarto ordine con due piani doppi incidenti, può avere sino a quattro punti doppi fuori da questi due piani. I quattro punti doppi sono i vertici di un quadrangolo semplice gobbo, di cui due lati opposti incontrano uno dei due piani doppi della varietà, e gli altri due lati opposti ne incontrano l' altro* ».

VII.

Una trasformazione doppia (1).

57. Abbiamo visto (II) come i punti della varietà Γ possono mettersi in corrispondenza biunivoca con quelli di un iperpiano Ω'.

In allora se osserviamo che proiettando Γ da un punto H di π sopra un altro iperpiano Ω si ottiene una corrispondenza (2, 1) tra Γ ed Ω, possiamo inferire che si può in tal modo stabilire fra i due spazi Ω ed Ω', una corrispondenza (1, 2), cioè si può così ottenere una *trasformazione doppia* dello spazio Ω nell'altro Ω'.

58. Gli *elementi fondamentali* di Ω' sono quelli i cui punti hanno in Γ infiniti corrispondenti, giacchè ai loro singoli punti corrispondono in Ω *più* punti. Quindi possiamo dire che gli elementi fondamentali di Ω' sono quei medesimi che sono fondamentali per la corrispondenza $\Omega' - \Gamma$, cioè sono: *la retta* t', *la curva* f', *il punto* O'. A questi però è d'aggiungere *la retta* $H'_1H'_2$, dove i punti H'_1, H'_2 sono posti nei due iperpiani Λ_1, Λ_2 tangenti alla varietà in H. Al punto H'_1 corrisponde in Γ l'*intorno* di H nell'iperpiano Λ_1, e quindi corrisponde in Ω *il* piano $\lambda_1 \equiv \Omega\Lambda_1$. Analogamente al punto H'_2 di Ω' corrisponde in Ω il piano $\lambda_2 \equiv \Omega\Lambda_2$.

Gli *elementi fondamentali* di Ω sono quelli a cui corrispondono in Γ o *linee*, o punti alla loro volta fondamentali per la varietà nella corrispondenza $\Gamma - \Omega'$. Quindi essi sono: *i quattro punti* A_1, B_1; A_2, B_2 tracce in Ω delle quattro rette di Γ passanti per H; la retta $u \equiv \Omega\pi$, la $v \equiv \Omega \cdot Hc$, e la conica w proiezione in Ω da H dell'altra e (n.° 18).

59. Se γ è la superficie del *sesto* (*d.* P. 36, II) ordine, con la retta u quadrupla ed i punti A_1, B_1, A_2, B_2 doppi, *contorno apparente* della varietà da H,

---

(1) Tutti i risultati sono stati ottenuti mercè la considerazione della varietà quartica Γ. La notazione (d. P...) serve *solamente* come una *verifica*, e si riferisce alla memoria del De Paolis: " Le trasformazioni doppie dello spazio ". Acc. dei Lincei, 1885.

essa è tale che i *due* punti di Ω' corrispondenti ad un suo punto qualunque, sono *infinitamente vicini*, e quindi essa è (*d.* P. 2) la *superficie limite* dello spazio Ω.

La *superficie doppia* γ' di Ω' è d'ordine *sette* (*d.* P. 36, I), ha la retta t' quintupla, il punto O' doppio, e passa semplicemente per la curva f'.

60. Per quanto è noto intorno alla rappresentazione della varietà Γ in Ω', abbiamo:

1°) Ad una retta r di Ω corrisponde in Ω' una curva r'_6 del *sesto* ordine, che si appoggia in quattro punti alla retta t', in dieci alla curva f', che ha il punto O' doppio, e che passa semplicemente pei due punti H'_1, H'_2.

La r'_6 è in corrispondenza biunivoca con la sezione di Γ fatta col piano Hr, ed è quindi del genere $p = 2$. Adunque la trasformazione doppia in parola, è del *genere* $p = 2$ (*d.* P. 10). Le coppie di punti *congiunti* di r'_6 corrispondenti ai singoli punti di r, sono le coppie di punti ove la r'_6 è incontrata, fuori da t', dai piani passanti per questa stessa retta.

2°) Ad un piano φ di Ω corrisponde in Ω' una superficie φ_5' del *quinto* ordine avente la t' tripla, la f' semplice, il punto O' doppio, e i punti H_1', H_2' semplici. Essa corrisponde alla sezione di Γ fatta coll'iperpiano $H\varphi$. Adunque la nostra trasformazione doppia é del *quinto ordine* (d. P, 10).

Le sezioni piane della superficie limite γ, punteggiata univocamente alla superficie doppia γ', hanno per corrispondenti in Ω' le intersezioni variabili di γ' con le superficie φ_5', cioè curve d'ordine *dieci* e genere $p = 4$.

3°) Viceversa ad una retta s' di Ω' corrisponde in Γ una quintica (razionale) che ha quattro punti in π, altri quattro in c, ed uno nella conica e: quindi la curva s_5 di Ω ad essa retta corrispondente è del *quinto* ordine, si appoggia in quattro punti alla retta u, in altri quattro alla v, ha un punto in w, e *tocca* (d. P. 16, II) la superficie limite γ in sette punti variabili. Le curve s_5 sono appunto in numero ∞^4, dovendo soddisfare a $4 + 4 + 1 + 7 = 4 \cdot 5 - 4$ condizioni (d. P. 35).

4°) Ad un piano ψ' di Ω' corrisponde in Γ una superficie del sesto ordine avente una quartica in π, e passante semplicemente per la retta c e per la sonica e; quindi la superficie ψ_6 di Ω corrispondente al piano ψ' è del *sesto* ordine, ha la retta u quadrupla, e contiene v e w semplicemente.

61. Ad un punto X' di t', che è fondamentale di 2ª classe (d. P. 10) per Ω', corrisponde in Ω la cubica (piana) x_3 (d P. 22) sezione con Ω del cono cubico che si ottiene proiettando da H la cubica piana di Γ corrispondente di X' (n° 18).

La x_3 si appoggia in tre punti alla v, ha un punto doppio nella u, cioè nel punto $HX' \cdot \Omega$, e incontra in un punto la conica w. Alla retta t' corrisponde in Ω la superficie τ del *quarto* ordine (d. P. 24, II), proiezione da H della sezione della varietà con l'iperpiano ct'. Questa superficie τ ha la retta u doppia, e passa semplicemente per la retta v e per la conica w.

62. Il punto X' di t' è congiunto ad una curva del *sesto* ordine avente cinque punti in t', e passante semplicemente per O'. Le curve congiunte ai punti di

t' generano una superficie del *settimo* ordine congiunte a t', che ha questa retta quintupla (d. P. 26), il punto O' doppio, e che passa semplicemente (d. P. 26) per la curva f'.

63. Data una retta generica s' di Ω' vogliamo trovare l'ordine della sua curva congiunta, e come si comporti con gli elementi fondamentali.

Sappiamo che nella corrispondenza $\Omega' - \Gamma$ ad s' corrisponde una curva s_1 del quinto ordine, avente quattro punti allineati in π, altri quattro in c, ed uno nella conica e. Proiettando la s_1 da H otteniamo un cono a due dimensioni del quinto ordine, che seca la varietà nella s_1, nelle quattro rette che da H proiettano i quattro punti che s_1 ha in π, e ciascuna di queste rette contata due volte, e in una curva residua s_2 del settimo ordine avente sei punti in π. Questa curva s_2, poi, non può avere alcun punto nè in c nè in e. Ne segue, applicando le formole (2) del n° 21, *bis*, che la curva congiunta della retta s' è d'ordine *otto*, si appoggia in *sette* punti alla t', in dieci alla curva f', e passa semplicemente per il punto O'.

Analogamente si può vedere che la superficie congiunta di un piano ψ' di Ω' è dell'*ottavo* ordine (d. P. 14, II), ha la retta t' sestupla, il punto O' doppio, e passa semplicemente per la curva f'.

È facile poi dimostrare che questa superficie passa per le *quattro* rette che uscendo dai punti H_1' ed H_2' si appoggiano contemporaneamente alla t' ed alla f'; per le *tre* generatrici di ξ' (n.° 16) corrispondenti ai tre punti di Γ in cui la c è secata dalla cubica ulteriore intersezione della varietà col piano Hc; per le *due* rette che da O' proiettano i due punti comuni alla e ed alla conica in cui ulteriormente è secata la quadrica di Γ nell'iperpiano $O'\pi$ dal cono quadrico He; e infine passa per *la* retta $O'H_1'H_2'$.

64. Ad un punto Y' di f' corrisponde in Ω la retta y, sezione con Ω del piano che dal punto H proietta la retta di Γ che passa per Y' e si appoggia a π ed alla c. La y incontra in un punto la u e in un altro la v.

Alla curva f' corrisponde in Ω la superficie del *decimo* ordine (d. P. 34, II) proiezione da H della rigata ς (n.° 14) di Γ. Un punto qualunque Y' di f' è congiunto ad una retta avente un punto in t' e passante per Y'. Le rette congiunte ai punti di f' generano una superficie di ordine dieci, che ha la t' ottupla, la f' semplice ed il punto O' doppio: essa è la superficie congiunta della curva f'.

65. Al punto O', fondamentale di 1ª classe (d. P. 10) corrisponde in Ω il piano $\Omega \cdot O'\pi$ contato *due* volte (d. P. 21, I). Ai punti H_1' ed H_2' (fondamentale di 1ª classe) corrispondono in Ω rispettivamente i due piani λ_1, λ_2 (d. P. 21, I), e sono congiunti ai piani $H_1't'$, $H_2't'$.

66. Ad un punto X di u corrisponde in Γ la retta HX, e quindi in Ω' una quartica piana (d. P. 30, I) che passa per i punti O', H_1', H_2', si appoggia in otto punti alla curva f', ed ha un punto doppio in t'. Da tanto deduciamo che

alla retta u di Ω corrisponde in Ω' la superficie π' (d. P. 31, V) *immagine* in Ω' del piano π. Evidentemente, poi, la π' è congiunta a se stessa.

Ad un punto Y di v corrisponde un punto Y' della retta $H_1' H_2'$, e la generatrice (d. P. 30, III) della rigata ξ', che giace nel piano $Y't'$. Quindi alla retta v, fondamentale di 1ª classe dello spazio doppio Ω, corrisponde in Ω' l'insieme della retta $H_1' H_2'$ e della superficie ξ' del quarto ordine (d. P. 31, III), la quale è quindi congiunta alla retta $H_1' H_2'$.

Evidentemente alla conica w, curva fondamentale di 1ª classe dello spazio Ω, corrisponde in Ω' il piano (d. P. 31, II) $O't'$. A ciascuno dei punti A_1, B_1, A_2, B_2 di Ω corrisponde in Ω' una retta che si appoggia alla t' ed alla f'.

67. La *jacobiana* delle superficie ς_5' è d'ordine sedici, e consta della superficie doppia γ' (d. P. 34, I) delle (d. P. 34, II) superficie ξ', π' e del piano $O't'$.

68. Risolviamo ora il seguente *problema*: Dato un punto qualunque U'_1 di Ω' costruire il suo congiunto U'_2. È chiaro che questo deve trovarsi nel piano $U'_1 t'$. Sia Q' il punto in cui questo piano è incontrato dalla retta $O'H'_1H'_2$, ed indichiamo con R'_1, R'_2, S'_1, S'_2, i punti in cui la superficie π' è incontrata fuori dalla t', da due rette qualunque del piano $U'_1 t'$ uscenti da Q'.

In allora se sono F_1', F_2', i due punti in cui questo piano seca fuori da t' la curva f', le due coniche $R_1'R_2'$ $F_1'F_2'$ U'_1, $S_1'S_2'$ $F_1'F_2'$ U_1' si secano ulteriormente in un quarto punto che è precisamente il richiesto punto U_2'

Catania, Luglio 1901.

SOPRA UNA CLASSE DI SUPERFICIE APPLICABILI E SULLE LORO FLESSIONI

NOTA

DEL

Dott. ASTORRE BARCHI

In base ai teoremi generali sull' esistenza degl' integrali delle equazioni a derivate parziali, è stato dimostrato che è possibile deformare una superficie, in modo che una sua curva qualunque assuma la forma di una linea data ad arbitrio nello spazio, purchè questa non debba resultare assintotica per la superficie deformata. Tale quistione ebbe origine dal teorema di Iellet che « *non si può deformare per flessione continua una qualunque superficie volendo che tutti i punti di una sua linea arbitraria, purchè non assintotica, rimangano fissi* ».

Inoltre la curva nello spazio non è interamente arbitraria; poichè, supposta effettuata la deformazione della superficie, la corrispondenza che si stabilisce tra i punti delle due curve è tale che in punti corrispondenti si hanno valori uguali dell'arco e la curvatura assoluta è maggiore od uguale alla curvatura geodetica dell'altra linea, computata in valore assoluto.

Inversamente se è possibile stabilire tra le due curve una tale corrispondenza, si può eseguire la deformazione richiesta solo in due modi distinti, perchè due sono i sistemi di normali alla curva data arbitrariamente nello spazio, ciascuno dei quali si può assumere come sistema delle normali ad una superficie deformata. Ciò non contraddice al teorema di Iellet, poichè le due superficie che così si ottengono sono sempre applicabili l'una sull'altra e la curva data, nella deformazione continua dell' una superficie nell' altra, riprende in fine la forma primitiva, ma cangia di forma negli stati intermedi.

Si tratta allora di risolvere il problema precedente per una nuova classe di superficie applicabili trovata da Weingarten.

Weingarten determina (1) una nuova classe di superficie applicabili, de-

---

(1) *Eine neue Classe aufeinander abwickelbaren Flächen* (Göttingen Nachrichten. 8 Ianuar 1887).

ducendole in un modo particolare dalle superficie d'area minima. Essendo

$$x = x(p\,,q) \qquad y = y(p\,,q) \qquad z = z(p\,,q)$$

le equazioni di una superficie minima, dove p è il valore algebrico della distanza dall'origine delle coordinate del piano tangente, e q la distanza del suo punto di contatto, le espressioni:

$$(1) \qquad \begin{aligned} x dp + qX dq &= d\xi \\ y dp + qY dq &= d\eta \\ z dp + qZ dq &= d\zeta \end{aligned}$$

nelle quali X, Y, Z sono i coseni di direzione della normale alla superficie, sono i differenziali esatti di tre funzioni:

$$\xi = \xi(p\,,q) \qquad \eta = \eta(p\,,q) \qquad \zeta = \zeta(p\,,q)$$

che, interpetrate come coordinate cartesiane ortogonali di un punto nello spazio danno luogo ad una superficie, il cui elemento lineare può porsi sotto la forma:

$$(2) \qquad d\sigma^2 = q^2\, dp^2 + 2\, pq\, dp\, dq + q^2\, dq^2$$

ovvero:

$$(3) \qquad d\sigma^2 = \left(\alpha^{\frac{2}{3}} + \beta^{\frac{2}{3}}\right)(d\alpha^2 + d\beta^2).$$

Reciprocamente ogni superficie il cui elemento lineare possa ridursi ad una delle due forme precedenti è deducibile da una superficie minima.

Indicando con K la curvatura, abbiamo:

$$K = \frac{1}{(q^2 - p^2)^2} = \frac{1}{\left(3\alpha^{\frac{2}{3}}\ \beta^{\frac{2}{3}}\right)^2};$$

onde le superficie della classe di Weingarten sono a curvatura positiva. Inoltre la forma (3) dell'elemento lineare ci permette di dire ch' esse sono superficie di Liouville e che le linee coordinate α e β formano un sistema isotermo di ellissi e iperbole geodetiche.

L'arco di geodetica e l'equazione in termini finiti delle linee geodetiche si ottengono con quadrature. Infatti, essendo θ l' arco di geodetica, possiamo scri-

vere:

$$\theta = \int \sqrt{\alpha^{\frac{2}{3}} + a}\, d\alpha \pm \int \sqrt{\beta^{\frac{2}{3}} - a}\, d\beta$$

con a costante arbitraria.

S'integra la precedente col porre:

$$\sqrt{\alpha^{\frac{2}{3}} + a} = \alpha^{\frac{1}{3}} + t \qquad \sqrt{\beta^{\frac{2}{3}} - a} = \beta^{\frac{1}{3}} + t'$$

per le quali risulta:

$$\sigma = \frac{3}{8}\left\{ a^2(\log t \pm \log t') + \frac{a^4}{8}\left(\frac{1}{t^4} \pm \frac{1}{t'^4}\right) - \frac{1}{8}(t^4 \pm t'^4)\right\} + C$$

essendo C una costante qualunque.

Analogamente l'equazione in termini finiti delle geodetiche:

$$2\frac{\partial\theta}{\partial a} = \int \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha^{\frac{2}{3}} + a}} \mp \int \frac{d\beta}{\sqrt{\beta^{\frac{2}{3}} - a}} = b_0 \text{ (costante arbitraria)}$$

diviene:

$$2\frac{\partial\theta}{\partial a} = \frac{3}{4}\left\{ 2a(\log t \pm \log t') - \frac{1}{2}(t^2 \pm t'^2) + \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{t^2} \mp \frac{1}{t'^2}\right) = b\right.$$

Passiamo a determinare quella speciale superficie della classe suddetta che si deduce dall'elicoide rigata d'area minima. Le equazioni di questa elicoide, dedotte dalle formule generali che danno tutte le superficie minime elicoidali [1], sono:

$$(a) \qquad \begin{aligned} x &= m \operatorname{sen} hv \operatorname{sen} \omega \\ y &= m \operatorname{sen} hv \cos \omega \\ z &= m\omega, \end{aligned}$$

per le quali l'asse delle z è l'asse dell'elicoide, ω è l'angolo di cui ha rotato il piano del profilo meridiano dopo un tempo qualunque, m il rapporto costante tra le velocità di traslazione e rotazione, ed $m \operatorname{sen} hv$ è la distanza di un punto qualunque dall'asse.

---

[1] Bianchi: *Geometria Differenziale* (Ia Ediz.) Cap. XIV: N° 201.

Per i coseni di direzione della normale si hanno le espressioni:

$$(b) \qquad X = \frac{\cos\omega}{\cos hv}, \quad Y = \frac{\operatorname{sen}\omega}{\cos hv}, \quad Z = -\operatorname{tang} hv.$$

Le distanze p del piano tangente e q del suo punto di contatto dall'origine delle coordinate, sono:

$$p = -m\omega \operatorname{tang} hv \qquad q^2 = m^2(\operatorname{sen} h^2 v + \omega^2)$$

che differenziate, dopo aver posto $q^2 = 2t$, danno:

$$(c) \qquad \begin{aligned} dp &= -\left\{ m \operatorname{tang} hv\, d\omega + \frac{m\omega}{\cos h^2 v}\, dv \right\} \\ dt &= m^2 \{ \cos hv \operatorname{sen} hv\, dv + \omega\, d\omega \}. \end{aligned}$$

Se sostituiamo nelle (1) rispettivamente le (a), (b) e (c), avremo le formule relative al nostro caso particolare, cioè:

$$d\xi = \frac{m^2}{\cos hv}\left\{ -\operatorname{sen} h^2 v \operatorname{sen}\omega + \omega \cos\omega \right\} d\omega + m^2 \left\{ -\frac{\omega \operatorname{sen}\omega}{\cos h^2 v} + \cos\omega \right\} d \cos hv$$

$$d\eta = \frac{m^2}{\cos hv}\left\{ \operatorname{sen} h^2 v \cos\omega + \omega \operatorname{sen}\omega \right\} d\omega + m^2 \left\{ \frac{\omega \cos\omega}{\cos h^2 v} + \operatorname{sen}\omega \right\} d \cos hv$$

$$d\zeta = -2m^2\omega \operatorname{tang} hv\, d\omega + m^2 \left\{ -\frac{\omega^2}{\cos h^2 v} - \operatorname{sen} h^2 v \right\} dv.$$

Da queste integrando se ne trae:

$$(d) \qquad \begin{aligned} \xi &= m^2 \left\{ \frac{\omega \operatorname{sen}\omega}{\cos hv} + \cos hv \cos\omega \right\} \\ \eta &= m^2 \left\{ \cos hv \operatorname{sen}\omega - \frac{\omega \cos\omega}{\cos hv} \right\} \\ \zeta &= m^2 \left\{ \frac{v - \operatorname{sen} hv \cos hv}{2} - \omega^2 \operatorname{tang} hv \right\} \end{aligned}$$

che sono le equazioni della superficie richiesta.

Essa è simmetrica rispetto al piano xy; facendo variare v da 0 a $+\infty$ (ω qualunque) se ne ottiene la parte situata da quella banda del piano xy dove la z è negativa, l'altra parte si ottiene facendo variare v da 0 a $-\infty$. La sua in-

tersezione col piano xy è esaurita dalla curva $v=0$, di equazioni:

$$\xi = m^2(\omega \operatorname{sen}\omega + \cos\omega)$$

$$\eta = m^2(\operatorname{sen}\omega - \omega\cos\omega)$$

ovvero:

$$\xi \cos\frac{\pm\sqrt{\xi^2+\eta^2-m^4}}{m^2} + \eta \operatorname{sen}\frac{\pm\sqrt{\xi^2+\eta^2-m^4}}{m^2} = m^2$$

che è l' equazione dell' evolvente del cerchio avente il centro nell' origine e il raggio uguale ad m^2.

La superficie è simmetrica anche rispetto al piano xz, e le due falde si ottengono facendo variare ω da 0 a $+\infty$ (v qualunque) e da 0 a $-\infty$ rispettivamente.

Quadrando e sommando le prime due delle (d), se ne ricava:

$$\omega^2 = \frac{(\xi^2+\eta^2-m^4\cosh^2 v)\cosh^2 v}{m^4}$$

per cui:

$$\zeta = m^2\left\{\frac{v-\operatorname{sen}hv\cosh v}{2} - \frac{\xi^2+\eta^2-m^4\cosh^2 v}{m^4}\operatorname{sen}hv\cosh v\right\}$$

cioè le linee $v=$ cost. giacciono su paraboloidi ellittici di rotazione aventi per asse l'asse delle z.

Una superficie della classe di Weingarten (ξ, η, ζ) e la corrispondente superficie minima sono in tale relazione che ad una curva qualunque Γ della prima, corrisponde sulla seconda una linea, i cui punti hanno per coordinate le derivate rispetto a p delle tre funzioni ξ, η, ζ calcolate lungo la curva Γ. Inoltre, poichè i coseni di direzione della tangente alle linee $p=$ cost. della prima superficie, sono:

$$\frac{1}{q}\frac{\partial\xi}{\partial q}, \quad \frac{1}{q}\frac{\partial\eta}{\partial q}, \quad \frac{1}{q}\frac{\partial\zeta}{\partial q}$$

si ha che:

« *La normale alla superficie d' area minima in un punto qualunque è parallela alla tangente alla linea* p = *cost. nel punto corrispondente della superficie di Weingarten* ».

Sia Σ una superficie nota della nostra classe; su di essa consideriamo una curva arbitraria Γ, e sia Γ' una curva nello spazio. Supposta la superficie Σ flessibile ed inestendibile, si tratta di determinare la superficie Σ' cui si giunge deformando la superficie Σ in modo che la curva arbitraria Γ assuma la forma pure arbitraria Γ'.

Le coordinate del punto generico di Γ' in funzione dell'arco σ s'indichino con: $\xi_1(\sigma)$, $\eta_1(\sigma)$, $\zeta_1(\sigma)$; inoltre $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$; $\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$; $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ s ano i coseni di direzione della sua tangente, normale principale e binormale. Tra i punti di Γ e Γ' stabiliamo una corrispondenza tale che siano corrispondenti due punti quando si ottengono per valori uguali dell'arco. Essendo $p = p(\sigma)$, $q = q(\sigma)$ le equazioni della curva Γ sulla superficie Σ, saranno senz'altro note quelle della Γ' sulla superficie da costruirsi. Supponiamo inoltre che in ogni punto di Γ' la sua prima curvatura $\frac{1}{\rho}$ sia superiore o almeno uguale alla curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_g}$ di Γ nel punto corrispondente, presa in valore assoluto.

Per fissare il segno della curvatura geodetica della linea Γ, stabiliamo che la direzione positiva della retta, intersezione del piano normale in un punto alla Γ col piano tangente alla superficie in quel punto, sia volta costantemente verso la direzione positiva della linea $p = \text{cost.}$ Tal retta avrà lungo la curva Γ' e sul suo piano normale una retta corrispondente che dovrà risultare ugualmente orientata rispetto al verso positivo delle linee $p = \text{cost.}$ sulla superficie da costruirsi.

Indicando allora con ε l'angolo incognito di cui deve rotare nel piano normale la normale principale alla Γ' per sovrapporsi alla direzione positiva della retta suddetta, la relazione:

$$\frac{1}{\rho_g} = \frac{\cos\varepsilon}{\rho}$$

fornirà due valori uguali e di segno contrario per quest'angolo. Fissatone uno e indicatolo con ε, siano A, B, C i coseni direttori di questa retta. Avremo evidentemente, colla convenzione che sulla faccia positiva del piano xy la direzione positiva dell'asse y giace a sinistra di quella dell'asse x:

$$A = \cos\varepsilon \cos\xi + \operatorname{sen}\varepsilon \cos\lambda$$

$$B = \cos\varepsilon \cos\eta + \operatorname{sen}\varepsilon \cos\mu$$

$$C = \cos\varepsilon \cos\zeta + \operatorname{sen}\varepsilon \cos\nu.$$

Determiniamo ora i coseni di direzione delle tangenti alle linee $p = \text{cost.}$ e $q = \text{cost.}$ sulla superficie da costruirsi lungo la linea Γ'.

Detto θ l'angolo, di cui deve rotare, nel verso positivo sul piano tangente, la direzione positiva della tangente alla q per sovrapporsi alla direzione positiva della tangente alla curva, sappiamo dover essere:

$$\cos\theta = q\frac{dp}{d\sigma} + p\frac{dq}{d\sigma};$$

inoltre la detta tangente forma colla retta (A, B, C) un angolo il cui coseno è

dato, a meno del segno, da:

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{q^2 - p^2}\,\frac{dq}{d\sigma}.$$

Indicando con r, s, t i coseni della direzione positiva normale alla tangente e alla (A, B, C) e tale che la congruenza dei tre assi sia diretta, si hanno le tre relazioni:

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{q}\dfrac{\partial\xi_1}{\partial p}\cos\alpha + \dfrac{1}{q}\dfrac{\partial\eta_1}{\partial p}\cos\beta + \dfrac{1}{q}\dfrac{\partial\zeta_1}{\partial p}\cos\gamma = \cos\theta \\[2ex] \dfrac{1}{q}\dfrac{\partial\xi_1}{\partial p}r + \dfrac{1}{q}\dfrac{\partial\eta_1}{\partial p}s + \dfrac{1}{q}\dfrac{\partial\zeta_1}{\partial p}t = 0 \\[2ex] \dfrac{1}{q}\dfrac{\partial\xi_1}{\partial p}\mathrm{A} + \dfrac{1}{q}\dfrac{\partial\eta_1}{\partial p}\mathrm{B} + \dfrac{1}{q}\dfrac{\partial\zeta_1}{\partial p}\mathrm{C} = \pm\operatorname{sen}\theta. \end{cases}$$

In modo analogo, detto θ' l'angolo di cui deve rotare nel verso positivo sul piano tangente la direzione positiva della tangente alla Γ' per sovrapporsi alla direzione positiva della tangente alla p, abbiamo:

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{q}\dfrac{\partial\xi_1}{\partial q}\cos\alpha + \dfrac{1}{q}\dfrac{\partial\eta_1}{\partial q}\cos\beta + \dfrac{1}{q}\dfrac{\partial\zeta_1}{\partial q}\cos\gamma = \cos\theta' \\[2ex] \dfrac{1}{q}\dfrac{\partial\xi_1}{\partial q}r + \dfrac{1}{q}\dfrac{\partial\eta_1}{\partial q}s + \dfrac{1}{q}\dfrac{\partial\zeta_1}{\partial q}t = 0 \\[2ex] \dfrac{1}{q}\dfrac{\partial\xi_1}{\partial q}\mathrm{A} + \dfrac{1}{q}\dfrac{\partial\eta_1}{\partial q}\mathrm{B} + \dfrac{1}{q}\dfrac{\partial\zeta_1}{\partial q}\mathrm{C} = \mp\operatorname{sen}\theta' \end{cases}$$

dove:

$$\cos\theta' = p\,\frac{dp}{d\sigma} + q\,\frac{dq}{d\sigma} \qquad \operatorname{sen}\theta' = \sqrt{q^2 - p^2}\,\frac{dp}{d\sigma}.$$

Per togliere l'indeterminazione di segno osserviamo che la direzione positiva (A, B, C) è volta in ogni punto verso la direzione positiva della $p = \text{cost.}$; perciò nell'ultima delle (5) andrà preso il segno positivo se $p(\sigma)$ è crescente, il negativo nel caso contrario, cioè in ogni caso il valore assoluto:

$$\sqrt{q^2 - p^2}\left[\frac{dp}{d\sigma}\right].$$

Inversamente nell'ultima delle (4) andrà preso il segno positivo se $p(\sigma)$ è decrescente, negativo se crescente.

Posto $\frac{dp}{d\sigma} = p'(\sigma)$, risolvendo i sistemi (4) e (5), abbiamo:

$$\frac{1}{q}\frac{\partial \xi_1}{\partial p} = \cos\theta \cos\alpha - \frac{p'(\sigma)}{[p'(\sigma)]} A \operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{1}{q}\frac{\partial \eta_1}{\partial p} = \cos\theta \cos\beta - \frac{p'(\sigma)}{[p(\sigma)]} B \operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{1}{q}\frac{\partial \zeta_1}{\partial p} = \cos\theta \cos\gamma - \frac{p'(\sigma)}{[p'(\sigma)]} C \operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{1}{q}\frac{\partial \xi_1}{\partial q} = \cos\theta' \cos\alpha + A[\operatorname{sen}\theta']$$

$$\frac{1}{q}\frac{\partial \eta_1}{\partial q} = \cos\theta' \cos\beta + B[\operatorname{sen}\theta']$$

$$\frac{1}{q}\frac{\partial \zeta_1}{\partial q} = \cos\theta' \cos\gamma + C[\operatorname{sen}\theta'].$$

Le precedenti sodisfano alla relazione:

$$d\xi_1^2 + d\eta_1^2 + d\zeta_1^2 = q^2 dp^2 + 2pq\, dp\, dq + q^2 dq^2$$

e quindi alle altre che ne seguono.

Interpetriamo le $\frac{\partial \xi_1}{\partial p}$, $\frac{\partial \eta_1}{\partial p}$, $\frac{\partial \zeta_1}{\partial p}$ come coordinate x_1, y_1, z_1 di un punto nello spazio; le relazioni:

$$x_1 = \frac{\partial \xi_1}{\partial p} \qquad y_1 = \frac{\partial \eta_1}{\partial p} \qquad z_1 = \frac{\partial \zeta_1}{\partial p}$$

definiscono una curva C i cui punti si hanno in funzione di σ; per ciascun punto di questa curva conduciamo una retta, i cui coseni di direzione siano dati dal secondo gruppo delle precedenti, dove le funzioni che vi compaiono siano calcolate nel punto corrispondente della Γ'.

Posto:

$$X_1 = \frac{1}{q}\frac{\partial \xi_1}{\partial q} \qquad Y_1 = \frac{1}{q}\frac{\partial \eta_1}{\partial q} \qquad Z_1 = \frac{1}{q}\frac{\partial \zeta_1}{\partial q}$$

s'immagini la superficie d'area minima che passa per C e che lungo di essa ha le normali i cui coseni di direzione sono dati dalle precedenti. Le sue equazioni si otterranno per mezzo delle note formule di Schwarz, prendendo le parti reali delle espressioni:

$$u = x_1 + i\int(Z_1 dy_1 - Y_1 dz_1)$$

$$v = y_1 + i\int(X_1 dz_1 - Z_1 dx_1)$$

$$w = z_1 + i\int(Y_1 dx_1 - X_1 dy_1)$$

dove alla variabile σ vanno attribuiti anche valori complessi. Indicando con $R(\alpha)$ la parte reale di una quantità complessa α, la superficie d'area minima avrà le equazioni:

$$x = R(u) \qquad y = R(v) \qquad z = R(w).$$

Riferiamo questa superficie ai parametri p e q aventi il solito significato; se X, Y, Z sono i coseni di direzione della normale, le espressioni (1) sono i differenziali esatti di tre funzioni:

$$\xi = \xi(pq) \quad , \quad \eta = \eta(pq) \quad , \quad \zeta = \zeta(pq)$$

che definiscono una superficie della classe di Weingarten. Su di essa la curva definita dalle equazioni $p = p(\sigma)$ e $q = q(\sigma)$ dove σ prenda solo valori reali coincide colla Γ' presa ad arbitrio nello spazio.

Possiamo dunque concludere che:

« *È sempre possibile determinare con sole quadrature la superficie Σ' deformata per semplice flessione di una superficie Σ della classe di Weingarten, quando sia data ad arbitrio una linea Γ' che deve risultare la deformata di una linea Γ pure arbitraria su Σ* ».

Si notino i coseni di direzione (Ξ, Υ, Z) della normale alla superficie trovata lungo la linea Γ':

$$\Xi = \frac{p'(\sigma)}{[p'(\sigma)]} \{\cos\varepsilon \cos\lambda - \operatorname{sen}\varepsilon \cos\xi\}$$

$$\Upsilon = \frac{p'(\sigma)}{[p'(\sigma)]} \{\cos\varepsilon \cos\mu - \operatorname{sen}\varepsilon \cos\eta\}$$

$$Z = \frac{p'(\sigma)}{[p'(\sigma)]} \{\cos\varepsilon \cos\nu - \operatorname{sen}\varepsilon \cos\zeta\}.$$

Le linee coordinate $q = \text{cost.}$ sono geodetiche della superficie; supponiamo allora che la Γ sia la $q = k$ della superficie Σ. La Γ' dovrà risultare la $q = k$ della Σ'. Sarà allora:

$$d\sigma^2 = k^2 dp^2$$

$$p = \frac{\sigma}{k} + p_0 \quad (p_0 \text{ è il valore di } p \text{ nel punto } \sigma = 0 \text{ della } \Gamma)$$

dalle quali segue:

$$x_1 = \frac{d\xi_1}{dp} = \frac{d\xi_1}{d\sigma} k \qquad y_1 = \frac{d\eta_1}{dp} = \frac{d\eta_1}{d\sigma} k \qquad z = \frac{d\zeta_1}{dp} = \frac{d\zeta_1}{d\sigma} k$$

per cui la curva sulla corrispondente superficie minima, giace anche sulla sfera di raggio k ed è una curva simile all'indicatrice sferica delle tangenti alla Γ'. Si ha inoltre che: « *Considerando sulla Σ una* q=*cost. e la corrispondente curva sulla superficie minima, la tangente a quest'ultima in un punto qualunque è parallela alla normale alla superficie Σ nel punto corrispondente* ».

Montepulciano, 1903.

ALCUNE CONSIDERAZIONI SUL METODO DI CAUCHY-LIPSCHITZ

PER L'INTEGRAZIONE DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

DI 1° ORDINE

NOTA

DI

PIETRO TEOFILATO

Vi sono vari metodi che dimostrano l'esistenza dell'integrale di un'equazione differenziale ordinaria di primo ordine.

Il primo dovuto a Cauchy e modificato in parte dal Lipschitz prova che l'integrale x dell'equazione

$$\frac{dx}{dt} = f(xt) \tag{1}$$

tale che per $t = t_0$ si riduce a x_0, esiste in un certo campo quando $f(xt)$, nel rettangolo $|t - t_0| < a$, $|x - x_0| < b$ del piano cartesiano (t, x), é in valore assoluto minore di M, continua e soddisfacente alla condizione

$$|f(x' t) - f(xt)| < k\,|x' - x|. \tag{2}$$

L'integrale viene dato dal $\lim\limits_{n=\infty} x_n$, ove x_n è definito dalle seguenti successive equazioni alle differenze:

$$\begin{aligned}
x_1 - x_0 &= f(x_0\, t_0)\,(t_1 - t_0)\\
x_2 - x_1 &= f(x_1\, t_1)\,(t_2 - t_1)\\
x_3 - x_2 &= f(x_2\, t_2)\,(t_3 - t_2)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_n - x_{n-1} t_{n-1} &= f(x_{n-1} t_{n-1})(t - t_{n-1})
\end{aligned} \tag{3}$$

essendo $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t$ punti di divisione dell'intervallo (t, t); e il campo in cui esso esiste è rappresentato dall' intervallo $|t - t_0| < A$ ove A è la minore delle 2 quantità A e $\frac{b}{M}$.

Ora questo metodo ha sugli altri il pregio di definire l' integrale nel massimo intervallo e appunte a questo riguardo nel presente lavoro mi propongo di dimostrare alcuni teoremi, che furono dal Painlevé sviluppati nel Corso tenuto al Collegio di Francia nel 1897, ma non pubblicati se non nell' enunciato [1].

***

Supponiamo che si conosca l'esistenza d'un integrale

$$\bar{x}(t)$$

della (1), finito, continuo, in un certo campo C, che si riduca a x_0 per $t = t_0$, e supponiamo che la $f(xt)$ soddisfi a quelle condizioni suaccennate, anzichè in tutto il rettangolo $|t - t_0| < a$ $|x - x_0| < b$, solo (per maggiore generalità) in intorni dei punti $(t, \bar{x}(t))$. Ebbene:

Col metodo di Cauchy-Lipschitz, dato σ piccola a piacere, è possibile trovare un numero p_0 in modo che, diviso ogni intervallo $(t t_0)$ in un numero $p \geq p_0$ di intervalli e scritte per ognuno le corrispondenti p successive equazioni alle differenze come le (3), si trovi una funzione x_p della variabile t, definita in tutto il campo C ove si conosce la $\bar{x}(t)$, e tale che si abbia

$$| x_p(t) - \bar{x}(t) | < \sigma ;$$

ossia si può, dopo un numero finito di operazioni, trovare in tutto il campo C una soluzione integrale approssimata che differisca in ogni punto t, dalla $\bar{x}(t)$, per meno di σ.

Preso un punto t di questo campo si ha dunque per ipotesi

$$\bar{x}\, t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\bar{x}(t), t)\, dt \tag{5}$$

Dividiamo l'intervallo $(t\, t_0)$ in n parti, formiamo le equazioni (3) e corrispondentemente a questi punti di divisione scriviamo le equazioni successive simili alla (5)

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 - x_0 &= \int_{t_0}^{t_1} f(\bar{x}, t)\, dt \\ \bar{x}_2 - x_1 &= \int_{t_1}^{t_2} f(\bar{x}, t)\, dt \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \bar{x} - \bar{x}_{n-1} &= \int_{t_{n-1}}^{t} f(\bar{x}, t)\, dt \end{aligned} \tag{6}$$

---

[1] Par. Comp. R. 1899 pag. 1905.
Bull. Soc. Math. 1899 pag. 149.

dalle quali per un teorema di calcolo integrale essendo $f(\bar{x}(t), t)$ integrabile si ha subito:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 - x_0 &= (t_1 - t_0) f(\xi_0, t_0) \\ \bar{x}_2 - \bar{x}_1 &= (t_2 - t_1) f(\xi_1, t_1) \\ \bar{x}_3 - \bar{x}_2 &= (t_3 - t_2) f(\xi_2, t_2) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{7}$$

ove è

$$\begin{aligned} t_1 &> \tau_0 > t_0 & \xi_0 &= \bar{x}(\tau_0) \\ t_2 &> \tau_1 > t_1 & \xi_1 &= \bar{x}(\tau_1) \\ t_3 &> \tau_2 > t_2 & \xi_2 &= \bar{x}(\tau_2) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots & & \end{aligned}$$

Allora considerando insieme i sistemi (3) e (7) e posto

$$|f(\xi_i, \tau_i) - f(x_i, t_i)| = \lambda_i \quad , \quad t_{i+1} - t_i = h_i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

ricaveremo:

$$\begin{aligned} |\bar{x}_1 - x_1| &= h_0 \lambda_0 \\ |\bar{x}_2 - x_2| &< |\bar{x}_1 - x_1| + h_1 \lambda_1 < h_0 \lambda_0 + h_1 \lambda_1 \\ |\bar{x}_3 - x_3| &< |\bar{x}_2 - x_2| + h_2 \lambda_2 < h_0 \lambda_0 + h_1 \lambda_1 + h_2 \lambda_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ |\bar{x}_i - x_i| &< h_0 \lambda_0 + h_1 \lambda_1 + h_2 \lambda_2 + \cdots\cdots + h_{i-1} \lambda_{i-1} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ |\bar{x} - x| &< h_0 \lambda_0 + h_1 \lambda_1 + h_2 \lambda_2 + \cdots\cdots + h_{n-1} \lambda_{n-1}. \end{aligned} \tag{8}$$

Ora per la continuità di $f(x, t)$ e di $\bar{x}$, per $|t - t'| < h$ si ha qualunque siano t e x

$$|f(xt) - f(xt')| < \eta \quad , \quad |\bar{x}(t) - \bar{x}(t')| < \varepsilon \tag{9}$$

ove h è quantità piccola assegnabile quando siano date η ed ε piccole a piacere.

Perciò, tenendo conto ancora della condizione

$$|f(x, t) - f(x', t)| < k\,|x - x'|$$

la diseguaglianza

$$\lambda_i \equiv |f(\xi_i, \tau_i) - f(x_i t_i)| < |f(\xi_i \tau_i) - f(\xi_i t_i)| + |f(\xi_i t_i) - f(x_i, t_i)|$$

dà luogo all'altra

$$\lambda_i < \eta + k\,|\xi_i - x|$$

e inoltre se gl'intervalli $(t_{i+1}\, t_i)$ sono minori di h, si avrà

$$|\xi_0 - x_0| < \varepsilon\,,\ |\xi_1 - \bar{x}_1| < \varepsilon\,,\ |\xi_2 - \bar{x}_2| < \varepsilon\,, \ldots |\xi_{n-1} - \bar{x}_{n-1}| < \varepsilon$$

e quindi a causa delle (8)

$$|\xi_0 - x_0| < \varepsilon$$

$$|\xi_1 - x_1| < |\xi_1 - \bar{x}_1| + |\bar{x}_1 - x_1| < \varepsilon + h_0 \lambda_0$$

$$|\xi_2 - x_2| < |\xi_2 - \bar{x}_2| + |\bar{x}_2 - x_2| < \varepsilon + h_0 \lambda_0 + h_1 \lambda_1$$

. . . . . .

$$|\xi_i - x_i| < |\xi_i - \bar{x}_i| + |\bar{x}_i - x_i| < \varepsilon + h_0 \lambda_0 + h_1 \lambda_1 + \ldots + h_{i-1} \lambda_{i-1}.$$

Di qui senz' altro avremo

$$\lambda_0 < \eta + k\varepsilon = \alpha$$

$$\lambda_1 < \eta + k(\varepsilon + h_0 \lambda_0) = \eta + k\varepsilon + k h_0 \lambda_0 < \alpha + k h_0 \alpha = (1 + k h_0)\,\alpha$$

$$\lambda_1 < (1 + k h_0)\,\alpha$$

$$\lambda_2 < \eta + k\varepsilon + kh_0\lambda_0 + kh_1\lambda_1 < (1 + kh_0)\,\alpha + kh_1 (1 + kh_0)\,\alpha$$

$$\lambda_2 < (1 + kh_0)(1 + kh_1)\,\alpha$$

. . . . . .

$$\lambda_i < (1 + kh_0)(1 + kh_2) \ldots (1 + kh_{i-1})\,\alpha$$

e poichè gl'intervalli (t_{i+1}, t_i) sono minori di h, si ha

$$\lambda_i < (1 + kh)^i\,(\eta + k\varepsilon)$$

e quindi

$$h_0\lambda_0 + h_1\lambda_1 + \ldots + h_{n-1}\,\lambda_{n-1} < h(\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-1})\,,$$

e *a fortiori*

$$h_0\lambda_0 + h_1\lambda_1 + \ldots + h_{n-1}\lambda_{n-1} < h(\eta + k\varepsilon)\left\{1 + (1 + kh) + (1 + kh)^2 + \ldots (1 + kh)^{n-1}\right\}$$

da cui si ottiene la diseguaglianza

$$h_0\lambda_0 + h_1\lambda_1 + \ldots + h_{n-1}\lambda_{n-1} < h(\eta + k\varepsilon)\left\{\frac{(1+kh)^n - 1}{kh}\right\} = \frac{\eta + k\varepsilon}{k}\left\{(1 + kh)^n - 1\right\}$$

ossia

$$h_0\lambda_0 + h_1\lambda_1 + \ldots + h_{n-1}\lambda_{n-1} < \frac{\eta + k\varepsilon}{k}\left[(1 + kh)^n - 1\right].$$

Ora se nel frazionare l'intervallo (t, t_0) si ha la cautela di tenere finito il mutuo rapporto degli intervalli parziali essendo n il numero di questi e h il massimo, sarà $n.h$ sempre minore di una quantità finita N e si avrà a fortiori

$$h_0\lambda_0 + h_1\lambda_1 + \ldots + h_{n-1}\lambda_{n-1} < \frac{\eta + k\varepsilon}{k}\left[\left(1 + \frac{kN}{n}\right)^n - 1\right].$$

Ma d'altra parte è

$$\left(1 + \frac{kN}{n}\right)^n = 1 + kN + \binom{n}{2}\frac{k^2N^2}{n^2} + \ldots + \binom{n}{n}\frac{k^nN^n}{n^n} < 1 + \frac{kN}{1} + \frac{k^2N^2}{\lfloor 2} + \ldots + \frac{k^nN^n}{\lfloor n} < e^{kN}$$

e perciò

$$h_0\lambda_0 + h_1\lambda_2 + \ldots + h_{n-1}\lambda_{n-1} < \frac{\eta + k\varepsilon}{k}(e^{kN} - 1). \tag{10}$$

Ora fissato σ piccola a piacere e scelta la quantità N maggiore o eguale all'ampiezza A_c del campo C, determino due quantità piccole ε e η tali che risulti

$$\frac{\eta + k\varepsilon}{k}(e^{kN} - 1) < \sigma. \tag{11}$$

Allora posso trovare un numero p_0 grande ma finito tale che per

$$|t - t'| < h \leq \frac{A_c}{p}$$

ove sia $p > p_0$, si verifichino le diseguaglianze (9) per tutti i valori di t e x. In forza della (10), (11) e dell'ultima delle (8), scritto nel caso di $n \equiv p$, verrà senz'altro

$$|x_p(t) - x(t)| < \sigma$$

che era quanto si voleva dimostrare

***

Darò ancora la dimostrazione di un altro teorema enunciato dal Painlevé, secondo cui:

(¹) *L'integrale della* (1), *se la* f *soddisfa alle condizioni accennate a pagina* 1, *esiste in tutto l'intervallo minore della più piccola delle quantità:*

$$\frac{1}{k}\log\left(1+\frac{bk}{M_0}\right) \quad , \quad a$$

essendo M_0 *il massimo valore assoluto di* f (x_0, t).

Infatti, dalla prima delle (3), usando le solite notazioni si ottiene:

$$|x_1 - x_0| = h_1 |f(x_0, t_0)| < M_0 h_1. \tag{12}$$

Sommando le due prime equazioni delle (3) si ha

$$x_2 - x_0 = h_1 f(x_0 t_0) + h_2 f(x_1 t_1) = h_1 f(x_0 t_0) + h_2 f(x_0 t_1) + h_2 [f(x_1 t_1) - f(x_0 t_1)]$$

e quindi

$$|x_2 - x_0| < h_1 |f(x_0 t_0)| + h_1 |f(x_0 t_1)| + h_2 |f(x_1 t_1) - f(x_0 t_1)|$$

e di conseguenza

$$|x_2 - x_0| < M_0(h_1 + h_2) + h_2 k |x_1 - x_0|$$

la quale per la (12) diviene:

$$|x_2 - x_0| < M_0(h_1 + h_2) + M_0 k h_1 h_2. \tag{12'}$$

Così pure dopo aver sommato le tre prime delle (3) si avrebbe

$$|x_3 - x_0| < h_1 |f(x_0 t_0)| + h_2 |f(x_0 t_1)| + h_3 |f x_0 t_2| + h_2 |f(x_1 t_1) - f(x_0 t_1)| + k_3 |f(x_2 t_2) - f(x_0 t_2)|$$

quindi

$$|x_3 - x_0| < M_0(h_1 + h_2 + h_3) + k h_2 |x_1 - x_0| + k h_3 |x_2 - x_0|$$

e in forza della (12) e (12)'

$$|x_3 - x_0| < M_0(h_1 + h_2 + h_3) + k M_0(h_1 h_2 + h_1 h_3 + h_2 h_3) + k^2 M_0 h_1 h_2 h_3. \tag{12''}$$

(¹) Questo teorema fu per la prima volta dimostrato dal Lindelöf ma col metodo delle approssimazioni successive.

Alla fine si otterrebbe

$$|x_n - x_0| < M_0 \left\{ \sum_{i=1}^{n} h_i + k \sum_{ij} h_i h_j h_l + k^2 \sum_{ijl} h_i h_j h_l + \ldots + k^{n-1} h_1 h_2 h_3 \ldots h_n \right\}$$

nelle quali sommatorie ogni h ha l'esponente uno o zero.

Ora a causa del seguente teorema di algebra

$$(h_1 + h_2 + \ldots + h_n)^\lambda = \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} \frac{\lfloor \lambda}{\lfloor \alpha_1 \lfloor \alpha_2 \ldots \lfloor \alpha_n} h_1^{\alpha_1} h_2^{\alpha_2} \ldots h_n^{\alpha_n},$$

ove è $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \lambda$, risulta, ponendo

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_n = \tau$$

che

$$\tau = \lfloor \lambda \; \Sigma h_1 h_2 \ldots h_\lambda + \text{altri termini}$$

e quindi

$$\Sigma h_1 h_2 \ldots h_\lambda < \frac{\tau^\lambda}{\lfloor \lambda}$$

qualunque sia n e perciò riuscirà

$$|x_n - x_0| < M_0 \tau + M_0 k \frac{\tau^2}{\lfloor 2} + M_0 \frac{k^2 \tau^3}{\lfloor 3} + \ldots + M_0 \frac{k^{n-1} \tau^n}{\lfloor n} < \frac{M_0}{\lfloor k} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k^i \tau^i}{\lfloor i}$$

ossia

$$|x_n - x_0| < \frac{M_0}{k} (e^{k\tau} - 1)$$

dimodochè sarà $|x_i - x_0| < b$ (condzione necessaria a soddisfare per star nel campo di definizione della $f(x\,t)$) qualunque siano i ed n, se si prenderà

$$\frac{M_0}{k} (e^{k\tau} - 1) < b$$

ossia

$$\tau = |t - t_0| < \frac{1}{k} \log \left(1 + \frac{bk}{M_0}\right).$$

Quando si scelga t in questo intervallo è sicuro che formando le successive equazioni alle differenze (3), si trovano valori successivi x_i tali che $f(x_i t_i)$ è definita e soddisfa alle ben note condizioni esposte a pagina 138.

SOPHUS LIE

DI

M. NOETHER in Erlangen (¹)

Traduzione di A. VITERBI.

La Scienza Matematica rimpiange la perdita d'uno de' suoi spiriti dirigenti: dopo che Lie ebbe lavorato senza posa per il periodo d'una generazione, abbracciando campi sempre più elevati e più vasti, segnando sempre un proprio indirizzo, venne rapito nel pieno vigore della sua facoltà creatrice. — I nostri *Annalen* partecipano ancora più direttamente alla perdita: ad una parte della redazione Lie era legato intimamente con rapporti personali e scientifici: la prima metà delle sue creazioni è esposta e riassunta nei volumi degli *Annalen*; e il nostro periodico può vantarsi d'avere per primo riconosciuto Lie in tutta la sua importanza e d'aver diffuse le sue idee. — Anche i risultati dell'influenza di lui si vedono ampiamente da una serie di pubblicazioni degli *Annalen*.—Con un cenno necrologico su Lie in questo luogo, noi ottemperiamo quindi non soltanto a un dovere scientifico verso il grande investigatore, ma anche ad un desiderio personale; e crediamo di corrispondere nel miglior modo a queste due circostanze col seguire a preferenza nel corso della vita di Lie lo sviluppo delle sue idee nei primi anni della sua produzione, in quell'epoca cioè nella quale è a rintracciarsi la spiegazione di tutta l'opera sua, e che ci tocca inoltre più da vicino in quanto egli la trascorse in parte in relazione personale ed in collaborazione con F. Klein (²). — Sugli anni successivi noi daremo soltanto

(¹) Cenno biografico pubblicato nel vol. 53 dei " *Mathematische Annalen* ".

(²) Intraprendo l'elaborazione del materiale di cui dispongo in sostituzione e coll'aiuto del sig. F. Klein, al quale mancava ora il tempo per quest'elaborazione. Di lui si trovano del resto considerazioni generali sui metodi e sugli intenti di Lie nelle lezioni litografate (" Einleitung in die höhere Geometrie 1892-93 e 1893 " e nel suo " Evanston Colloquium 1893 " come anche nel suo giudizio relativo al premio Lobatschewsky del 1897). — A ciò s'aggiungono, come materiale, alcuni cenni manoscritti che sono fatti in base a colloqui personali avvenuti fra S. Lie e F. Klein a Pasqua del 1891 e nell'autunno del 1892 e che in origine dovevano ser-

uno sguardo che non pretende d'esaurire il vasto campo nè dal lato storico-critico, nè dal lato dell'apprezzamento dell'importanza di Lie. — E tanto più ci possiamo limitare alla genesi dei concetti di Lie in quanto sarebbe prematuro segnare oggi i limiti della portata de' suoi concetti, mentre non potrà mancare più tardi una valutazione ulteriore, completa di essi.

Mario Sophus Lie nacque il 17 dicembre 1842 in Nordfjordeid all'Eidsfjord, sesto ed ultimo figlio del Pastore di quel luogo, Giovanni Ermanno

---

vire ad un'introduzione per una collezione progettata per gli *Annalen* di lavori dei primi tempi di Lie pubblicati altrove. Naturalmente furono utilizzate anche frequenti osservazioni personali e storiche di Lie contenute nelle sue memorie e prefazioni, benchè quelle appartenenti all'epoca posteriore si siano dovute accogliere con molta prudenza. — Finalmente ho potuto prender visione anche delle lettere di Lie a Klein, naturalmente solo per il tempo dal 1878 in poi, e quelle al sig. Engel (dal 1884).

Sono venuti inoltre a mia cognizione alcuni articoli biografici, ed un discorso universitario pronunciato da E. Holst intorno a Lie, il cenno necrologico di G. Darboux nei C. R. dell'Accademia di Parigi del 27 febbraio 1899, uno di L. Bianchi nei Rendic. d. R. Acc. dei Lincei del 9 settembre dello stesso anno ed uno più breve di C. Segre negli Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino: finalmente un cenno verbale di F. Engel nella seduta della sezione matematica nella 71ª riunione dei " Naturalisti e Medici di Germania " del 18 settembre dell'anno stesso.—Un elenco dei lavori di Lie, che però può servire soltanto come provvisorio, si trova nel Bollet. di Bibliog. e St. delle Sc. Mat. di G. Loria (fascicolo di aprile e giugno); un elenco preciso sarà aggiunto da F. Engel ad un cenno che esporrà alla Soc. Sassone delle Scienze. [La necrologia prima menzionata di F. Engel è comparsa nel frattempo nel " Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung VIII Fasch I "; il secondo nei " Berichte der Sachs. Ges. der Wiss. " ma senza l'elenco dei lavori di Lie. — Il sig. Engel ha pubblicato a parte questo elenco accompagnato da indicazioni relative al contenuto di quei lavori nella " Biblioteca Matematica, III Serie vol. I ". — Un cenno ulteriore dovuto a L. Sylow è contenuto nell'Archiv. für Math. XXI, 1899.

Le comunicazioni di Lie alla Soc. delle Scienze di Christiania del 2 aprile 1869, del 5 luglio 1870 e del 26 settembre 1871 citate in più punti del presente lavoro sono nel frattempo state pubblicate da S. Sylow negli scritti della Società 1899, N. 9 sotto il titolo: " Matematiske Meddelelser af Sophus Lie it. Videns liahselstiubet fra Aarene 1869-1871 " unitamente con una traduzione Tedesca del contenuto Matematico (Ott. 1900). — " Le citazioni dell'autore riferentisi a questi lavori sotto il testo sono designate così ...(Ottobre 1900) onde designare l'epoca in cui furono fatte ".

N. B. Colla citazione " *Annalen* " si intenderà sempre di riferirsi ai " *Mathematische Annalen* di Lipsia " nei quali fu pubblicata la Memoria del Noether della quale è qui esposta la traduzione.

Lie. — Dopo aver frequentata per sei anni la scuola di Moss, un'isola nel fiord di Christiania, dove suo padre era stato trasferito, passò gli anni 1857-59 nella scuola latina privata di Nissen a Christiania, riuscendo ugualmente bene in tutte le materie, così che al suo passaggio nell'università di Christiania egli pensava tanto allo studio della filologia quanto a quello delle scienze. — Tuttavia Lie durante il suo studio universitario che durò sei anni e mezzo, si occupò a preferenza di scienze esatte, di scienze naturali, d'astronomia, e frequentò i corsi di matematica del Broch nel 1860 e 1861, del Bjerknes, del Sylow (di questo anche sopra la teoria delle sostituzioni) senza che egli, che lentamente si maturava, ne ricevesse una più profonda impressione in questo senso.—Anzi egli lasciò l'Università sotto un senso d'oppressione, al quale avevano parte tanto la mancanza d'un obbiettivo preciso, quanto una condizione esteriore non favorevole. Dopo aver sostenuto nel 1865 l'esame Reale Lie passò qualche tempo dando lezioni private e nella scuola si cimentò in alcune conferenze di Astronomia che furono favorevolmente accolte, pensando anzi di dedicarsi allo studio pratico di questa scienza. — Allora soltanto, nel corso dell'anno 1868 incominciò collo studio fatto da solo il suo interessamento per la meccanica e la geometria, egli imparò a conoscere più che altro casualmente le opere francesi di meccanica di Duhamel, Jullien, Lamè, quelle geometriche di Chasles, come pure le applicazioni dell'analisi alla geometria di Monge e particolarmente di Poncelet. — E queste ultime, insieme colle opere analitico-geometriche di Plücker, destarono improvvisamente le attitudini in lui sino allora dormienti e gli diedero tosto la linea direttiva di tutto il suo pensiero. — Per verità d'una serie di fogli volanti, nei quali egli buttò giù i suoi primi risultati, in particolare d'un teorema intorno alla: « *Superficie di Steiner* presentato all'Università di Christiania nel 1869 — sul luogo de' poli d'un piano fisso rispetto al sistema delle coniche della superficie luogo che è di nuovo una superficie di Steiner—abbiamo notizia soltanto da una Nota con metodo misto sintetico ed analitico, contenuta nel volume III del suo archivio (1878). — Ma subito col suo primo lavoro originale pubblicato in forma ordinata gli si manifestò la coscienza d'una forza produttiva matematica, esistente in lui stesso. — Esso porta con sè tanti germi delle sue produzioni feconde posteriori, che noi dobbiamo esaminarlo più minutamente.

Questa Memoria: « Repräsentation des Imaginären der Pangeometrie » è pubblicata in lingua tedesca in due Note dei « Forhandlinger » della Società delle Sc. di Christiania del 1869, colla data rispettivamente del febbraio e dell'agosto 1869 (la prima parte della prima Nota fu pubblicata originariamente isolata, in causa di difficoltà ad essere accolta alla Soc. delle Scienze, e poi anche nel vol. 70 del Giorn. di Crelle). — Lie, mentre rappresenta un punto imaginario $X = x + yi$, $Z = z + pi$ del piano XZ nello spazio reale x, y, z mediante il punto (x, y, z) col « peso p », ottiene come imagine di ogni curva imaginaria del piano X, Z una superficie « striata » i cui solchi linee di massima pendenza sono date da $p =$ cost. Qui è già da rilevarsi l'indicazione di tutti i movimenti dello spazio, pei quali la superficie striata rimane l'imagine di una curva imaginaria del piano XZ; si ha dunque già il concetto di « operazione » caratteristico per Lie.

Inoltre Lie coordina ad ognuna delle ∞^4 rette complesse g del piano XZ una retta reale γ dello spazio come striscia nulla ($p = 0$) del corrispondente piano striato; invero le due coordinate della retta g, nelle loro parti reali ed imaginarie, danno precisamente le quattro ordinate Plückeriane della retta γ dello spazio. Un secondo punto di partenza di Lie l'interpretazione delle due coppie di numeri determinanti g come coordinate di due punti reali rispettivamente in due piani reali dati, e la concezione di γ congiungente di questi due punti — è bensì più semplice, ma non dà nulla di più del precedente [1]. Lie ottiene poi, in corrispondenza agli ∞^3 punti reali P dello spazio x, y, z col peso $p=0$, dapprima ∞^3 punti imaginari del piano XZ; poi mediante una polarità in questo piano, ∞^3 rette imaginarie g; e da queste, con una rappresentazione, un complesso Γ di ∞^3 rette reali γ nello spazio. Con ciò la corrispondenza fra i punti P e le rette γ di Γ diviene siffattamente reciproca, che anche viceversa ai punti P' di γ corrispondono rette γ' passanti per P, cosicchè nasce un secondo complesso Γ' di rette. — Γ e Γ' sono complessi di II grado, che compaiono più innanzi in Lie come complessi « di Reye » o, secondo la denominazione posteriore, complessi « tetraedrali », soltanto con tetraedri metricamente speciali.—Lie indaga già, come qui ai punti d'una retta qualsiasi dello spazio corrispondano le generatrici di una schiera rigata sopra un iperboloide; ai punti d'un piano le corde d'una cubica sghemba; studia la rappresentazione di superficie rigate del III ordine sopra piani, di superficie di complesso di Plücker sopra superficie del II ordine, e più generalmente la rappresentazione di entrambi i complessi sullo spazio di punti. — E queste ricerche, se mostrano già la famigliarità coi lavori di Chasles, con parte anche di quelli di Hamilton, e principalmente colla Geometria della retta di Plücker, allora appunto pubblicata, rivelano anche una notevole originalità di lui, come autodidatta; e sopratutto il tratto più saliente consiste nel disporre liberamente della concezione dello spazio, considerando nella Geometria elementi arbitrarii come elementi generatori, parlando già ad es. d'una geometria del piano che adopera come sue « rette » i cerchi passanti per un punto. — Si riconosce il vero spirito di Plücker.

Il fatto che questa trasformazione di punti e rette è una particolare « Trasformazione di contatto » doveva riuscire importante per Lie.

Per Lie questo lavoro ebbe anche l'effetto immediato che Broch potè procurargli una borsa di studio e la possibilità di continuare i suoi studi all'estero.

Egli si recò dapprima per l'inverno 1869-70 a Berlino, e qui ebbe importanza decisiva per il suo sviluppo l'essersi subito incontrato con F. Klein e l'essere entrato con lui nel più intimo scambio di idee presto trasformatosi in comunione di lavoro. — In Klein che, già allora, come depositario dell'eredità di Plücker aveva pubblicato il secondo volume della sua geometria della retta, come pure una serie di ricerche proprie sui complessi di rette generali di II grado, Lie trovò non soltanto ampio incitamento coll'indicazione di campi

---

[1] Cf. la lettera di Lie del 2 aprile 1869 in " Meddelelser " (ottobre 1900).

a lui sino allora sconosciuti, ma sopra tutto una mente aperta a' suoi concetti sulla geometria della retta, e nella quale i suoi propri pensieri ancora incompleti si poterono chiarire. — Si trovarono ambedue d'accordo anche nell'interessamento per le trasformazioni, benchè Klein trovandosi in mezzo all'indirizzo moderno algebrico-geometrico di Clebsch, desse maggiore importanza al loro carattere proiettivo e costruttivo, mentre invece Lie, indipendentemente dal loro significato più ristretto nel campo proiettivo, ne considerava piuttosto il carattere generatore e generale di trasformazioni.

La reciproca unione divenne per entrambi tanto più intima, in quanto che per l'indirizzo da essi già preso, non poterono ricevere da Weierstrass ulteriori incitamenti, ma poterono soltanto trovare qualche soddisfazione nel *Seminar* di Kummer. — In principio s'occuparono a fondo della rappresentazione del complesso lineare sullo spazio di punti, la quale era già stata data da altra parte (dallo scrivente) nell'estate del 1869.

Mentre Lie, nello stesso tempo, si riannodava agli studi del suo primo lavoro sui complessi, e spinto da Klein vi considerava, in modo più intuitivo le curve e le superficie che gli si erano presentate, ne risultò come frutto una Nota « Ueber die Reciprocitätsverhältnisse des Reye' schen Complexes » (Gött. Nachrichten del 16 febbraio 1870, dat. dal gennaio 1870) la quale per altro non solo sviluppava ulteriormente i germi posti in parte fin da prima, ma lasciava apparire chiaramente anche i primi accenni a quasi tutte le idee sulla teoria delle corrispondenze che più tardi si andarono svolgendo.

Si tratta del suaccennato complesso il quale, mentre compare specializzato già in Binet e Chasles, era stato discusso in generale da Reye nel 1868, come ente generato da due spazi collineari; ma compare qui come l'insieme delle rette che incontrano le facce d'un tetraedro secondo un birapporto costante, dal che trae origine la sua denominazione posteriore. In Lie il fatto principale consiste nella deduzione delle sue *proprietà* dalle *trasformazioni in sè stesso* che il complesso ammette: cioè dalle ∞^8 collineazioni permutabili dello spazio, che lasciano invariato il suo tetraedro fondamentale; una schiera continua di trasformazioni, le quali costituiscono un gruppo finito, ossia dipendente da un numero finito di parametri.

Ciò che per Lie è caratteristico si è che per lui il complesso di rette non rimane più, di per sè, l'oggetto geometrico delle sue considerazioni; egli applica invece le sue trasformazioni ad un altro elemento arbitrario, a una curva, ad una superficie, e costruisce così nuove figure (specie) costituite da schiere tre volte infinite di elementi, che vengono considerate tutte come forme covarianti del complesso e del tetraedro rispetto alla schiera di trasformazioni.—Qui Lie va molto più in là delle sue due fonti originarie, e cioè la generazione analitica delle figure secondo Monge, e le costruzioni di luoghi della geometria proiettiva; specialmente in quanto, al pari di Plücker egli mette in evidenza l'arbitrarietà dell' elemento dello spazio anche entro il complesso di rette. — Così egli divide le curve inviluppate da rette del complesso in specie, fra le quali una particolare è formata dai punti dello spazio e ciascuna delle quali genera ogni altra come inviluppo; e poichè tre curve del complesso che si toccano

hanno in pari tempo a comune il piano osculatore, ciascuna di queste curve viene generata mediante « rotolamento » di una semplice infinità di curve di un'altra specie. Vengono poi studiate trasformazioni, che permettono di mutare ciascuna di queste specie in ciascun'altra, e precisamente ciascuna curva o superficie del complesso generata da una specie in una curva o superficie generata da un' altra qualsiasi specie; e vi si parla già delle linee assintotiche algebriche di queste superficie del complesso.

Le trasformazioni qui adoperate da Lie sono tutte ancor più chiaramente di quel che non sia nel lavoro sugli imaginari, ciò che egli designò più tardi come « Trasformazioni di contatto », e precisamente trasformazioni di ogni specie esistente, gruppi finiti e persino « infiniti » senza peraltro che compaiano già *esplicitamente* questi stessi concetti gruppali, o anche i concetti posteriori di Lie di « Elementi superficiali in posizione unita ». È però da osservarsi che le superficie appartenenti al complesso, sostanzialmente le superficie tetraedrali simmetriche di De la Gournerie (1867), appaiono nelle varie loro generazioni come generalizzazione di molte superficie conosciute, p. e. delle « superficie centrali », e possono essere concepite come trasformazione delle superficie d' area minima, nelle quali esse si mutano mediante rappresentazione logaritmica.—una osservazione che Lie fece pochissimo tempo dopo (estate 1870), quando incominciò ad occuparsi della sua trasformazione di rette e sfere, ma che fu sviluppata soltanto nel 1879 (« Weitere Untersuchungen über Minimalflächen » Archiv. IV), (secondo una Nota, [1] mandata alla Società di Christiania il 5 luglio 1870, ma che non fu stampata: v. i Cenni in proposito nel « Resumè » Forh. 1872).—Anche la concezione del complesso di rette come di un ente che definisce un'equazione a derivate parziali del primo ordine ed una del secondo, e delle superficie del complesso come superficie integrali di queste, è da ascriversi in conseguenza all' estate del 1870, (contrariamente ad un' osservazione di Lie nel vol. XXIV dei Math. Annalen p. 540).

Quest'estate del 1870 che Lie passò, sino allo scoppio della guerra, a Parigi in vita comune con Klein è sopratutto da designarsi come il periodo più brillante per le sue prime concezioni. — Dapprima ebbero origine le Note comuni: « Sur un certaine famille de courbes et de surfaces » (C. R. del 6 e 13 giugno) le quali studiano rispettivamente le curve e superficie dello spazio, ancora omesse nella Nota sul complesso di Reye, che vengono trasformate in sè da una schiera continua chiusa rispettivamente di ∞^1, ∞^2 trasformazioni tetraedrali lineari, le curve W e superficie W, secondo una denominazione derivata dal « Wurf » di Staudt, e che corrisponde alle « courbes anharmoniques », secondo l'espressione posteriore di Halphen. — Queste curve sono le curve integrali d'un sistema di equazioni differenziali ordinarie a coefficienti lineari, il che esprime appunto non altro che la trasformazione « infinitesima » contenuta

---

[1] Cfr. Meddelelser. La Nota con lettera del 5 luglio 1870 è stata presentata il 30 settembre 1870 alla Soc. (ottobre 1900).

nella schiera di trasformazioni.—Qui compare per la prima volta in Lie questo concetto divenuto poi così importante per lui, e dedotto da quello di una schiera continua dipendente da un parametro. — Certamente il concetto stesso era già stato introdotto molto prima da Sylvester nella teoria delle trasformazioni lineari delle forme, per ricavare le equazioni alle derivate parziali che definiscono gli invarianti.

Ma ciò che è da considerarsi come progresso è l'indicazione di certe altre equazioni differenziali, che mediante la conoscenza della schiera di trasformazioni e delle loro curve W, risultano già integrate; di quelle equazioni cioè, i cui integrali vengono trasformati dalla detta schiera anche in integrali siffatti; nella Nota bensì solo in modo sommario, ed esplicitamente solo nel lavoro del marzo 1871 sulle curve W piane pubblicate nel vol. IV di questi annali. — Basta semplicemente, se $\eta = \text{cost.}$ sono le curve traiettorie della trasformazione infinitesima, introdurre η come una nuova variabile per riconoscere la riduzione a una quadratura. — Mentre nel lavoro del vol. IV degli Ann. sono così discusse tutte cinque le classi di gruppi lineari ∞^2 del piano, si ottengono come curve W soltanto curve già note, come la spirale logaritmica, ma con proprietà in parte nuove, e quelle conosciute vengono subordinate a punti di vista generali. — E poi viene riconosciuta anche la ragione del successo del metodo d'integrazione: l'introduzione di η è già una specie di considerazione anticipata del concetto di molto posteriore d'invariante differenziale. — Del resto anche una più diretta utilizzazione dell'equazione differenziale ausiliaria, senza previa integrazione, appartiene ad un tempo posteriore (v. più innanzi pag. 168). — L'intendimento di Lie era di sostituire alle ∞^3 collineazioni dello spazio, per mezzo di una rappresentazione logaritmica, le ∞^3 traslazioni di un secondo spazio: e di qui ebbero origine le superficie di traslazione comparse per la prima volta nella Nota inedita nominata del luglio 1870.

Purtroppo non fu ultimato lo sviluppo, progettato per gli *Annaleu*, delle considerazioni spaziali contenute nelle note dei C. R. — Dai frammenti di abbozzi ancora esistenti (¹), come dalla stessa seconda Nota, risulta che la relazione fra i complessi di curve e superficie W e le equazioni a derivate parziali, specialmente per proposizioni come quella che le curve W d'una superficie W sono linee assintatiche sopra questa, era già completamente sviluppata nella mente di Lie, cosicchè questo lavoro costituisce un punto importante per passare agli sviluppi che tosto esamineremo e che furono raccolti nel volume V degli *Annalen*. — Inoltre in questi abbozzi l'estensione dei concetti proiettivi e di reciprocità del campo finito all'elemento lineare di curve e di superficie, dunque anche all'intero campo differenziale (donde la teoria posteriore delle trasformazioni di contatto), è già assai chiara; e il concetto di trasformazione infinitesima e di gruppo di trasformazione viene messa ancor più in risalto, benchè in forma speciale, di quel che non fosse nel lavoro testè accennato degli Annali, che prende

---

(¹) Posseduti dal sig. Klein.

come punto di partenza gli stessi complessi di curve, cioè le forme generate da quelle trasformazioni.

Le idee qui rilevate delle Note comuni sulle curve e superficie W ad eccezione dei concetti ultimamente accennati, sono dovute al solo Lie, mentre le relazioni invariantive e ciò che si riferisce a specializzazioni del tetraedro fondamentale va attribuito a Klein. Egualmente famigliare ad entrambi era l'operare con sostituzioni lineari; e l'introduzione del concetto della proprietà d'una schiera di trasformazioni di essere chiusa, come del concetto di permutabilità, è da attribuirsi all'influenza delle idee di Galois, state diffuse allora nel campo dei gruppi discontinui di sostituzioni dall'opera di C. Jordan, appunto allora uscita, e dal commentario pubblicato un anno prima in questi *Annalen* (vol. I) per iniziativa di Clebsch. E sebbene queste idee, che presentano manifeste analogie anche coi concetti di gruppi lineari, in uso nella teoria dei numeri, fossero state già applicate dallo stesso Jordan nel 1869 al campo di tutti i gruppi di movimenti dello spazio, sì continui che discontinui (Annali di Mat. serie 2ª vol. II), non ne era stato tuttavia preso in considerazione il lato analitico.

Anche in un'altro senso le ricerche dei matematici francesi di quell'epoca dovevano essere di importanza duratura per i due investigatori, mentre Lie in pari tempo ne era toccato più da vicino. A Parigi seguendo la tradizione proveniente da Liouville, Lamé, I. A. Serret, Bonnet, si lavorava in quel campo che secondo Monge e Poncelet può essero designato come applicazione dell'Analisi alla Geometria: e l'interesse era rivolto a preferenza alle proprietà metriche delle superficie; alle linee di curvatura, ai sistemi ortogonali ecc. Ed una direzione perfettamente analoga si seguiva in pari tempo dal lato proiettivo, nella cerchia degli scolari di Chasles; qui si cercava, mediante l'introduzione del cerchio imaginario delle sfere di rendere suscettibili di migliore intelligenze e d'una trattazione più generale anche relazioni metriche complicate. I due indirizzi si fusero nelle ricerche degli « Anallagmatici » — Laguerre, Moutard, Darboux; era un fatto che, rispecchiando lo sviluppo particolare di Lie, il quale si collegava in pari tempo a Monge, e alla geometria proiettiva, doveva esercitare una profonda influenza su questo investigatore d'altronde difficilmente impressionabile. A ciò aggiungasi che i due amici entrarono tosto in più stretti rapporti personali con Darboux.

Fra gli sviluppi dell'indirizzo anallagmatico, il quale si riferiva ad una specie di geometria della sfera, e quelli della geometria della retta — p. e. fra le formole comunicate a voce da Darboux per il sistema ortogonale delle ciclidi confocali e le formole di Klein per gli ∞^1 complessi di secondo grado appartenenti a una stessa superficie focale di Kummer; oppure fra le proprietà di traslazione delle superficie d'area minima e le proprietà delle superficie di Lie che compaiono nel complesso di Reye, esisteva un'analogia che non si poteva disconoscere. Non doveva esistere un principio di trasporto, che legasse le due teorie?

Lie si ricordò d'essersi occupato della rappresentazione del complesso lineare sullo spazio di punti, della conica eccezionale che compariva in questo

spazio (¹); ancora un passo: il far coincidere questa conica col cerchio assoluto, ed ecco sorta la mirabile trasformazione di contatto, che muta le rette d'uno spazio R_1 nelle sfere d'uno spazio R_2, e quindi, come forme inviluppi, le linee assintotiche delle superficie di R_1 nelle linee di curvatura delle superficie di R_2.

Era il principio di luglio, quando Lie fece questo passo decisivo, del quale però egli soltanto il 31 ottobre potè dare comunicazione all' Accademia di Parigi (C. R: « Sur une transformation geometrique », il 24 ottobre alla Società di Christiania nella Nota comparsa il 9 dicembre: « On en Classe geometriske Transformationer »). Per apprezzare pienamente questo passo bisogna tener conto anche della Nota inedita del 1870: là il complesso di Reye (f. « Kurzes Résumé etc. » nei Forh. del 1872, p. 24) deve già essere concepito esplicitamente come un' equazione a derivate parziali del 2° ordine, — cioè come quell' equazione che definisce le superficie, le cui tangenti principali in ogni punto separano armonicamente le due rette del complesso che stanno nel loro piano; con che l'equazione a derivate parziali del primo ordine relativa al complesso, la quale rappresenta il cono coordinato a ogni singolo punto di questo complesso, diviene un integrale singolare di quell' equazione del secondo ordine; e del pari le corrispondenze reciproche collegate al complesso devono essere considerate come trasformazione di contatto delle superficie integrali della stessa equazione (²).

Effettivamente Lie nell' estate del 1870 s' era occupato intensamente della teoria di Monge delle equazioni a derivate parziali; del modo a lui particolare di sviluppare ulteriormente da un lato una serie di concetti geometrici molto generali, come quello della generazione di superficie mediante inviluppo, e d'esprimere le leggi di questa generazione mediante equazioni a derivate parziali;

(¹) La relazione con ciò ottenuta fra la superficie di Kummer e la superficie del 4° ordine con conica doppia era già venuta a conoscenza di Klein e Lie nell' inverno 1869-70 nei sopra citati lavori collettivi sulla rappresentazione del complesso lineare sullo spazio di punti. Soltanto in seguito a ciò Lie pose mente al fatto, che la rappresentazione si poteva anche ricavare dal suo lavoro sugli imaginarii mediante una specializzazione colà non considerata; e completò con questo la rappresentazione. In questo senso deve intendersi la ripetuta osservazione di Lie che egli aveva dedotta la trasformazione di rette e sfere dalla sua teoria degli imaginarii. La sua indicazione nel vol. V pag. 147 dei Math. Ann., che quest' ultima connessione è in certo qual modo casuale, è più giusta di quella già conosciuta (ott. 1900).

(²) Dalla pubblicazione ora avvenuta della nota del 5 luglio 1870 („Meddelelser") risulta che le equazioni a derivate parziali del 2° e del 1° ordine non vengono quivi accennate esplicitamente. La Nota contiene soltanto alcuni enunciati: tre sulla trasformazione di rette e sfere, una quarta sulle linee assintotiche delle superficie rigate contenute in un complesso lineare, e tre altri sulla loro rappresentazione logaritmica. Queste superficie non vengono ancora introdotte come superficie integrali (Ott. 1900).

e di ricondurre d'altra parte l'integrazione di tali equazioni a quei concetti geometrici. Per mezzo di queste considerazioni si rese chiaro a Lie un concetto, che sino allora era stato più inconsciamente che altro, a fondamento del suo modo di pensare: il concetto di *elemento superficiale*, ossia dell'insieme di grandezze $\left(x\ ,\ y\ ,\ z\ ,\ p=\frac{\partial z}{\partial x}\ ,\ q=\frac{\partial z}{\partial y}\right)$, come vero elemento dell'intera teoria. Con questo nuovo concetto Lie cercò a tutta prima di penetrare nelle idee di Monge, più tardi anche nel processo d'integrazione di Cauchy; e anzitutto nel fatto che per l'integrazione di un'equazione a derivate parziali del primo ordine $F(x\ ,\ y\ ,\ z\ ,\ p\ ,\ q)=0$ basta già l'integrazione del noto sistema canonico d'equazioni differenziali ordinarie del primo ordine fra x, y, z, p, q, al quale conduce per prima cosa ogni procedimento d'integrazione. Il problema generale consiste per Lie nel distribuire gli elementi superficiali che sono definiti da $F=0$ sicchè per ciascun punto dello spazio se ne ha un inviluppo conico corrispondentemente alla « soluzione completa » di Lagrange in ∞^2 insiemi di ∞^2 elementi ciascuno. Come egli riconobbe un pò più tardi, non è necessario d'altronde che questi insiemi formino proprio delle superficie; ma i loro elementi consecutivi devono soltanto sodisfare l'equazione $dz-pdx-qdy=0$, vale a dire devono essere siffattamente « in posizione unita », che sempre l'elemento successivo passi per il punto del precedente. Ora, mentre che per Monge quel sistema canonico definisce soltanto ∞^3 curve luoghi di punti come « Caratteristiche », le quali hanno ovunque la direzione delle generatrici dei coni elementari, per Lie lo stesso sistema definisce ∞^3 « *strisce* caratteristiche », ottenute collegando ciascuna di quelle curve agli ∞^1 elementi superficiali di $F=0$ che ne osculano gli elementi lineari.

Questa concezione conduce poi Lie ad accorgersi che, quando per due strisce caratteristiche consecutive gli elementi superficiali relativi (e pure adiacenti) sono in posizione unita in *un* punto, ciò avviene per tutta l'estensione delle due striscie. E da questo punto di partenza egli domina tutto il contenuto e tutta la portata che può avere un qualunque procedimento d'integrazione di $F=0$; partendo cioè da una qualunque striscia non caratteristica vale a dire di una curva qualsiasi coi relativi elementi superficiali appartenenti a $F=0$, secondo Cauchy da una curva originaria in $y=0$ e prendendo per ciascun elemento di questa la strisca caratteristica che ne esce, si ottiene sempre una varietà integrale; e anzi la varietà più generale, quando si fa variare ad arbitrio la curva da cui si è partiti. L'integrazione è dunque necessaria soltanto alla formazione di queste ∞^1 strisce caratteristiche, mentre la curva base da cui si è partiti racchiude in sè gli elementi arbitrarii. In particolare si potrebbe prendere con Jacobi le strisce caratteristiche uscenti da un punto fisso.

Questa concezione fondamentale di Lie, che riconduce le espressioni integrali con due variabili a espressioni con una sola variabile, e considera la riunione arbitraria delle striscie a superficie come un semplice corollario, insieme colle applicazioni alle rappresentazioni di cui ora avremo a trattare e cogli altri problemi posti da Lie, è stata finora utilizzata forse troppo poco dai geometri differenziali. Del resto anche per Lie essa raggiunse soltanto a poco a

poco la forma definitiva accennata, poichè ancora il lavoro nel vol. V degli *Annalen* (1871) considera le superficie integrali di $F=0$ soltanto come risultanti da ∞^1 linee caratteristiche, che inviluppano una curva e non ha ancora una denominazione speciale per il concetto della « striscia »; un tale concetto compare invece esplicitamente soltanto in una Nota inedita presentata nel settembre del 1871 alla Società di Christiania (¹) e nelle Note, di cui parleremo più innanzi, della primavera del 1872.

Questo modo di considerare le cose ha anche un precursore nell' opera di P. Du Bois Reymond del 1864 (²) venuta a conoscenza di Lie nel 1871 nella quale il concetto di striscia, sotto la denominazione di « striscia integrale » e la sua determinazione mediante un elemento iniziale, è sviluppato ed utilizzato dal lato geometrico, se pure in modo non così generale e comprensivo come in Lie (³).

Dapprima Lie collegò queste idee soltanto coi concetti dei complessi di rette di Plücker. E procedendo per mezzo di esse alla rappresentazione del complesso lineare dello spazio R_1 sullo spazio di punti R_2, egli riconosce che tale rappresentazione si ottiene con due equazioni lineo-lineari; che però, in virtù di queste equazioni, si ha in *entrambi* gli spazi un complesso dirette, le cui rette corrispondono sempre ai punti dell' altro spazio; e questi complessi sono in generale complessi di Reye. Un complesso di grado m gli definisce un problema d' integrazione di grado m, in quanto gli determina per ogni punto x, y, z un cono di ordine m, ossia ∞^1 direzioni $dx : dy : dz$, e quindi un' equazione $f(x, y, z, dx, dy, dz) = 0$: questa è l' equazione delle direzioni delle linee caratteristiche d' una certa equazione a derivate parziali del 1° ordine, che è poi l'equazione di quello stesso cono in coordinate di piani; e l' integrazione di quest' ultima richiede la determinazione di tutte le superficie, che in ogni loro punto toccano il cono corrispondente. La corrispondenza fra R_1 e R_2 alla quale Lie fu qui condotto ha anche la particolarità che le direzioni delle curve del complesso dei due spazi si corrispondono biunivocamente, e in pari tempo reciprocamente, nel senso che di due curve omologhe, sempre una arbitraria può considerarsi come luogo dei punti del suo spazio, l'altra come inviluppata dalle rette corrispondenti del complesso. Di due elementi superficiali omologhi uno risulta affatto *arbitrario*, poichè, quando un punto si muove sopra una superficie, la retta corrispondente inviluppa di nuovo una superficie: cioè la superficie focale della congruenza da essa generata.

Lie però non esita a concepire queste idee nel loro significato generale, e

---

(¹) Secondo la recente pubblicazione (" Meddelelser ") anche questa Nota non contiene alcuna espressione per " striscia " (ott. 1900).

(²) Beiträge sur Interpretation der partiellen Differentialgleichungen mit drei Variabeln — 1° Fasc. Lipsia 1864.

(³) Come un precursore geometrico ancora anteriore sarebbe da nominarsi O. Bonnet (C. R. Vol. 45° 1858); cf. Lie-Scheffers: " Geometrie der Berührungstransformationen " pag. 518 (ott. 1900).

ricava di qui il suo concetto più generale d'una *trasformazione di contatto*. Alle diverse trasformazioni conosciute da tempo, nelle quali il *contatto* è una relazione invariantiva: all'ordinaria trasformazione puntuale determinata da tre equazioni fra le coordinate, ed alla trasformazione reciproca di punti e superficie rappresentata da Plücker con *una* aequatio directrix, in particolare alla ordinaria correlazione (o reciprocità), s'aggiunge qui una trasformazione reciproca determinata mediante *due* equazioni lineari, una specie affatto nuova la cui proprietà di contatto è di essere riconducibile ad equazioni differenziali ordinarie ed a derivate parziali si conservano, come risulta dal concetto di elemento superficiale ($x\,y\,z\,p\,q$), quando si sostituiscono alle due equazioni lineari due equazioni affatto arbitrarie fra i due sistemi x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2: e questa è una trasformazione punto curva. Concepite pertanto tutte le trasformazioni di contatto fra due spazi come determinate da cinque equazioni fra x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 e x_2, y_2, z_2, p_2, q_2, dalle quali sono da eliminarsi le pq; Lie riconosce in pari tempo che non esistono altre trasformazioni siffatte, all'iufuori delle tre specie testè caratterizzate partendo dalla considerazione del punto.

E se queste generalizzazioni ebbero per l'attività successiva di Lie fondamentale importanza, altrettanto interessante ne fu l'applicazione al problema che in particolare gli stava davanti. La specializzazione consisteva in ciò, che ai complessi tetraedrali e generali vennero sostituiti in R_1, il complesso lineare generale in R_2, il « complesso minimo » M, ossia il complesso delle rette che si appoggiano al cerchio assoluto, cioè delle « rette minime », ovvero di rette di lunghezza nulla. Ora, i punti d'una retta arbitraria di R_1 si mutano in una schiera di rette imaginarie d'una sfera di R_2 — alla quale sfera viceversa, per mezzo della sua seconda schiera rigata corrisponde anche una seconda retta di R_1 — mentre gli elementi superficiali osculatori alla retta considerata di R_1 si mutano negli elementi superficiali della sfera di R_2. Le rette d'un qualsiasi complesso lineare di R_1 si trasformano nelle sfere di R_2, che tagliano una sfera fissa sotto angolo costante, in particolare sotto angolo retto, quando quel complesso è in posizione « involutoria » con L; e rette incidenti si mutano in sfere tangenti. L'insieme delle trasformazioni proiettive dello spazio R_1 si muta nell'insieme delle trasformazioni di sfere di R_2, fra le quali ne compaiono di tutte le specie: i movimenti ordinarii, e sopratutto le trasformazioni per raggi reciproci, e le trasformazioni per parallelismo — da ciò un'analogia completa ricondotta ai suoi fondamenti, fra la geometria della retta e la geometria delle sfere; una notevole e assai intima relazione fra la geometria *proiettiva* generale e la geometria *metrica* fondata sui raggi reciproci. Fu questa la prima, vera geometria avente per elemento la sfera; equivalente geometricamente, in forza della distinzione delle due schiere di rette della sfera (o del segno del raggio) alla concezione posteriore di Laguerre delle semisfere; distinzione questa che non compare nella successiva geometria delle sfere di Darboux, nè in quella posteriore di Reye.

A questo Lie collegò ancora considerazioni di geometria infinitesimale, che gli diedero una nuova interpretazione dell'equazione a derivate parziali di 1° ordine relativa ad un complesso di ∞^3 curve: che cioè una qualsiasi « curva del

complesso » inviluppata da tali curve non solo ha in ogni suo punto la direzione d'una generatrice del cono corrispondente, ma ha per piano osculatore il piano tangente di questo cono; cosicchè le superficie integrali in ciascuno dei loro punti vengono osculate dalle curve del complesso tangenti ad esse; e in particolare, quando il complesso è un complesso di rette, hanno le rette di questo come tangenti principali, e le proprie curve caratteristiche come asintotiche.

E già il primo risultato di questa concezione apriva le più ampie prospettive ed era atto a dare un forte impulso alla prosecuzione di queste teorie; una rappresentazione delle asintotiche delle superficie di R_1 sulle linee di curvatura delle superficie di R_2. In vero, secondo un modo di esprimersi adottato nei Forh. 1882, queste due specie di curve sono da riguardarsi come luoghi di ∞' elementi superficiali, dei quali due qualunque consecutivi appartengono ad una retta, o rispettivamente ad una sfera. Così, poichè i matematici francesi avevano determinate le linee di curvature delle ciclidi (C. R. t. 59), risultò che le asintotiche della superficie di Kummer di 4° ordine e 4ª classe erano curve algebriche di ordine e classe 16: curve il cui sistema, come Klein tosto riconobbe, era identico con quello da lui studiato nel vol. 2° dei *Mathematische Annalen*, in base alla proprietà della detta superficie di essere superficie singolari di ∞' complessi di 2° grado.

Fra i vari indirizzi, secondo cui Lie studiava queste cose — vale a dire mediante ricerche su quelle equazioni a derivate parziali di 1° ordine, le cui curve caratteristiche sono linee di curvatura; inoltre, valendosi della considerazione delle superficie dei centri di curvatura, su quelle equazioni, le cui curve caratteristiche divengono linee geodetiche; od anche, mediante considerazione di complessi con trasformazioni infinitesime in sè, come estensione della precedente teoria delle curve e superficie W — dobbiamo metterne in rilievo un' altra: la costruzione, caso per caso, di una corrispondente equazione alle derivate parziali del 2° ordine. Essa compare quando si cercano le superficie che hanno in ogni loro punto un contatto di 2° ordine con una curva del complesso definito dall' equazione del 1° ordine, o le cui asintotiche sono sempre armoniche a due direzioni contenute nel complesso: quando dunque si cercano le superficie che contengono ∞' caratteristiche dell' equazione del 1° ordine. Quì compaiono sotto nuova luce le note equazioni di Monge, Ampère e dei loro successori, colla riduzione mediante una trasformazione di contatto ad una forma lineare nelle derivate seconde; e Lie si propone lo scopo particolare di determinare tutte le equazioni di questa natura, che hanno uno o due integrali generali primi. Si trovano ampi sviluppi delle Note di Lie nei Forh. del 1871: « Over en Classe geometriske Trasformationer », delle quali note i primi due capitoli, in lingua norvegese, servirono a Lie nel 1871 come dissertazione di laurea e come tesi d'abilitazione a Christiania, mentre i rimanenti capitoli, come quasi tutti i lavori di Lie, sono scritte in lingua tedesca; e nella grossa memoria comparsa nell' autunno del 1871 nel vol. V di questi *Annalen*: « Ueber Complexe, insbesondere Linien-und Kugel-Complexe, mit Anwendung auf die Theorie partieller Differentialgleichungen ». In una parola i concetti dominanti di Lie che emergono da questi lavori sono: l'aver posto a base l' elemento superficiale, il

concetto della trasformazione di contatto, la costruzione di tutte queste trasformazioni con e senza cambiamento dell'elemento dello spazio, la compenetrazione delle idee primordiali di Monge con questi concetti, il loro uso per le relazioni differenziali metriche della teoria delle superficie e per la concezione delle equazioni a derivate parziali.

Lie aveva lasciato Parigi in principio d'agosto all' inizio della guerra, per andare in Italia a piedi, ma venne già a Fontainebleau erroneamente arrestato come spia e trattenute in carcere alcune settimane. La continuazione del viaggio lo condusse in Italia ed in Isvizzera, e nel viaggio di ritorno a Christiania s' incontrò ancora per breve tempo con Klein per redigere una Nota comune intorno alle summenzionate linee asintotiche della superficie di Kummer, pubblicata nei Rendiconti dell' Accademia di Berlino del 15 dicembre 1870. Il fatto che le considerazioni sulla forma di questa superficie come anche la determinazione dei caratteri di Plücker di quelle linee, non sono dovute a Lie, è caratteristico per la natura del suo modo di pensare in geometria. Certamente si dovrà considerare in prima linea, non come analista, ma come geometra lui, che sino ad ora in tutto il corso delle sue idee e nelle sue rappresentazioni aveva fatto l' uso più ampio di osservazioni sullo spazio; che, muovendo da queste osservazioni, aveva architettate queste ricerche analitiche e le aveva compenetrate con nuove idee sulle trasformazioni e sul comportamento delle varietà dal punto di vista differenziale; lui, la cui importanza in gran parte consiste in questo, che utilizza tutta l' elasticità dei metodi di studio proiettivo-algebrici, che hanno nel nostro spazio piena validità anche nel campo complesso, applicandoli a questioni differenziali e trascendenti. Ma le sue considerazioni si riferiscono anche soltanto a questo comportamento delle figure nel campo infinitesimo, o in una regione limitata dello spazio. La figura concreta di una varietà in tutta la sua estensione, vale a dire le sue proprietà di forma, il modificarsi di questa forma nel caso di parametri variabili, e sopratutto le questioni sulla realtà dei singoli enti, non hanno interessato Lie. Ma in quel campo, che negli elementi geometrici e nelle operazioni vede soltanto una sintesi di concetti completamente astratti, spesso dei più complicati, Lie era maestro. È eloquente il fatto che sin da principio Lie non si limitava mai al campo algebrico, ma si valeva soltanto di un concetto generale di funzione o di dipendenza, che coincideva appunto, geometricamente coi concetti puri di varietà, ed al quale solo tardi venivano aggiunti alcuni attributi di funzione analitica. Ma un vantaggio inerente alla concezione geometrica delle relazioni analitiche Lie ha sfruttato come nessun altro; cose che nei metodi del linguaggio formale, ciascuno dei quali mette in evidenza elementi speciali, si presentano spesso nei modi più svariati, cadone per lui, come uguali nel concetto, sotto un unico punto di vista — Così gli enti: punto, curva, superficie, tanto diversi fra loro dal punto di vista delle coordinate di punto, si riuniscono sotto il concetto fondamentale della generazione per mezzo di elementi superficiali. Il suo modo di concepire lo spazio che egli soleva chiamare il suo metodo « Sintetico », diventa per lui vero stimolo a creare nuovi concetti fondamentali.

È bene però rilevare qui che Lie, come sembra, non ha sviluppati i concetti geometrici, nel campo differenziale, fino al punto da comprendere anche il comportamento di tutte le trasformazioni di contatto in posizioni speciali, dove tali trasformazioni divengono indeterminate, e perciò il concetto della conservazione del contatto, valido in generale, cambia il proprio significato immediato; e tuttavia questo sviluppo può farsi collegandosi a Plücker e sostanzialmente è già eseguito. Anche questo si connette alla circoostanza che Lie nelle sue trasforamazioni ha in vista dapprima solo un concetto indeterminato di funzione, e più tardi un campo di validità limitato senza continuazione analitica.

Al modo di pensare che riposa nei concetti generali di varietà, divenuto sempre più patrimonio comune dei geometri verso il 1870, è da ascriversi l'indirizzo secondo cui procedette lo sviluppo ulteriore delle idee di Lie intorno alle trasformazioni di contatto nei due anni seguenti; nel 1871, dalle teorie di curvatura e ortogonalità della geometria della sfera verso una *teoria della curvatura di spazi superiori;* e di qua nel 1872, verso una penetrazione geometrica nella *teoria delle equazioni a derivate parziali del 1° ordine con più di tre variabili.*

Il primo sviluppo è esposto in alcune Note del Lie (nelle Nachr. di Gottinga del Maggio-Novembre 1871 e nella Nota rimasta inedita [1] presentata nel settembre 1871 all'Acc. di Christiania, che seguono Note analoghe di Klein. Mentre Klein (Nach, di Gott. marzo 1871), concepito lo spazio di rette di Plücker come spazio metrico a 4 dimensioni, estende sostanzialmente il teorema di Dupin al caso di relazioni involutorie, fra complessi di rette, Lie estende invece le relazioni stesse di curvatura, aventi per elemento la sfera, allo spazio di r dimensioni (R_n); e mediante le ∞^{n+1} sfere di questo spazio e le loro « relazioni involutorie », (ovvero anche mediante sezione dei coni minimi di R_{n+1} con un R_n piano), ottiene una relazione colla geometria metrica dello spazio R_{n+1}, nella quale alle trasformazioni conformi di R_{n+1} corrispondono in R_n trasformazioni di contatto, che mutano le linee di curvatura in linee siffatte, e anzi nelle più generali fra queste. Il metodo di Darboux per il trasporto dei sistemi ortogonali (C. R. Ag. 1869) è diverso da questo. Come ognuno di questi primi lavori di Lie rivela un progresso di idee, così anche le due Note di Gottinga; poichè non soltanto esse costituiscono il passaggio alla nominata teoria del 1872, ma trasformano altresì per la prima volta le idee concepite nelle Note sulle curve W con cosciente accentuazione, benchè in modo ancora incerto, in operazioni gruppali generali; così appunto quando Lie ricava da un numero finito di trasformazioni infinitesime, il gruppo finito delle già prima nominate « trasformazioni lineari di sfere » dell'R_3 con 15 parametri.

Una terza Nota sullo R_n destinata alle « Nachrichten » di Gottinga; la quale estendendo il lavoro dei *Math. Annalen,* vol. 5, doveva accentuare ancora più le questioni relative all'integrazione [2], non fu redatta, poichè in quell'epoca

---

[1] Ciò viene confermato dalla pubblicazione avvenuta (ottobre 1900).

[2] Un abbozzo del Maggio 1872 si trova in possesso del signor Klein.

le idee si svolgevano in Lie troppo presto, perchè egli trovasse agio di elaborarlo completamente. Che tutti questi problemi della geometria metrica rappresentino soltanto casi speciali della teoria delle equazioni a derivate parziali, alla cui trattazione, anche ponendo la questione nel modo più generale, sarebbero bastati benissimo i suoi mezzi geometrici: questa era la convinzione che in lui penetrava sempre più. Se sino allora colle sue nuove rappresentazioni aveva affrontati soltanto i problemi di Monge, ora doveva divenire suo scopo quello di penetrare, coll' aiuto delle estensioni geometriche ultimamente acquistate dei concetti sulle relazioni generali di ortogonalità o di involuzioni, negli sviluppi degli *Analisti*, come Cauchy e Jacobi, sulle equazioni a derivate parziali con $n-1$ variabili indipendenti. E non soltanto questo gli riuscì, ma molto presto egli giunse più in là, a nuove « *Teorie generali d' integrazione* ».

Un « *Kurzes Résumé mehrerer neuen Theorien* » del 30 Aprile 1872 (Forh. del 3 maggio), consistente in sole quattro pagine, ed una Nota ancor più breve « Zur Theorie der Differentialprobleme » (Forh. del 14 Novembre 1872) contengono già a mò di programma le idee di Lie sulla teoria delle equazioni a derivate parziali del 1° ordine; le trasformazioni di contatto hanno lo scopo di ricondurre queste equazioni alle loro forme più semplici: ma *una* tale equazione non ha ancora nessun invariante, poichè può ricondursi a ogni altra, p. e. a $z=0$; ne hanno uno invece due equazioni $F=0$, $F_1=0$. Per essi il simbolo in parentesi di Poisson-Jacobi (FF_1) è « caratteristico » vale a dire invariante, poichè $(FF_1)=0$ che è appunto la relazione sopra (pag. 159) menzionata di ortogonalità o « involuzione » esprime la condizione perchè le due equazioni $F=0$, $F_1=0$ siano in « involuzione », ossia posseggono un integrale completo comune con $n-2$ costanti arbitrarie. E mentre Lie estende il concetto di caratteristiche di Lagrange e Monge, e specialmente il suo concetto delle « striscie caratteristiche » a spazi superiori, riassume pure il caso di $n-1$ variabili indipendenti, il metodo di Cauchy, che per l' integrazione di $F=0$ richiede la determinazione di tutte le funzioni F_1, per cui $(FF_1)=0$, nella proposizione seguente: Se due varietà integrali M_{n-1} a $n-1$ dimensioni si toccano in un punto, esse hanno a comune una semplice — infinità d' elementi superficiali costituenti una striscia caratteristica; e — riunendo le strisce caratteristiche di F_1 che escono dai punti d' una striscia caratteristica di F — ne hanno anzi a comune una doppia infinità, quando appartengono a due eqnazioni a derivate parziali $F=0$, $F_1=0$ che siano in involuzione.

Già in una nota dell' 8 maggio (Forh. del 10 maggio), come pure in una del 4 giugno (Nachr. di Gottinga del 19 giugno), Lie giunge di quà, senza l' aiuto del teorema di Poisson-Jacobi, a un nuovo procedimento d' integrazione. Connettendosi a quelle varietà integrali M_{n-1} del sistema involutorio $F=0$, $F_1=0$ che risultano secondo Jacobi dalle caratteristiche passanti per un punto, Lie mostra sinteticamente che quelle sezioni delle M_{n-1} del sistema $F=0$, $F_1=0$, le quali risultanto dal collegamento coll'equazione $x_{n-1}=\alpha$ e dall' eliminazione di $p_{n-1}=\dfrac{\partial z}{\partial x_{n-1}}$, si convertono senz'altro nelle caratteristiche della

unica equazione $\varphi=0$ a derivate parziali a $n-2$ variabili indipendenti che si ottiene con quell' eliminazione. In altre parole: tosto che si ottiene un solo integrale $F_1=c$ delle $2n-3$ equazioni differenziali ordinarie per le strisce caratteristiche dell' equazione $F=0$ — ossia del sistema corrispondente all' equazione lineare a derivate parziali $(F, F_1)=0$ — tutta l'integrazione dell' equazione $F=0$ con $n-1$ variabili indipendenti è ricondotta a quella d'un' equazione $\varphi=0$ con sole $n-z$ variabili.

Di fronte a Cauchy e Jacobi era così essenzialmente diminuito l' ordine e il numero delle operazioni integrali da eseguirsi per l' integrazione. Ma in questo risultato Lie s'incontrò precisamente con A. Mayer (Gött, Nachrichten del 12 giugno 1872); soltanto che quest' ultimo vi era giunto per una via apparentemente diversa, utilizzando cioè la conoscenza d' un integrale di quell' equazione $\varphi=0$ per dedurne *un* integrale comune di $F=0$, $F_1=0$. Infatti — certamente in opposizione all' opinione di Lie — il principio che sta a base della riduzione, il metodo delle sezioni di Lie, è sostanzialmente il medesimo nei due autori: già Du Bois-Reymond l'aveva applicato all' integrazione, mediante una quadratura di un'espressione ai differenziali totali e integrabile $dz=\Sigma x_i\, dx_i$ (come meglio si vede quando invece di porre $x_{n-1}=\alpha$, si introduce mediante la sostituzione $x_{n-2}=\alpha x_{n-1}$ la variabile α al posto di x_{n-2}); a valori costanti delle antiche variabili (qui $x_{n-1}=0$, $x_{n-2}=0$) viene coordinata un' infinità di valori delle nuove variabili (qui $x_{n-1}=0$, α qualunque) con che dunque nell'equazione trasformata la prima costante d' integrazione deve risultare indipendente da α, e perciò α ha soltanto l' ufficio d' un parametro arbitrario.

La possibilità di comprendere dal lato analitico il metodo di Lie, e la sua applicazione a sistemi simultanei, si dovette allora all' opera di A. Mayer: e la stretta relazione con questo investigatore, che incominciò nell'autunno del 1872, condusse Lie a sostituire il metodo di esposizione « sintetico » de' suoi lavori che procedeva facendo uso dei concetti di varietà, sempre più con un metodo analitico. Ma si vede che queste nuove esposizioni sono propriamente traduzioni di un altro modo di pensare, verifiche di proposizioni che nella sua mente sono già assodate; e anche quando egli traduce in formole i suoi concetti più particolari formanti un tutto chiuso, rimane molto addietro ai chiari sviluppi di Mayer ed altri. La stessa concezione fondamentale rimase per Lie anche più tardi la parte principale; è essa che guida Lie, come nelle ricerche sulle equazioni differenziali, così anche nelle sue ricerche successive nella teoria dei gruppi e nelle sue multiformi applicazioni: ed è soltanto l'immediata riduzione ai concetti fondamentali, che lo sodisfa nelle sue conclusioni. E se già ogni geometra algebrico delle scuole recenti conosce le difficoltà della traduzione di questioni di concetto in un linguaggio analitico concatenato e intelligibile, per Lie s' aggiunge a questo che nella formazione delle sue idee « sintetiche » era coinvolto qualche cosa di troppo generale che abbisognava ancora d'essere precisato. Inoltre s' aggiunge che non era confacente alla sua natura un' esposizione ordinata e sistematica di tutta la folla delle sue idee, e che egli era assai più propenso ad occuparsi liberamente di frammenti, come lo consentivano brevi Note.

Del resto anche la forza d' intuizione apparentemente potente che ci si affaccia dai lavori analitici di Lie diviene quasi suscettibile d'analisi: esso non è altro che una forma dell' espressione del suo primitivo pensiero sintetico partendo da una base comprensiva quanto più possibile; e alla stessa circostanza devono attribuirsi le interpretazioni posteriori, che appaiono talora violente, di asserzioni precedenti, in quanto Lie non teneva d' occhio ciò che veramente aveva enunciato, ma il corso, fosse anche un pò indeterminato, delle sue primitive rappresentazioni.

Come conquista essenziale di questo periodo di ricerca è da considerarsi, anche secondo la posteriore concezione propria di Lie, non tanto l' avanzamento del punto di vista di Jacobi, che vede il progresso nell' abbassamento formale degli ordini d'integrazione, quanto appunto l'estensione della concezione fondamentale. Ciò è posto nella Nota ben degna d' essere meditata, datata da Erlangen l' 11 ottobre 1872: « Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, insbesondere über eine Classification derselben » (Gött. Nachr. v. 30 oct. 1872), nel « Programma di Klein del nov. 1872 », in base a comunicazione di Lie, e nella Nota di Lie: « Intorno alla teoria analitica delle trasformazioni di contatto » (Forh. della primavera del 1873).

Mentre prima tutte le trasformazioni di contatto erano definite sostanzialmente da $1, 2, \ldots, n$ equazioni fra sistemi di variabili

$$(z, x_1, \ldots x_{n-1}) \quad , \quad (z', x'_1 \ldots x'_{n-1})$$

(e, con maggiore precisione, Lie diede questa definizione nel 1876 nel suo Archivio, vol. I, e nella Nota 2ª al suo lavoro in questi *Annalen*, vol. II) e poi da $2n-1$ equazioni invertibili fra i sistemi di variabili:

$$\left(z, x_i, p_i = \frac{dz}{dx_i}\right) \quad , \quad \left(z', x'_i, p'_i = \frac{dz'}{dx'_i}\right), \ (i = 1, 2 \ldots n)$$

ora invece, in modo più corretto, sono definite da $2n-1$ equazioni invertibili, le quali determinano le $2n-1$ variabili z', x'_i, p'_i come funzioni delle $2n-1$ variabili z, x_i, p_i, in tal guisa che una relazione $dz - \Sigma p_i dx_i = 0$ sia trasformata in sè stessa: vale a dire che esista un' equazione della forma:

$$dz' - \Sigma p'_i dx'_i = \rho(dz - \Sigma p_i dx_i)$$

ove ρ è una certa funzione delle z_i, x_i, p_i. La relazione $dz - \Sigma p_i dx_i = 0$ determina la « posizione unita » dell'« Elemento (z, x_i, p_i) » col consecutivo

$$(z + dz, x_i + dx_i, p_i + dp_i).$$

Dal significato di un' equazione a derivate parziali $F(z, x_i, p_i) = 0$: la determi-

nazione di ∞^{2n-2} elementi; e dal significato d'una soluzione completa di $F = 0$: riunire questi elementi in tutti i modi possibili in ∞^{n-1} insiemi di ∞^{n-1} elementi ciascuno; risulta possibile di abbracciare completamente collo sguardo sin dal principio tutta la necessaria estensione dell'apparato analitico, quando si vogliano comprendere tutti i casi di equazioni $F=0$, anche le equazioni più particolari, come quelle che non contengono nessuna delle p_i, e tutte le specie di soluzioni, come gli insiemi di elementi che inviluppano punti, curve, superficie, ecc. In particolare si dovrà far attenzione non soltanto al comportamento rispetto a tutte le trasformazioni di contatto, per le quali un' equazione a derivate parziali non prepresenta nulla di invariante; ma rispetto p. e. alle trasformazioni puntuali (zx_i) dello spazio a sole dimensioni; e su questo modo speciale di comportarsi si può fondare una classificazione, da esso le facilitazioni nell' integrazione di classi particolari, ad es. delle equazioni lineari nelle p_i, appaiono sotto nuova luce. Il vero punto di vista di Lie rimane però la concezione delle (z, x_i, p_i) come coordinate dei punti d'uno spazio di $2n-1$ dimensioni, colla sola condizione $dz - \Sigma p_i dx_i = 0$; e sebbene le formole analitiche di tutte le trasformazioni di contatto fossero già da lungo tempo comparse p. e. nella trasformazione di Legendre e in quella di Ampère, e sopra tutto nelle ricerche di Jacobi sopra equazioni a derivate parziali, sul problema di Pfaff e sulla meccanica (v. Giorn. di Cr. vol. II C, R. t. V), pure prima di Lie non erano state considerate esplicitamente per sè stesse, indipendentemente dalle loro applicazioni a questi problemi; e non erano considerati dal punto di vista geometrico, come un mezzo necessario all'indagine della struttura delle varietà integrali. Per contro è notevole la scoperta di Lie seguita poco dopo (Forh. del 14 nov. 1875), che una questione analitica e un modo di formulare questa pienamente conformi alle sue idee — in particolare quando vi si colleghi l'omogeneità introdotta da Clebsch nella sua teoria dei connessi — sono appunto quella che si trova in Pfaff, già nel 1815, nella sua ricerca sul problema che porta il suo nome (Mem. dell' Acc. di Berlino 1814-15); cioè la trasformazione più generale d' un' espressione canonica $\Sigma \chi_i dx_i$, quindi $dz - \Sigma p_i dx_i$, in un' espressione differenziale canonica simile $\Sigma Y_k dy_k$, per mezzo d' equazioni fra i due sistemi di variabili (in Pfaff in generale mediante una sola equazione, in Jacobi, *Giorn. di Crelle* II per mezzo di più equazioni). L' idea della possibilità dell' integrazione generale di un' equazione $\Sigma Y_k dy_k = 0$ mediante un *sistema* d'equazioni integrali, Pfaff stesso del resto l'aveva presa da Monge (Histoire de l'Ac. de Sc. 1784). Dopo che Lie ebbe ritrovato questo punto di vista Pfaffiano dello spazio a $2n-1$ dimensioni, si mette anch' egli a preferenza da questo punto di vista; e di qui pone anche più tardi il problema Pfaffiano più generale, del che non diremo più a lungo. Osserviamo però che appunto la facilità con cui Lie, in relazione al problema, passava da uno all' altro punto di vista, costituisce un tratto caratteristico della sua produzione.

In tutte le ricerche di Lie del 1871 e 1872 — mentre sempre i tre complessi, il complesso lineare, il complesso di rette minime e quello tetraedrale lo spingono vicendevolmente, e vengono tirate in campo specialmente le superficie di traslazione dei due ultimi — hanno parte i sistemi di trasformazioni di contatto

UofM

infinitesime, dapprima solo di trasformazioni mutuamente permutabili; e anche il concetto d'invariantività rispetto a tali trasformazioni. Però lo sviluppo che si connette a questo punto, e che doveva condurre Lie alla sua opera più elevata e più duratura, non si può comprendere, senza che si parli ulteriormente dei suoi rapporti d'allora con F. Klein.

Già presto Klein, nella confusa moltiplicità dei metodi di studio geometrici, quali si presentavano nei proiettisti puri, o in coloro che propendevano verso l'indirizzo metrico, come Grassmann, Moebius, Hamilton aveva cercato un principio ordinatore. Nell'inverno del 1870-71, i due investigatori, allora in strettissima corrispondenza fra loro, avevano studiate contemporaneamente, come già sopra è accennato, le relazioni metriche collegantisi alla geometria della retta e delle sfera di Lie. E per questo trasporto, che poneva la geometria metrica, lasciata sino allora in Germania in seconda linea, a fianco della geometria proiettiva come avente pari importanza, Klein si era procurato un nuovo punto di vista, col fatto di concepire la geometria proiettiva della retta del nostro spazio, per mezzo dell'equazione quadratica che le stava a base, come la geometria metrica del punto d'uno spazio a quattro dimensioni, o più esattamente come geometria delle «Inversioni» di questo spazio; e aveva identificate fra loro queste due geometrie a cagione della riconducibilità l'uno all'altro dei loro gruppi di trasformazioni. Precisamente allo stesso collegamento di idee lo spingeva il suo nuovo occuparsi colla geometria non Euclidea (fine del 1871): si trattava di scoprire la ragione intima per cui questa geometria era sostanzialmente identica alla geometria metrica basata sulla determinazione metrica assoluta di Cayley, e colla geometria di Riemann-Beltrami d'uno spazio a curvatura costante: di comprendere fin da prima che e perchè queste geometrie sono incluse nella trattazione proiettiva. Le idee fondamentali del Programma di Erlangen del novembre 1872, esposte nel giugno 1872 in un lavoro pubblicato nel 1873 nel vol. VI degli *Annalen*, benchè non ancora nella generalità più tardi raggiunta, idee che miravano ad ordinare tutto l'insieme degli sviluppi geometrici; erano già state comunicate a Lie nel dicembre del 1871: che il principio direttivo è da cercarsi esclusivamente nel concetto di gruppo, nel gruppo di trasformazioni da aggiungersi; che cioè per lo studio d'una varietà vi sono tanti diversi metodi di trattazione, quanti sono i gruppi continui di trasformazioni qualsiansi arbitrarie che si possono costruire, e altrettante: «teorie invariantive».

I due amici stettero insieme due mesi nell'autunno del 1872, in settembre a Gottinga, in ottobre ad Erlangen, dopo che Lie al primo luglio di quell'anno era stato nominato professore straordinario all'università di Christiania: un riconoscimento del suo merito, avvenuto in seguito ai giudizi di Clebsch e Cremona, e che del resto imponeva a Lie assai pochi doveri, neppure quello di far lezione. E allora si verificò una nuova reciproca influenza, sotto la quale maturarono da un lato il Programma di Klein, dall'altro la Nota di Lie dell'ottobre (Gött. Nachr.) come pure altre Note ancora da menzionare. Poichè le idee di Lie sulle trasformazioni di contatto e sulle derivate parziali nelle quali si operava soltanto con enti invarianti, cioè gli elementi superficiali, e si consideravano

trasformazioni di ogni specie e sopra ogni sorta di variete offrivano a Klein un nuovo ricco materiale, si doveva estendere di per sè la portata delle idee del del Programma. D'altra parte nel Programma era enunciato per la prima volta il fatto che il gruppo di trasformazione sta nel mezzo di ogni ricerca geometrica: che nemmeno l'elemento, partendo dal quale si genera una varietà, determina le proprietà caratteristiche di questa, bensì *soltanto* il gruppo; che, per avere proprietà invarianti, bisogna sempre costruire dei « corpi » mediante le trasformazioni del gruppo; che la composizione di questo mediante sottogruppi stabilisce i sottocasi della geometria considerata; che le rappresentazioni lasciano invariato il gruppo, e quindi anche la geometria. A Lie, che si era occupato dei gruppi più svariati, ma al quale a tutta prima era rimasto sconosciuto il loro significato per la classificazione, quest'idea doveva tosto riescir famigliare, poichè esprimeva ciò ch'egli stesso aveva preparato, ma non ancora elaborato sino alla chiarezza; e fu così appunto che l'idea stessa potè produrre subito su lui una tale influenza da fondersi completamente col suo modo di pensare.

Benchè l'interessamento dei due investigatori, a partire da questo punto sia andato procedendo in diverse direzioni, nell'uno verso i gruppi discontinui, nell'altro verso i gruppi continui; e benchè i loro rapporti personali si siano essi con ciò semprepiù affievoliti, tuttavia l'idea della posizione fatta ai concetto di gruppo rimase sempre loro comune punto di partenza. Le quistioni sulle proprietà invariantive delle equazioni a derivate parziali rispetto al gruppo di tutte le trasformazioni di contatto si presentarono a Lie nel 1872-73: presto però queste equazioni considerate per sè stesse rimasero completamente escluse nella teoria delle trasformazioni; da un mezzo di ricerca i gruppi salirono al vero oggetto della ricerca, e l'opera di Lie divenne quella di dar forma al concetto di gruppo continuo, e di metterlo a basamento d'una teoria astratta e fra le più ampie.

L'introduzione delle *idee gruppali* si collega in Lie alle soluzioni, mediante la teoria di Pfaff d'una equazione:

$$\Sigma P_i dX_i = \rho \Sigma P_i dx_i$$

ove le P_i, X_i dipendono dalle p_i, x_i; quindi ancora alla costruzione di tutte le trasformazioni di contatto. E valendosi della teoria di Clebsch-Mayer del problema di Pfaff, il quale riconduce questo problema a un sistema completo d'equazioni a derivate parziali; egli trova le condizioni necessarie e sufficienti per le funzioni X_i, cioè le relazioni d'involuzione:

$$(X_i X_k) = 0, \text{ dove } (XY) = \sum_j \left(\frac{\partial X}{\partial x_j} \frac{\partial Y}{\partial p_j} - \frac{\partial X}{\partial p_j} \frac{\partial Y}{\partial x_j} \right)$$

dalle quali risultano di per sè le altre:

$$(P_i P_k) = 0 \quad , \quad (X_i P_k) = 0 \quad , \quad (X_i P_i) = \rho.$$

(Forh. del Marzo 1873; Math. Ann. VIII 1874).

UofM

Il passo più importante così promosso, del quale é già data comunicazione in una breve Nota nei Forh. del 10 dic., 1872, ma più diffusamente nell' ampio lavoro: « Begründung einer Invariantentheorie der Berührungstransformationen » nel vol. VIII di questi *Annalen*, consisteva in ciò; che in luogo del sistema completo d' equazioni lineari a derivate parziali

$$(F_1 f) = 0 \; . \; . \; . \; . \; (F_r f) = 0$$

che compare quando si tratta d' un' equazione a derivate parziali $f = 0$ viene considerato astrattamente soltanto un « gruppo r^{plo} di Funzioni » $F_1, \ldots, F_r$ di $x_1 \ldots x_n$, $p_1 \ldots p_n$, avente la proprietà che tutte le $(F_i F_k)$ sono funzioni delle F_i (con un significato momentaneamente improprio della parola « Gruppo »); e questo grnppo di funzioni deve qui essere studiato in tutte le relazioni, che rimangono invariate rispetto ad una trasformazione di contatto arbitraria delle x, p. Ad un gruppo siffatto si collega sempre un gruppo di funzioni reciproco e $(2n - r)^{plo} \cdot \Phi_1 \ldots \Phi_{2n-r}$ in guisa tale che $(F_i \Phi_i)$ è sempre $= 0$. Fra le funzioni F_i ve ne è sempre un certo numero r' di « funzioni eccezionali » F', per le quali rispetto a tutte le F_i è $(F_i F') = 0$; funzioni che sono in pari tempo eccezionali cntro il gruppo reciproco, e la eui introduzione in luogo di r' tra le funzioni F_i serve a ridurre il gruppo a una forma canonica. La conservazione dei numeri r ed r' è, all' infuori delle proprietà di struttura, l' unica proprietà invariantiva del gruppo.

Come pure applicazioni di questa teoria applaiono le regole d' integrazione per i sistemi involutori $F_i = \text{cost}$; e la stessa permette anzi di stabilire sistematicamente sin dal principio gli abbassamenti degli ordini d'integrazione che sono possibili in casi particolari.

Più importante è un modo ulteriore di concepire questa teoria — il quale si collega ancora alle idee sulle curve W — che d' ora in poi entra in prima linea (v. la ora citata Memoria del vol. VIII degli *Annalen* e la: « Verallgemeinerung und neue Verwerthung der Jacobi' schen Multiplicator-Theorie », Forh. 1874). Per una trasformazione puntuale infinitesima:

$$\delta x_i = B_i \, \delta t$$

viene introdotto per la prima volta il simbolo: (¹)

$$Bf \equiv \Sigma \, B_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

il quale indica che per mezzo di essa f si muta in $f + \delta t \cdot Bf$. Affermare che un equazione lineare a derivate parziali $Af = 0$ ammette una trasformazione infini-

---

(¹) Secondo F. Engel " Zur Erinnerung an C. Lie „ Lie adopera il simbolo in comunicazione epistolare fino dal 1873 (ott. 1900).

tesima di simbolo Bf, è lo stesso che affermare che da ciascuna soluzione f si deduce una nuova soluzione Bf. Se un sistema completo $A_i f = 0$ ammette la trasformazione infinitesima Bf, si può anche dire, facendo rientrare questo, sia pure in modo particolare, nel concetto sopra introdotto di « Gruppo di funzioni » che tutte le $(A_i B)$, essendo funzioni lineari delle A_i, appartengono al loro gruppo di funzioni.

Lie ricava di qui un *Calcolo con trasformazioni infinitesime*, considerando ancora soltanto sistemi completi con trasformazione infinitesime note, e dando alle equazioni, secondo la sua teoria dei gruppi di funzioni, una tal forma normale che per il sistema delle trasformazioni B_α tutte le $(B_\alpha B_\beta)$ risultino ancora funzioni lineare delle B_α. Questo sviluppo si vale dunque, e già notevolmente, di uno dei concetti fondamentali della teoria dei gruppi di trasformazioni (v. pag. 170).

Fra le trasformazioni puntuali infinitesime nello spazio delle x_i, p_i, Lie pone in rilievo una classe particolarmente importante: quella delle « trasformazioni di contatto infinitesime omogenee. « Esse hanno la proprietà di mutare funzioni omogenee rispetto alle $p_1 \ldots p_n$ in funzioni consimili, e hanno come forma canonica:

$$\delta x_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\,\delta t \qquad \delta p_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}\,\delta t$$

dove la funzione fondamentale H è una funzione qualunque delle x_i, p_i, soltanto omogenea di 1° grado nelle p_i; per mezzo di essa $\frac{\delta}{\delta t}(\Sigma p_i dx_i)$ diviene un differenziale esatto dU. Quando $(H\varphi) = 0$, ogni integrale φ dell' equazione a derivate parziali $H = \text{cost}$, è mutato dalla trasformazione H in sè stesso; così avviene quindi anche dell' equazione stessa $H = \text{cost}$, rispetto alla trasformazione φ, che h a φ come funzione fondamentale. Così si riconosce che il problema d' integrare un' equazione a derivate parziali $H = \text{cost}$, è identico a quello di trovare tutte le funzioni φ, per le quali $(H\varphi) = 0$: vale a dire di trovare tutte le trasformazioni infinitesime canoniche, che lasciano invariato H, e quindi anche il relativo sistema d' equazioni differenziali canoniche:

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \frac{\partial p_i}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}.$$

La *Teoria dell' integrazione* di questo sistema, ovvero di $H = \text{cost.}$, è pertanto identica con un problema della *teoria delle trasformazioni*, p. es. il teorema di Poisson-Jacobi si converte nella proposizione evidente, che due successive trasformazioni di contatto infinitesime danno ancora una trasformazione siffatta.

Basta ricordarsi della teoria di Hamilton e a Lie tutta questa connessione stava fin da prima dinanzi agli occhi per vedere quanta luce vien gittata di qua

anzitutto sulla meccanica. Il sistema sopra accennato d' equazioni differenziali della meccanica, che determina in pari tempo le strisce caratteristiche di $H = \text{cost.}$ ha la proprietà che le corrispoudenti traiettorie delle (x_i, p_i) vengono appunto generate dal gruppo finito ad un parametro risultante dalla ripetizione della trasformazione infinitesima di funzione fondamentale H. Determinare questo gruppo finito è semplicemente un' altro enunciato del problema di risolvere le equazioni differenziali del problema di meccanica dipendente da H; *e così l'intera Meccanica analitica è d' un solo tratto subordinata alla teoria dei Gruppi.*

Così secondo Lie anche le teorie delle *perturbazioni* richiede soltanto la riduzione di tutti i sistemi canonici d' equazioni differenziali della specie suindicata, ma con una funzione H *arbitraria*, alla stessa forma; e ciò avviene mediante trasformazioni di contatto, per le quali è $\Sigma P_i \, dX_i = c \Sigma p_i dx_i + dV$. (Archivio II 1877).

Fra le proposizioni della Meccanica, che divengono evidenti mediante la trasformazione di Lie, compaiono bensì in prima linea solo gli integrali più noti che si possono trovare altrimenti mediante traslazioni e rotazioni del sistema; quelli cioè che sono in pari tempo razionali ed interi, quindi lineari nelle p_i, e che danno luogo perciò a trasformazioni puntuali infinitesime del sistema in sè stesso; così i teoremi delle aree e gli integrali primi del centro di gravità.

Fra i numerosi risultati, che Lie ha ricavati ulteriormente da queste teorie, ricorderemo ancora l'avanzamento del problema di Pfaff (Forh. 1873). Anzitutto però ricordiamo la connessione diretta delle teorie di Lie colle considerazioni di Jacobi sui *Moltiplicatori*, la quale lo condusse ad estensioni di queste considerazioni (Forh. 1874 e vol. XI di questi *Annalen*): una connessione, che è già di per sè stessa verosimile poichè la sostanza di quelle teorie consiste nell' abbassamento degli ordini d' integrazione delle equazioni differenziali. Nella mente di Lie l' applicazione delle trasformazioni infinitesime alle teorie del Moltiplicatore precedette il riconoscimento delle semplificazioni nelle integrazioni (vol. XI degli *Annalen*). In più della teoria iniziale del 1870 e 1871 (Math. Ann. IV) risulta che per un' equazione differenziale $Ydx - Xdy = 0$ la quale ammette una trasformazione infinitesima $\delta x = \xi \delta t \cdot \delta y = \eta \delta t$ si può immediatamente assegnare un fattore integrante della forma $M = \frac{1}{X\eta - Y\xi}$, cosicchè anche l' integrazione dell' equazione ausiliaria: $\eta dx - \xi dy = 0$ sparisce (v. sopra pag. 151). Anche la così detta *nuova teoria d'integrazione* del 1874 (vol. XI, XXV ecc. degli *Annalen*) riposa oltre che sulla considerazione del problema di Pfaff, sul fatto che nei sistemi completi l' esser nota una trasformazione infinitesima è la stessa cosa che l'esser dato un integrale, e che quindi soluzioni conosciute di essi possono introdursi come nuove variabili indipendenti; e sono questi degli « Invarianti » rispetto a trasformazioni infinitesime delle equazioni. Ciò conduce a riduzione dei sistemi completi, dai quali dipende ogni problema su sistemi d' equazioni a derivate parziali.

L' applicazione di tali proposizioni alle ultime soluzioni ancora mancanti di un' equazione a derivate parziali, e lo studio della questione, se le sue teorie danno tutto quanto è possibile per ciò che riguarda la semplicità del procedi-

mento d' integrazione nel senso di Jacobi, formano la conclusione momentanea delle considerazioni di Lie in quest'indirizzo di Jacobi (partic. nel vol. XI degli Ann. Arch. I e II ecc.). Allora (nel 1877) Lie si occupò del piano d' un opera sulla teoria delle trasformazioni di contatto e le equazioni a derivate parziali del primo ordine; ma soltanto molto più tardi doveva essere realizzata quest'idea mediante le lezioni elaborate dal signor Scheffers, veramento in forma più elementare ma con idee ulteriormente sviluppate.

Se ne' suoi precedenti lavori Lie si era valso di diversi gruppi « finiti » di trasformazioni, ossia dipendenti da un numero finito di parametri, e se tutte le ricerche ultimamente discusse devono essere considerate come appartenenti al campo degli invarianti, e dei problemi di equivalenza delle espressioni differenziali di primo ordine rispetto all' intero gruppo infinito di tutte le trasformazioni di contatto, oppure a sottogruppi di questo; era venuto finalmente il tempo propizio per affrontare il problema fondamentale.

« *Costruire sistematicamente tutti i gruppi, cioè la teoria dei gruppi di trasformazione* ». Questo passo importantissimo nell' opera di Lie, paragonato da lui stesso con quello di Descartes, (Prefazione al vol. III della « Theorie der Trasformationsgruppen ») coincide d'altronde con un periodo importante della sua vita, essendosi egli fidanzato a Natale del 1873 (¹) e sposato nell'autunno del 1874 con Anna Sofia Birch, figlia d'un impiegato superiore delle dogane. In quest' inverno 1873-74 si formarono in lui i primi concetti sistematici; e nel viaggio di nozze, nel quale Lie era andato per prima cosa a Parigi per rinnovare e coltivare assiduamente i rapporti coi matematici di lì, come anche per occuparsi dei primi preparativi per una nuova edizione delle opere di Abel, a Düsseldorf, dove stette insieme con Klein e Mayer, aiutato dal primo di questi, egli trovò nell' ottobre del 1874 la prima espressione delle sue idee, esposte poi in una Nota: « Ueber Gruppen von Transformationen » (Gött. Nachr. del 3 dicembre) che ha posto le basi della teoria.

Alcuni stadi della formazione di questo sistema di idee si possono seguire anche nelle pubblicazioni di Lie; perché nell'articolo già più volte citato del volume VIII di questi *Annalen*: «Begründung einer Invarianten Theorie der Berührungstransformationen » del 5 luglio 1874, il quale presenta già una teoria particolarmente completa, dopo definito un gruppo di trasformazioni di contatto infinitesime omogenee $H_1 \ldots . H_r$ mediante le equazioni $(H_i\, H_k) = \sum_s c_{iks} H_s$ che risalgono al 1873, si trova, come aggiunta finale, non soltanto sollevata la questione di quelle proprietà d' un gruppo assegnato di questo tipo che rimangono invariate rispetto a trasformazioni di contatto omogenee, ma il risultato che « esiste un *numero limitato* di tipi di quei gruppi, e che si riserbava a lavori successivi d'esporre il significato preciso, l' esattezza e l' importanza di questa asser-

(¹) 1872 secondo F. Engel (ott. 1900).

zione ». Quest' ultima questione mette in rilievo nel modo più eloquente quello sviluppo al di là del programma di Klein, che è caratteristico per Lie.

Nella Nota del dicembre compare per la prima volta la *definizione esplicita* d'un gruppo di trasformazioni finito r^{plo} ossia dipendente da r parametri continui (o ∞^r) fra n variabili:

$$x'_j = f_j(x_1 \ldots x_n \ , \ a_1 \ldots a_r)$$

mediante equazioni funzionali fra le f_j; l'estensione a questi gruppi dei concetti fondamentali di Galois dei gruppi di sostituzioni, e sopratutto del concetto della « similitudine » (isomorfismo) e, poichè tutti i gruppi simili, cioè trasformabili l'uno nell' altro, vengono considerati come equivalenti e riuniti in un tipo, si presenta la quistione del numero di tipi essenzialmente distinti. Per lo studio di tale quistione — mentre si aggiunge come assioma l'esistenza nel gruppo e nel campo di variabilità dei parametri della trasformazione identica e di trasformazioni a 2 a 2 inverse vengono considerate come operazioni generatrici del gruppo le sue ∞^{r-1} trasformazioni infinitesime:

$$\delta x_j = X_{ij} \, \delta t \qquad (i = 1, \ldots r \ ; \ j = 1, \ldots n)$$

(coi simboli $X_i f$) e (ciò che poi divenne il primo teorema fondamentale della teoria) vengono costruite le equazioni differenziali che esprimono le $\frac{\partial f_j}{\partial a_i}$ come funzioni lineari delle X_{ij} e viceversa. La parte fondamentale della ricerca è costituita dalle conseguenti condizioni d' integrabilità (secondo teorema fondamentale della teoria):

$$X_i(X_k f) - X_k(X_i f) \equiv (X_i X_k) f = \Sigma c_{iks} X_s f$$

dove le c_{iks} sono numeri costanti: equazioni lineari a derivate parziali che X_{ij} come funzioni delle x devono soddisfare e che sono le equazioni di definizione delle trasformazioni infinitesime del gruppo. La discussione ulteriore di questi numeri c_{ikj}, che determinano la composizione del gruppo, e che d'altronde si connettono soltanto ai termini di II ordine delle trasformazioni infinitesime, non viene qui ancora data; ma soltanto ne vengono enunciati i risultati principali per $n = 1$ e $n = 2$, nell' ipotesi di espressioni $X_i f$ ridotte a una speciale forma normale, ma con estensione della ricerca alle trasformazioni di contatto; dunque tutti i gruppi della retta (punteggiata) e come tali si trova soltanto il gruppo ∞^3 delle sostituzioni lineari fratte coi suoi sottogruppi; e per tutti i gruppi del piano: trasformazioni circolari, collineazioni, ecc. Viene riconosciuta anche l' importanza di questa teoria dei tipi, per $n = 2$ per la teoria delle equazioni differenziali fra due variabili, d' ordine superiore al I: facendo rientrare una data equazione di tal natura in uno dei tipi già noti, deve appunto trovarsi se e quale gruppo essa ammette, e così essa può venire classificata in base al gruppo.

Per poter trattare della sua nuova teoria dei gruppi e delle applicazioni che aveva in vista più diffusamente di quel che non fosse possibile nei Forh. della Società delle Scienze di Christiania, colla quale egli si trovava inoltre in rapporto un pò tesi, Lie in unione con alcuni naturalisti fondò nel 1876 un periodico proprio: « Archiv for Mathematik og Naturvidenskab » e quì si trovano le prime relazioni de' suoi lavori in lingua tedesca, ma scritte in modo assai meno facilmente leggibile, che non le esposizioni più sistematiche comparse in questi *Annalen*. Così appunto per la teoria generale dei gruppi il riassunto dato nel vol. XVI dei Math. Ann. del dic. 1879 forma *l'introduzione* più semplice e più atta a fornirne un' idea generale; e dà nello stesso tempo tutti i gruppi della retta e del piano, mentre per vero le cinque pubblicazioni contenute nei vol. I-IV dell' Archivio (1876-1879) mettono meglio in rilievo alcuni concetti fondamentali. Solo la ricerca ripresa nel 1885 nel volume X raggiunge nella sua seconda parte, già redatta coll' aiuto di F. Engel, il grado di chiarezza del lavoro di questi *Annalen*.

Nel loro insieme questi lavori presentano una quantità di nuove idee fondamentali per la teoria dei gruppi. La più importante è che, mediante la Nota « Identità di Jacobi » applicata a tre qualunque trasformazioni infinitesime del gruppo, vengono formate *relazioni quadratiche* fra i numeri c_{iks} indicanti la struttura del gruppo; e che (come terzo teorema fondamentale, e principale strumento analitico nella trattazione delle teorie dei gruppi) queste relazioni collegate colle equazioni $c_{kis} = -c_{iks}$ vengono riconosciute anche come sufficienti perchè le r trasformazioni infinitesime, supposte indipendenti, generino veramente un determinato gruppo ∞^r. La dimostrazione è data dapprima col far rientrare il gruppo fra i già citati « *gruppi di funzioni* » (Arch. I) ma più generalmente (Arch. II) colla formazione diretta d' un gruppo di trasformazioni infinitesime aventi per coefficienti delle funzioni *lineari* di $r' \leq r$ parametri, il quale è isomorfo al gruppo cercato e può d'altronde anche ampliarsi diventando un gruppo, lineare ad r paramatri. È quello il gruppo designato ancora nel 1884 (Forh.) col nome speciale di «gruppo aggiunto»: lo sviluppo equivale a considerare l'insieme di tutte le ∞^{r-1} trasformazioni infinitesime $\Sigma e_i B_i f$ d' un gruppo finito come una varietà lineare di punti R_{r-1}, la quale per effetto di tutte le trasformazioni del gruppo finito subisce soltanto trasformazioni lineari, appunto quelle del gruppo aggiunto. Questa è la vera « concezione fondamentale » di Lie (vol. XXV di questi *Annalen*); e col suo mezzo, essendo noti gli enti geometrici che rimangono invariati rispetto a trasformazioni proiettive di spazi piani, si riconoscono nel modo più intuitivo le proprietà di struttura e i criterii di similitudine dei gruppi corrispondenti a date c_{iks}.

Accenneremo ancora esplicitamente ad un ulteriore strumento di cui è fatto uso in questi lavori: alla divisione cioè delle trasformazioni infinitesime in « ordini » secondo il grado minimo dei termini del relativo sviluppo in serie di potenze nell' intorno d'un punto arbitrario, e da ciò dipende anche il comportamento testè accennato rispetto al gruppo aggiunto. Su questo si basano principalmente la forma canonica di quelle trasformazioni, la determinazione dei vari tipi per $n = 2$, mentre la determinazione di tutti i tipi pel nostro spazio, ossia

per $n = 3$, in sostanza era allora già fatta da Lie, ma fu esposta solo molto più tardi (vol. III dei « Transformationsgruppen » 1893) coll' aiuto dei metodi semplificati, e inoltre la determinazione di sistemi di curve (ovvero di equazioni differenziali) che rimangono invarianti rispetto a date trasformazioni infinitesime. Come risultato generale attinente a questo punto (Arch. III) rileveremo che per l' R_n il gruppo lineare più generale, insieme ad alcuni suoi sottogruppi, è l'unico gruppo che ha nel campo infinitesimo la massima transitività possibile; o che permette cioè di mutare ogni elemento passante per un punto generico in ogni altro elemento passante per questo punto. In complesso si può dire che in questo periodo la soluzione ultima di tutti i problemi gruppali si riduce sempre all' integrazione d' equazioni ordinarie ai differenziali totali completamente integrabili.

Mentre le condizioni esteriori di Lie all' Università di Christiania incominciarono in quest' epoca a migliorare, l'accoglienza de' suoi lavori astratti da parte dei matematici lo soddisfaceva sempre meno. Come per distrarsi nel 1877 si rivolse di nuovo al campo delle ricerchè geometriche delle quali si era occupato nel 1870-71; e cioè *alle proprietà di curvatura delle superficie*, per poter ora, accanto a puri calcoli sopra gruppi e alla redazione di precedenti lavori, e particolarmente della pubblicazione delle opere di Abel intrapresa con Sylow e finita nel 1881, compenetrare durante alcuni anni ancora questo campo colle sue idee « sintetiche » e gruppali. Ciò che per Lie divenne qui lavoro di ricreazione, era però troppo consono alle sue intime facoltà e troppo corrispondeva all'alto concetto che egli aveva delle applicazioni e che gli servian sempre da filo direttivo malgrado l' inclinazione del suo spirito verso le questioni più generali, perchè non dovesse riuscire ad arricchire di nuovo e brillantemente questo campo. E per vero fu appunto la continuazione delle sue precedenti ricerche sul complesso tetraedrale e sul complesso di rette minime che lo condusse ai più bei risultati nella teoria delle superficie d'area minima e delle superficie di traslazione.

Quando si considera un complesso di rette incontrante una curva fissa all' infinito il gruppo che trasforma in sè quel complesso viene a contenere tutte le traslazioni; e Lie genera allora, partendo dalle curve del complesso, delle superficie di traslazione, collo spostare una qualunque di queste curve congruentemente a sè stessa e in guisa tale, che uno de' suoi punti descriva parimenti una curva del complesso, applicando cioè a quella curva una schiera semplicemente infinita di traslazioni, che non formano però in generale un gruppo. La superficie però contiene allora due schiere semplicemente infinite di curve del complesso, sicchè per ciascun punto passano due di queste curve, le cui direzioni sono armoniche rispetto alle tangenti principali della superficie in quel punto: (v. sopra pag. 150, 151, 152, 153, 156—157). Il caso particolare in cui le tangenti principali sono perpendicolari conduce alle superficie d'area minima più generali; un altro caso particolare, quello in cui le schiere di curve formano un unico sistema irriducibile dà «superficie doppie» (secondo l'espressione di Klein),

« unilatere » sulle quali si può passare in modo continuo da una faccia all'altra, e delle quali ha trattato per primo Moebius.

Il merito di Lie è d'avere, con questi mezzi geometrici, concepito in modo intuitivo tanto l'antica teoria analitica di Monge, quanto anche le formole di Weierstrass sulle superficie d'area minima, la cui interpretazione coincide in sostanza con quella delle equazioni di Monge (Arch. II) e anzi senza nemmeno più limitarsi ai punti reali di queste superficie. Di queste egli considera principalmente le generalizzazioni *proiettive*, tanto algebriche che trascendenti; e fra le superficie trascendenti quelle periodiche, cioè quelle che ammettono una traslazione d'ampiezza finita. Per le superficie *algebriche* di questo tipo si presenta qui una questione che era d'altronde poco confacente a Lie, cioè una questione *numerativa*, per trovare confini inferiori delle classi e degli ordini di quelle superficie, e anzi non solo in connessione alle sue costruzioni, ma anche in vista delle eliminazioni negli sviluppi in serie relativi a punti singolari. Così egli ottiene, p. es., tutte le superficie minime reali algebriche (superficie unilatere), la cui classe è un numero primo; e sopratutto una serie di generalizzazioni di proposizioni, che poco prima erano state comunicate da altra parte (v. oltre ad Arch. II, IV e VII, specialmente ancora i lavori scritti in modo leggibile nei vol. XIV e XV di questi *Annalen*), come pure sinteticamente nuove generazioni di tali superficie (Arch. III a.). Però rimane sempre degna di nota la libera padronanza degli imaginarii anche nelle considerazioni di geometria differenziale, stato fino allora famigliare ai geometri solo per enti algebrici. Accenneremo brevemente anche a questo, che Lie in alcune Note posteriori (v. particolarmente i Rendic. della Soc. Sassone delle Scienze del 1896), coordinò a questo campo delle superficie di traslazione, anzi di quelle generate in più di due modi per mezzo di tralazioni, e addirittura alle loro estensioni al caso di p dimensioni, i teoremi d'addizione degli integrali di funzioni algebriche, poichè questi teoremi danno gruppi di trasformazioni algebriche permutabili; e anzi nella forma canonica di traslazioni. Lie aveva sperato di procurarsi in tal guisa non solo una nuova applicazione geometrica del teorema di Abel, ma anche una via atta a ricerche nel campo della teoria delle funzioni.

Più strettamente legate alle questioni gruppali, come applicazione speciale, è la serie successiva di lavori geometrici di Lie. Essi si riferiscono a classi di superficie che ammettono gruppi di trasformazioni infinitesime relative a una loro specie di curve p. es. alle loro geodetiche; le superficie, ampiamente studiate nella letteratura italiana e francese a curvatura totale o media costante, ecc. Sempre si cercano queste stesse classi di tali superficie e metodi razionali d'integrazione per ottenere i loro speciali sistemi di curve; cioè certe equazioni differenziali del 2° ordine, e le loro trasformazioni di contatto. Un lavoro diretto a questo scopo: « Classification der Flächen nach der Transformationsgruppe ihrer geodätischen Curven » comparve nel 1870 come programma universitario di Christiania e fu riprodotto sostanzialmente nel vol. XX di questi *Annalen*; e Lie pensava già di trattare e trasformare l'uno nell'altro, in base ad analoghi principi, anche i problemi della meccanica, come in lavori recenti è già avvenuto in parte, p. es. per problemi del giroscopio. Uno dei più eleganti fra que-

sti risultati speciali venne comunicato in una Nota (Arch. VIII) nel 1882, nella quale sono determinate tutte le superficie con trasformazioni lineari infinitesime in sè stesse; che cioè rette e sfera sono i soli enti del nostro spazio, che per effetto di tutti i movimenti e similitudini assumono precisamente ∞^4 posizioni di verse dunque una proprietà caratteristica della geometria delle rette e delle sfere.

L' importanza di questa serie di lavori consiste però meno nei nuovi risultati che non in ciò che essi ricondussero Lie nella direzione delle sue idee fondamentali, dalla quale anche ora dovevano sorgere idee nuove e comprensive: sugli *invarianti differenziali*, o sulle equazioni differenziali con trasformazioni in sè, e sui *gruppi infiniti*.

Come fu prima accennato, Lie già nelle sue Note-Programma del 1872 (Forh.) e nella Nota del dicembre 1874 (Gött. Nachr.) aveva in parte sviluppati e in parte presentiti in forma indeterminata alcuni concetti sulla classificazione delle *Equazioni differenziali*, sulla loro riduzione a forme normali; e sopra *espressioni* invariantive rispetto a certi gruppi di trasformazione formati colle variabili e (allora soltanto) colle loro derivate prime; in particolare invariantive rispetto al gruppo di tutte le trasformazioni di contatto; e solo più tardi li aveva interpretati nel senso degli invarianti differenziali, senza che fino allora egli vi fosse tornato sopra diffusamente. E invero nel frattempo il problema di sviluppare il concetto di gruppo, per sè stesso, si era imposto a lui. Adesso in occasione di un più lungo studio sul comportamento di espressioni geometriche differenziali del 2° ordine rispetto a trasformazioni, egli riconobbe in modo sempre più chiaro che i suoi concetti sulle espressioni invariantive devono ammettere ancora un' ampia estensione. Intanto però il problema era stato portato molto innanzi da altra parte, benchè in un campo più ristretto: Halphen e Laguerre si erano rivolti rispettivamente dal 1875 e dal 1879 alla teoria degli invarianti differenziali per il gruppo finito *proiettivo* del piano e nella teoria delle equazioni differenziali lineari omogenee di n^{imo} ordine per il gruppo infinito $x_1 = F(x)$, $y_1 = y\,\Phi(x)$, con funzioni arbitrarie $F(x)$, $\Phi(x)$, mentre prima erano noti solo alcuni singoli fra questi invarianti, (p. e. l' Espressione di Riemann-Schwarz). In particolare Halphen aveva già pubblicata in alcuni grossi lavori la sua teoria, che in lavori anteriori s'era valso soltanto delle osservazioni sulle curve W (1876-1880); e l'aveva anzi portata sino ai problemi della formazione dei sistemi d' invarianti differenziali (nel senso della dipendenza razionale), mentre il suo lavoro più importante e premiato nel 1880 comparve solo nel 1883.

Non può esser dubbio che il Lie ebbe da ciò un potente impulso; egli vide nell' estate del 1882 che gli invarianti differenziali si possono determinare in generale come soluzioni d'un sistema completo (Arch. VII pag. 192—giugno 1882): che inoltre le equazioni differenziali ausiliarie del 1° ordine, che dipendono soltanto dal gruppo, hanno ancora speciali attributi, cosicchè una certa fra esse può ricondursi a un' equazione di Riccati (precisamente quella che corrisponde ad un sistema invariante di curve, incontranti ∞^1 rette del piano secondo punteggiate proiettive): e che la classificazione di Laguerre si poteva far rien-

trare nella sua teoria dei gruppi (Forh. 1882 — N. 21, 22 dell' Ott. e primo Novembre 1882).

Con queste riflessioni Lie (con un sussidio dell' università) si recò nell' ottobre 1882, passando per Lipsia e la Svizzera, a Parigi, e tenne là il 3 novembre una conferenza sulle sue teorie d' integrazione del 1874 (di sistemi completi con note trasformazioni infinitesime). E quando nella discussione Halphen accennò alle relazioni di questi concetti co' suoi lavori sugli invarianti differenziali del gruppo poiettivo generale, e colla trasformazione d'una serie di corrispondenti equazioni in equazioni lineari di ordine inferiore (cf. Lie Ann. XXV), ciò agì in modo eccitante su Lie: egli asserì che i *suoi* principii comprendevano il caso di Halphen e potevano estendersi a *tutti* i gruppi finiti. — Ancora in Parigi egli calcolò per tutti i suoi gruppi del piano i corrispondenti invarianti differenziali e diede la teoria dell' integrazione di ciascuna della equazioni differenziali risultanti dall'annullare uno di questi invarianti.—Ma il progresso a cui le osservazioni di Halphen avevano condotto Lie, consiste in ciò che ora, valendosi delle equazioni *finite* del gruppo, le equazioni ausiliarie si riducono in generale ad equazioni differenziali *lineari* omogenee fra *due* variabili. L'origine degli invarianti differenziali dall' estensione delle trasformazioni infinitesime alle derivate di ordine superiore, il modo di formarli per *ogni* gruppo, la riduzione del problema dell' equivalenza a queste espressioni, e più generalmente l' intero edificio della teoria invariantiva lineare, la quale in un senso speciale, vale a dire quando coll' introduzione d' un numero sufficiente di variabili si sostituisce il gruppo proposto con un gruppo simile di sostituzioni lineari, comprende già una parte assai grande della teoria generale dei gruppi, si presentava ormai agli occhi della sua mente come già estesa a tutti i gruppi finiti Già nel dicembre 1882 Lie pubblicò nel vol. VII dell' Archivio un breve programma di quest' indirizzo; gli sviluppi li diede poi nei Forh. del 1883 e nella Nota: « Classification und Integration der gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten » Archiv. del 1883 ed 84 (ristampata nel 1888 vol. XXXII di questi *Annalen*). Tutti i problemi precedenti come la ricerca del gruppo d' una data equazione, la riduzione a una forma canonica nel caso di un gruppo noto, appaiono già sotto la luce più viva degli invarianti differenziali, e si presentano perciò sotto forma più plastica e chiara.

Ma non è soltanto a questo lato fondamentale delle nuove vedute che qui deve accennarsi. Lie stesso ha richiamata sovente l'attenzione su questo fatto — e in un bello studio sull' importanza di Galois nel: « Centenaire de l'École Normale, Paris 1895 » nel quale parla diffusamente su' suoi proprii intenti, egli si soffermò con insistenza su questo punto — quale grande analogia passi fra i suoi problemi nella teoria delle *equazioni differenziali* e quelli di Abel e Galois nella Teoria delle *Equazioni algebriche*.

E in vero non si può disconoscere quest' analogia per quel che riguarda le equazioni abeliane: alle equazioni funzionali che legano in queste equazioni una radice alle rimanenti, corrispondono prima le trasformazioni lineari permutabili le quali mutano in sè stessi gli integrali delle equazioni differenziali che condu-

cono a curve W (1870): e poi le trasformazioni d'un gruppo che può essere ammesso comunque da un equazione differenziale. Ed anche il punto di vista di Galois, che fonda il problema della risoluzione di un'equazione sulle ricerche relative al suo gruppo e alla struttura di questo, trova il suo riscontro nel punto di vista di Lie sulle equazioni differenziali; e tanto più, in quanto risultò sempre meglio che sono specialmente le equazioni differenziali, fra le cui soluzioni particolari esistono relazioni costanti, oppure delle quali si può dedurre l'integrale generale da certe soluzioni fondamentali, quelle che ammettono, appunto in virtù di queste proprietà, particolari gruppi di trasformazioni (gruppo di razionalità, non gruppo monodromico): gruppi la cui costruzione coincide colla determinazione della struttura degli integrali di quelle equazioni e la cui riduzione a sottogruppi per mezzo dell'aggiunzione di nuove equazioni, include qui come lì il problema della risoluzione. Non deve dunque far meraviglia che Lie stesso abbia insistito sempre più su questo punto di vista di Galois e si sia considerato come il vero erede delle idee di Galois. Non dimentichiamo però che, se l'analogia con Lagrange-Abel è completa, quella con Galois non sussiste assolutamente; così vi sono equazioni differenziali riconducibili a quadrature — come quelle delle linee geodetiche d'un ellissoide e d'altre specie di superficie — per le quali non esiste alcuna proprietà gruppale, come intimo fondamento della riduzione, mentre in vece la teoria di Galois rimane esauriente anche per le equazioni algebriche più speciali. Lie soleva lasciar da parte senz'altro tali equazioni come « conducenti ad operazioni eseguibili » e come « triviali ».

Anche in un'altra direzione si consolidarono le idee di Lie in quest'epoca, rimarchevole per la sua produzione, e manifestamente del pari in virtù dell'impulso che i lavori di Halphen-Laguerre gli avevano dato, nel senso cioè dei gruppi continui *infiniti* e dei loro *invarianti differenziali*. Mentre sin qui anche per Lie (a differenza di ciò che si potrebbe arguire dalla prefazione al III volume dell'opera sulle trasformazioni) il concetto « gruppo » indicava soltanto ogni insieme di trasformazioni tali che due di queste applicate successivamenie dessero ancora una trasformazione della schiera, ora egli restringe esplicitamente per la prima volta quel concetto (Forh. 1883: « Uber unendliche continuirliche Gruppen » vale a dire su gruppi dipendenti da funzioni arbitrarie) nel senso che le trasformazioni infinitesime della schiera devono sodisfare un sistema d'equazioni lineari a derivate parziali equivalente alle: « equazioni di definizione » d'un gruppo finito. E con questa restrizione egli riesce a costruire anche per questi gruppi più ampi, che, secondo i suoi intendimenti, devono acquistare per le teorie delle trasformazioni delle equazioni differenziali un'importanza ancora maggiore dei gruppi finiti, una teoria affatto simile a quella di questi ultimi, e della quale citeremo questo solo risultato: che delle equazioni differenziali ordinarie soltanto quelle di primo ordine, nessuna di ordine superiore, ammette un tal gruppo. Anche su di ciò questi *Annalen* (« Ueber Differentialinvarianten » XXIV, 1884) hanno presentata un'esposizione riassuntiva delle prime ricerche di Lie, mentre le ricerche ulteriori sono esposte principalmente nelle pubblicazioni della Soc. Sassone delle Scienze. Quanto sia esteso questo campo si desume da ciò che vi si può far rientrare p. e. l'intera teoria Gaus-

siana della curvatura come teoria degli invarianti differenziali di tutte le flessioni, vale a dire delle trasformazioni puntuali, che lasciano invariato l'elemento lineare della superficie; e da questo punto di vista essa fu trattata da Lie.

Noi abbiamo seguita l'opera e la vita di Lie sino all'anno 1884, che è il punto culminante del suo sviluppo. A partire di qui fu sua cura principale d'elaborare in modo conseguente il grande materiale di idee e di formare con esso un edificio duraturo. che permettesse in pari tempo di gettare lo sguardo a tutti i campi della scienza; come anche di sviluppare ulteriormente alcune singole idee. Dapprima Lie aveva progettata un' opera sui gruppi di trasformazioni che doveva riunire in pari tempo in un solo volume la teoria dei gruppi continui finiti ed infiniti colle loro teorie invariantive; ma ad affrontare la cosa si potè pensare solo dopo che il signor F. Engel indotto dai Sigg. Klein e Mayer, si fu dichiarato pronto ad aiutar Lie, e questi ne ebbe accettata l' offerta con ambo le mani. Nei nove mesi (Sett. 1884—Estate 1885) che Engel passò a Christiania nacquero già, in un primo abbozzo, parecchi capitoli di quest' opera. Per la continuazione però ebbe importanza un cambiamento avvenuto poco dopo nella vita esteriore di Lie, cioè il suo passaggio in Germania; da un lato per la spinta che ricevette l' opera sui continui rapporti personali di Lie colla persona che elaborava i risultati, d' altro lato per lo svantaggio dei gravi impegni che la nuova posizione implicava.

Lie fu chiamato all'Università di Lipsia come successore di Klein, e accettò l' offerta. Colla sua famiglia, che negli anni 1877-84 s'era accresciuta di due figlie e d'un figlio, egli fece il suo trasloco nella primavera del 1886 per dedicare per oltre dodici anni la sua attività ad un'università tedesca. Le nuove circostanze ed esigenze. cui egli non era assuefatto, non potevano a meno di creare a lui straniero, il quale era inoltre d' indole pronunciata, di natura originariamente retta ed aperta, e rappresentante d' un particolare indirizzo, che per imporsi richiedeva nuove e vaste organizzazioni dell' insegnamento, una serie di difficoltà e di fatiche, che si potevano superare soltanto con grande energia e piena fiducia in sè stesso. Ma in Lie, almeno fin tanto che egli si sentì fisicamente bene — queste qualità erano sviluppate in sommo grado e così gli riuscì di rendere sempre più elevata la serie delle sue lezioni, e di procurarsi una schiera di uditori valenti, dei quali ora un gran numero, Tedeschi e Stranieri, lavorano nella teoria dei Gruppi o nelle sue applicazioni come eminenti investigatori. Questa attività fu interrotta soltanto nell'anno 1889-90 quando in lui, in apparrenza imperturbabile e senza posa produttivo, i nervi vennero meno per eccessivo lavoro ed insonnia; forse anche in seguito a predisposizione egli cadde allora in una profonda depressione, dalla quale però assurse presto di nuovo alla sua piena forza creatrice, ma dalla quale gli rimase nell' umore un' esagerazione della fiducia in sè stesso ed una diffidenza verso gli altri. Prove della rinnovata attività didattica di Lie sono, oltre ai lavori della sua scuola, i tre corsi pubblicati dal signor G. Scheffers dopo il 1890, che sono assai appropriati all'introduzione nella teoria dei gruppi di Lie, delle equazioni differenziali con trasformazioni infinitesime, e della geometria delle trasformazioni di contatto, pur

troppo non ancora nella teoria degli invarianti differenziali e nella teoria generale dell' integrazione considerata sempre da Lie come conclusione.

In tali condizioni, e in mezzo alle gravissime difficoltà presentate, come risultò a poco a poco dall' ordinamento sistematico delle idee di Lie, l' opera fondamentale «Theorie der Transformationsgruppen» procedette assai più lentamente di quanto si era preveduto a Christiania. Si trattava per prima cosa di dare alla materia un fondamento più rigoroso, fondamento che Lie trovò nel campo della teoria delle funzioni, senza però che fosse tolta la restrizione della validità per una regione limitata; e sopratutto occorreva apparecchiarsi tanto un abbozzo del tutto nelle sue linee generali, quanto un' elaborazione dei dettagli, mentre Lie aveva date soltanto le pietre spesso non dirozzate. Del resto in quest' opera sono utilizzate anche una serie di idee recenti di Lie; p. es. quella del «gruppo parametrico», del gruppo ∞^r fra gli r parametri dello stesso gruppo di trasformazioni che risulta dalla legge associativa delle operazioni, e ha parte nella ricerca di tutti i gruppi isomorfi ad un gruppo dato, una via intrapresa da Lie anche nel 1884 (Forh.), e che più tardi diede luogo a un' ampia letteratura nel problema fondamentale nella teoria dei gruppi, cioè nella teoria della composizione. Così nelle mani dell' accurato elaboratore l'opera, il cui scopo è di dare i *fondamenti* della teoria sino alle applicazioni, crebbe a poco a poco sino a comporsi di tre grossi volumi pubblicati negli anni 1888-93; un' opera veramente originale dal principio alla fine, che mantiene il suo carattere d' opera indipendente al punto di non voler ammettere alcuna influenza di lavori altrui sugli sviluppi in esso contenuti.

Nella sua forma assai astratta essa lascia d' altronde piuttosto in seconda linea, la via sintetica per cui si sono formate le idee di Lie eccettuato forse il II volume che sin da principio fu disposto in tal guisa da essere per quanto possibile, intelligibilo di per sè. Resta da rimpiagere che non abbia potuto essere trattata più diffusamente la teoria degli invarianti differenziali, nè comunque toccata quella dei gruppi infiniti, e che le intenzioni di Lie in questo senso riguardo ad un' opera sistematica più ampia siano finite in niente.

Del periodo di tempo passato a Lipsia, fra le *Applicazioni della Teoria dei Gruppi* ne emerge in particolare una, che del resto ha trovato anche il suo posto nel vol. III dell' opera sulle trasformazioni: l'applicazione al «Problema dello spazio di Riemann-Helmholtz» cioè ai fondamenti della geometria. Richiamata già presto, da Klein e dal suo Programma, l' attenzioni di Lie sul lato gruppale del problema, ed in particolare sull' importanza dell' «assioma sulla Monodromia» di Helmholtz, Lie stesso andava riflettendo su tali quistioni sin dal 1880 per poi entrare in campo colla sua opinione in occasione della riunione de' Naturalisti a Berlino (1880). La concezione stessa di Helmholtz, era stata cosa sommamente rimarchevole per il 1868, ma senza che il grande investigatore lo sapesse, una concezione gruppale: poichè aveva cercato di caratterizzare i gruppi degli ∞^6 movimenti dello spazio, che conducono alle tre geometrie, rispetto a tutti gli altri gruppi: e ciò mediante la libera mobilità (entro una regione limitata, come aggiunse Lie) dei corpi rigidi, dunque mediante l'esistenza

d'un invariante fra due punti qualunque come unico invariante essenziale. E Lie, affrontando questo problema essenzialmente come problema gruppale, riconobbe a tutta prima per il nostro spazio la superfluità di quella parte dell'assioma della monodromia, che credeva doversi aggiungere alla libera mobilità attorno ad un asse (con *un* grado di libertà) esplicitamente come postulato, la periodicità; ma sopratutto, oltre ad una soluzione completa del problema nel senso di Helmholtz, egli ne diede una seconda ancor più intima, che si vale soltanto dei concetti di punto, elemento lineare, elemento superficiale, fa ipotesi sulla transitività dei movimenti soltanto pel campo infinitesimo, e migliorava con ciò anche le considerazioni differenziali di Helmholtz. A questa serie di ricerche appartiene anche lo studio di Lie intorno ai gruppi, che lasciano invariata un' espressione differenziale quadratica (ibidem), come contributo alle basi della Memoria di Riemann.

Il valore di queste ricerche, le quali naturalmente procedono solo parallelamente alle considerazioni di Riemann, Lipschitz ecc. consiste principalmente in ciò, che permettono di scegliere per ogni gradino della geometria l'opportuno sistema di assiomi; e così giustamente riportarono nel 1887 (v. il giudizio citato nella nota a pag. 1, vol. 50° degli *Ann.*) il primo premio Lobatschewsky conferito dalla Società di Kasan.

Lie andava quasi più superbo di queste applicazioni, e delle applicazioni in genere, che della sua grande opera nei gruppi; per lui invero il concetto di gruppo e di invariante era non solo un punto di vista metodico dal quale voleva rimaneggiare ex novo nella sua mente tutta la parte antica della matematica, ma anche l'elemento che doveva a poco a poco compenetrare tutta la scienza matematica e riunirla unificandola. Così gli procurò — profonda soddisfazione il fatto che, dopo il 1880, il concetto di gruppo continuo, e con riferimento a lui stesso fu posto a base, nella teoria dei sistemi di numeri complessi per parte di Poincarè e di matematici tedeschi che stavano vicini a Lie stesso, e nelle ricerche di teoria delle funzioni sulle equazioni differenziali lineari, per parte di matematici francesi. Nel primo campo pose mano anche Lie, accennando occasionalmente all'esistenza di sistemi di numeri irriducibili (« Ueber irreductibele Berührungstrasformationsgruppen » Sächs. Ber. 1889). Ma il campo della teoria delle funzioni, coll'uso di continuazioni analitiche e pur ancora il campo algebrico, e in particolare aritmetico con dato campo di razionalità, stanno fuori della sfera di produzione di Lie. Tutto il suo pensiero, tutta la sua scienza stavano lungi da quell' indirizzo, che, coltivato da grandi investigatori si è elevato continuamente come « Matematica di precisione » nel corso di questo secolo, ed alla fine del secolo sembra quasi essere l' unico dominante; appunto in opposizione a questo indirizzo sta Lie, quasi additando indietro verso i primitivi classici della geometria infinitesimale e proiettiva; come testimonio vivente, che anche le idee di questi ultimi, sotto l' influsso d' un genio creatore il quale riunisca ambedue le geometrie, possono divenire feconde e giungere a sviluppi nuovi imprevedibili, e per il contenuto e per la portata:

Se si vuol delineare la vera estensione della produzione di Lie, con una sola parola che racchiuda tanto il suo indirizzo delle trasformazioni e degli in-

varianti, quanto le sue ricerche geometriche, basta nominare il suo vero e ultimo scopo; l'integrazione delle equazioni differenziali.

E se sarà riservato all'avvenire, far valere le idee di Lie anche nei campi da lui più lontani, è tuttavia indubitato che queste idee non possono costituire di per sè il punto cardinale d'ogni ricerca, ma soltanto comprendere una parte delle speculazioni matematiche. Esse agiranno in modo tanto più stimolante, quanto più noi impareremo a considerarle soltanto come *strumento* di ricerca sia analitica che geometrica. L'opera di Lie sulle trasformazioni, per sè stessa, potrà perdere d'importanza nei suoi fondamenti e nella sua disposizione, nelle forma analitica e dal lato critico, e pel trascorrere del tempo e pel progredire della scienza e Lie stesso ha da allora in qua corretta la trama del I volume (Sächs. Ber. del 1890); ma le combinazioni di concetti di Lie che costituiscono la più profonda base di quell'opera, nella loro comprensiva semplicità, e nella loro mobilità; l'aver concepite geometricamente le teorie delle trasformazioni e degli invarianti colla loro libertà illimitata nella scelta dell'elemento dello spazio; questi sono i caratteri che conserveranno sempre la loro forza creatrice ed ordinatrice, le loro proprietà atte a porre e risolvere problemi, la loro compenetrazione «sintetica» della scienza, la possibilità di ricavare dell'argomento stesso, per ogni caso da sott'ordinarsi a quel campo, la formola analitica appropriata. Perchè se la forza della produzione di Lie proviene dalla straordinaria concentrazione del suo pensiero, dall'estendersi di questo tutto all'intorno partendo da un unico punto, in una misura tale che potrebbe fare l'impressione d'una unilateralità portata all'estremo, tuttavia la forza della sua *influenza* riposa sopra un'eminente facoltà d'astrazione e di generalizzazione congiunta con quella concentrazione — una capacità che denota il vero spirito matematico, in quanto le sue speculazioni, benchè puramente astratte, possono venire immediatamente rivestite sotto forma analitica.

Nell'anno 1898 Lie ritornò nella sua patria, la Norvegia, nella cui vigorosa natura, egli robusto camminatore aveva così spesso rinfrescato corpo e mente, e per la quale il suo cuore battava forte, come per la sua famiglia e la sua scienza. Dopo che a Christiania fu di nuovo istituita per lui una cattedra universitaria con onorifiche condizioni egli vi si trasferì nel settembre. Ma le sue forze fisiche erano disfatte, e già attorno a Natale si ebbero sintomi della prossima fine inevitabile. Il 18 febbraio Lie soggiacque ad un'anemia perniciosa. Con lui scomparve il rappresentante più originale e più produttivo della scienza geometrica degli ultimi tre decenni di questo secolo.

Erlangen, settembre 1899.

ERRATA-CORRIGE. — A *Pag.* 107 — linea 3 — *In luogo di* MNEOMONICO *si legga* MNEMONICO.

SU ALCUNI SISTEMI RAZIONALI DI TRASFORMAZIONI CREMONIANE

NOTA

DI

DOMENICO MONTESANO

È possibile che due piani siano riferiti fra di loro con un sistema semplicemente infinito e continuo di corrispondenze cremoniane le quali ad un punto dell'un piano facciano corrispondere nell'altro i singoli punti di una curva razionale.

Nella presente Nota, dopo aver dimostrato che lo studio di siffatti sistemi può farsi dipendere da quello delle corrispondenze birazionali dello spazio, nelle quali si corrispondono i piani di due fasci, costruisco i sistemi di corrispondenze dei primi due ordini ed i sistemi formati da corrispondenze *isologiche* [1] di ordine arbitrario, nelle quali due fasci di raggi assegnati si corrispondono con la medesima proiettività.

I.

Si supponga che fra due stelle di raggi (P), (P') intercedano ∞^1 corrispondenze cremoniane di ordine m nelle quali ad un raggio generico della prima (o della seconda) stella corrispondano nell'altra i singoli raggi di un cono razionale di ordine n' ($o\,n$). Si indichi con Σ il sistema di tali corrispondenze.

Si assegnino nello spazio due fasci di piani proiettivi (k), (k'), che non appartengano alle stelle (P), (P'), e si coordinino proiettivamente le corrispondenze del sistema Σ alle coppie di piani omologhi di tali fasci. Quindi si riguardino corrispondenti due punti A, A' dello spazio che siano su due piani omologhi α, α' dei fasci dati, e su due raggi omologhi a, a' di quella corrispondenza del sistema Σ che è coordinata alla coppia ($\alpha\,\alpha'$).

---

[1] Chiamerò *isologiche* le reti di curve $c_x \equiv O^{x-1}, 2(x-1)P$ e dirò *isologiche* le trasformazioni birazionali piane (comunemente dette di *De Jonquières*) connesse a tali reti.

La corrispondenza che ne risulta fra i punti A,A′ dello spazio, è birazionale.

Quando il punto A è sulla retta k, il piano α riesce indeterminato, onde al punto A corrispondono gli ∞^1 punti A′ in cui i raggi a' che nelle corrispondenze del sistema Σ corrispondono alla retta $a \equiv PA$, segano i singoli piani α' del fascio (k') coordinati a tali corrispondenze, cioè al punto A corrispondono i punti A′ di una curva di ordine $n'+1$ che ha n' punti sulla retta k'.

Così ad un punto A′ della retta k' corrispondono i punti di una curva di ordine $n+1$ che ha per segante $n-$pla la k.

Inoltre nella trasformazione T che si esamina, al fascio di piani (k) corrisponde il fascio di piani (k'); e la corrispondenza che la T stabilisce fra due piani omologhi ω, ω', è di ordine m; onde le superficie che nella T (o nella sua inversa) corrispondono ai piani dello spazio, risultano essere delle $\varphi'_{m+n+1} \equiv k'^{n+1}$ (o delle $\varphi_{m+n'+1} \equiv k^{n'+1}$).

Ad un raggio r della stella (P) corrisponde nella T una curva di ordine $n'+1$ luogo dei punti in cui i raggi r' che corrispondono alla r nelle corrispondenze del sistema Σ, segano i piani del fascio (k') coordinati a tali corrispondenze, onde il punto P risulta $m-$plo per le superficie φ.

Per determinare con maggiore precisione il modo di comportarsi del punto P nella trasformazione T, occorre considerare quella corrispondenza $[A_1]$ del sistema Σ che è coordinata al piano $\alpha_1 \equiv kP$ ed al suo omologo α'_1 del fascio (k'). Se in essa si corrispondono il raggio r della (P) ed il raggio r' della (P′), o la r non incontra la retta k, e allora nella trasformazione T al punto Q infinitamente vicino a P sulla r corrisponde il punto $Q' \equiv r'\alpha'_1$, o la r incontra la k e allora essa corrisponde per intero nella T al punto $Q' \equiv r'\alpha'_1$.

Il luogo di questi punti Q′ è la traccia sul piano α'_1 del cono che corrisponde al fascio di raggi $(P-\alpha_1)$ nella corrispondenza $[A_1]$ anzidetta.

Dunque al punto P corrisponde nella T tutto il piano α'_1, e questo sega tutte le superficie φ' secondo la medesima linea semplice c' di ordine m.

Con ragionamenti analoghi si riconosce che il punto P′ è multiplo secondo m per le superficie φ' e che nella T gli corrisponde un piano α_2 del fascio (k) il quale sega tutte le superficie φ secondo la medesima linea semplice c di ordine m.

Con ciò il problema di determinare i sistemi razionali di trasformazioni cremoniane di dato ordine m e di data specie può farsi dipendere dall' altro di determinare i varii tipi di trasformazioni birazionali dello spazio, che, facendo corrispondere ai piani di un fascio (k), i piani di un fascio (k') determinano fra due piani corrispondenti una trasformazione dell' ordine dato m e della specie assegnata e che di più presentano in ciascun sistema un punto fondamentale $m-$plo.

II.

Nel caso più semplice in cui il sistema Σ è costituito da omografie, nell'individuare la trasformazione T si può supporre che i due piani $\alpha \equiv kP$, $\alpha' \equiv k'P'$ si corrispondano nella proiettività data fra i fasci (k), (k'), e che di più i due

fasci di raggi $(P-\alpha)$, $(P'-\alpha')$ si corrispondano in quella omografia [A] del sistema Σ che è coordinata alla coppia $(\alpha\alpha')$.

Allora per due raggi omologhi r, r' dei due fasci si avrà che uno di essi corrisponderà per intero ad ogni punto dell' altro, di guisa che dalle superficie ς' si staccherà il piano α' e dalle superficie ς il piano α, e le restanti superficie saranno rispettivamente di ordine $n'+1$, $n+1$; nè i punti P, P' risulteranno fondamentali per la T, ma si corrisponderanno in essa, perchè ad una retta per P corrisponderà una curva $c'_{n'+1} \equiv P'$ e ad una retta per P' corrisponderà una $c_{n+1} \equiv P$.

Viceversa data una trasformazione cremoniana nello spazio che trasformi i piani ω di un fascio (k) nei piani ω' di un fascio (k') facendo corrispondere alle rette dell' un piano le rette dell' altro, se da due punti corrispondenti P, P' di tale trasformazione si proiettano i punti omologhi di due piani ω, ω', ne risulta un' omografia fra le stelle proiettanti, e variando i due piani nei fasci proiettivi (k), (k') verrà ad aversi il sistema più generale di omografie fra le stelle (P), (P') del tipo in esame.

Ora la trasformazione T è nota [1]. I suoi numeri caratteristici n, n' soddisfanno all' unica condizione che il maggiore di essi non supera il doppio del minore, e i suoi elementi eccezionali (oltre le rette k, k') sono: $(2n-n')$ punti fondamentali semplici A situati fuori della k e $(2n'-n)$ rette fondamentali semplici b appoggiate alla k, nel primo sistema, e $(2n'-n)$ punti fondamentali semplici B' situati fuori della k' e $(2n-n')$ rette semplici a' appoggiate alla k', nel secondo sistema; cioè in essa ad un piano generico del secondo sistema corrisponde nel primo una superficie

$$\varphi_{n'+1} \equiv k^{n'}, \ (2n-n')\,A, \ (2n'-n)b$$

e ad un piano del primo sistema corrisponde nel secondo una superficie

$$\psi'_{n+1} \equiv k'^{\,n}, \ (2n'-n)\,B', \ (2'-n')\,a'.$$

La omografia che la T stabilisce fra i piani corrispondenti $\alpha \equiv kA$, $\alpha' \equiv k'a'$ riducesi alla proiettività fra i raggi del fascio $(A-\alpha)$ e i punti della retta a' che corrispondono nella T a quei raggi, nel senso che in tale omografia $[A\,a']$ ad un punto generico P di α che sia sul raggio p del fascio (A) corrisponde in α' quel punto P' della retta a' che è omologo a p nella proiettivilà anzidetta, e viceversa ad una retta r' di α' che seghi la a' nel punto R' corrisponde in α quel raggio r del fascio (A) che è omologo ad R' nella proiettività in quistione; onde ad un punto generico di α' corrisponde il punto A e ad una retta generica di α la retta a'.

---

[1] Vegg. *Loria* — Sulla classificazione delle trasformazioni razionali dello spazio, ... Rendiconti del R. Istituto lombardo — Serie II, vol. XXIII.

E così l' omografia che la T stabilisce fra i piani corrispondenti $\beta \equiv kb, \beta' \equiv k'B'$ riducesi nel senso anzidetto ad una proiettività fra i punti della b ed i raggi del fascio $(B' - \beta')$ che corrispondono a quei punti nella T.

Nè esistono altre omografie degeneri dovute alla T.

Perciò passando dalla trasformazione T al sistema Σ e sostituendo alle stelle (P), (P') due sistemi piani ω ed ω', può senz' altro affermarsi che:

Qualunque siano i numeri interi n, n', *purchè il maggiore di essi non superi il doppio del minore, è possibile costruire un sistema continuo di omografie fra due piani* ω, ω' *nelle quali ad un punto del secondo piano (o del primo) corrispondano nell' altro piano i singoli punti di una curva razionale di ordine* n *(o di ordine* n'). *In tale sistema si presentano* 2n − n' *omografie ridotte a proiettività fra fasci di raggi del primo piano e punteggiate del secondo e* 2n' − n *omografie ridotte a proiettività fra punteggiate del primo piano e fasci di raggi del secondo.*

Noi diremo *singolari* i centri dei fasci e le rette sostegni delle punteggiate che si presentano nelle corrispondenze degeneri del sistema, e designeremo questi elementi con le stesse lettere usate per i corrispondenti elementi eccezionali della trasformazione T.

Da ciò che si è detto per le omografie degeneri segue senz' altro che ogni curva p_n del piano ω formata dai punti che nelle omografie del sistema corrispondono ad un punto P' del piano ω', passa per i $2n-n'$ punti singolari A del piano ω; e di più la corrispondenza biunivoca che viene ad aversi fra le curve p_n, q_n dovute a due punti generici P', Q' di ω', quando si riguardino corrispondenti in esse due punti che corrispondano rispettivamente a P', Q' nella medesima omografia del sistema, ammette per elementi uniti i $2n - n'$ punti singolari A di ω e su ogni retta singolare b di ω presenta una coppia di punti corrispondenti.

Perciò l' inviluppo delle rette che uniscono i punti omologhi delle due curve risulta di classe

$$2n - (2n - n') = n',$$

e comprende le $(2n' - n)$ rette singolari b di ω.

Questo inviluppo è costituito dalle rette che nelle singole omografie del sistema corrispondono alla retta P'Q' del piano ω', epperò, ripetendo per questo piano quel che si è detto pel piano ω, si può affermare che:

Le rette di uno dei piani ω, ω' *che nelle omografie del sistema corrispondono ad una retta generica dell' altro piano costituiscono un inviluppo di classe* n' (o n) *di cui fanno parte le rette singolari* b (o a') *di quel piano.*

Tutto ciò mostra che i *numeri caratteristici spettanti al piano* ω, *riguardato come piano punteggiato, sono eguali ai numeri caratteristici relativi al piano* ω' *riguardato come piano rigato, e viceversa.*

Per $n = n' = 2$, la trasformazione $T = \{\varphi_2 \equiv kbA, \psi'_2 \equiv k'a'B'\}$ che ne risulta, trasforma il fascio di piani che ha per asse la retta PA, nel fascio di piani che ha per asse la retta P'B', ed al piano Pb fa corrispondere il piano P'a'. Cor-

rispondentemente *il sistema* $\Sigma_{1,1}$ *è costituito dalle omografie fra i piani* ω, ω' *che ad un fascio* (O) *del piano* ω *fanno corrispondere con la medesima proiettività un fascio di raggi* (O') *del piano* ω' *e che ad una punteggiata* (r) *dell'un piano prospettiva al fascio* (O) *fanno corrispondere una punteggiata* (r') *dell'altro piano prospettiva al fascio* (O').

Per $n = 1$ ed $n' = 2$ la corrispondenza $T \equiv \{\varphi_3 \equiv k^2, 3b, \psi'_2 \equiv k', 3B'\}$ che ne risulta, ai tre spigoli del triedro formato dai piani che dal punto P proiettano le tre rette fondamentali b, fa corrispondere i raggi che dal punto P proiettano i punti fondamentali B'; epperò *il sistema* $\Sigma_{1,2}$ *è costituito dalle omografie che ai vertici* A, B, C *di un triangolo del piano* ω *fanno corrispondere i vertici* A', B', C' *di un triangolo del piano* ω' *e che di più ad un punto* D' *del piano* ω' *fanno corrispondere i singoli punti di una retta* d *del piano* ω.

Si presenta cioè quel sistema (o *fascio*) *di omografie collegato ad ogni corrispondenza birazionale quadratica fra il piano rigato* (ω) *ed il piano punteggiato* (ω').

III.

Una superficie φ di ordine $n' + 3$ che presenti una retta multipla secondo $n' + 1$ e un punto doppio fuori di questa retta è rappresentabile sul piano mediante un sistema rappresentativo formato da curve

$$c_{n'+3} \equiv O^{n'+1}, 3(n'+1)A, 2A'.$$

La retta multipla k ha per immagine una

$$c_{n'+2} \equiv O^{n'}, 3(n'+1)A, 2A'$$

e il punto doppio P è rappresentato da una retta

$$c \equiv O, 2A'.$$

Se la superficie φ fa parte di un sistema omaloidico Σ capace di essere riferito omograficamente ai piani dello spazio in modo che nella trasformazione così determinata ai piani del fascio (k) corrispondano i piani di un fascio (k') senza che nello spazio del sistema Σ esista alcun altro punto fondamentale oltre di B, la rete delle curve variabili di sezione della superficie φ con le altre del sistema deve avere per immagine sul piano iconico una rete isologica di curve $c_x \equiv O^{x-1}, 2(x-1)A$ avente il punto base multiplo nel punto O e i punti base semplici nel gruppo dei $3(n'+1)$ punti eccezionali A della rappresentazione, epperò (se x è maggiore di 1) con trasformazione isologica connessa alla rete, potrà questa mutarsi in una rete di rette, sicchè potrà sempre supporsi che la rete delle linee immagini sia costituita da rette, pur restando invariato il tipo del sistema rappresentativo.

E se il sistema omaloidico Σ ha una conica base situata in un piano del fascio (k), questa nella rappresentazione della φ avrà per immagine una retta $c \equiv O$,

onde l'immagine della parte fissa della sezione della φ con un'altra superficie del sistema Σ, oltre alla linea immagine della k contata $n'+1$ volte, ed oltre alle rette immagini rispettive del punto P e della conica c_2 contata la prima due volte, comprenderà una curva $c_{3(n'+1)} \equiv O^{3n'}, 3(n'+1)A^2$.

Questa curva esiste; onde partendo da essa col procedimento inverso a quello indicato, si deduce l'esistenza di una trasformazione birazionale che ai piani del secondo spazio fa corrispondere nel primo superficie $\varphi_{n'+3} \equiv k^{n'+1}P^2c_2$ aventi ulteriormente in comune una curva semplice g di ordine $3(n'+1)$, di genere $3n'-2$ che ha un punto triplo in P e si appoggia alla k in $3n'$ punti.

La linea variabile di sezione di due superficie φ è di ordine $n'+3$, passa semplicemente per P, si appoggia alla k in $n'+2$ punti, ed incontra in un punto la c_2; epperò le superficie ψ che nel secondo spazio corrispondono ai piani del primo, sono di egual tipo delle φ, sono cioè delle $\psi_{n+3} \equiv k'^{n+1}P'^2c'_2g'_{3(n+1)}$, essendo $n=n'$.

La superficie Jacobiana delle φ è formata dal piano kc_2 contato due volte, dal piano kP, da una superficie $\chi_{n+2} \equiv k^nP^2c_2g_{3(n+1)}$ (che corrisponde a k') e da una superficie $\sigma_{3(n+1)} \equiv k^3nP^3g^2_{3(n+1)}$ (che corrisponde alla g').

Ed analogamente per le superficie ψ'.

Ad una retta della stella (P) corrisponde nel secondo spazio una curva di ordine $n+1$ che passa semplicemente per P' e si appoggia in n punti alla k ed in $3n$ punti alla g, onde il cono che la proietta da P è di ordine n, nè presenta alcuna particolarità rispetto alla k.

Ad un piano della stella (P) corrisponde una superficie $\rho'_{n+2} \equiv k'^nP'^2g'$, onde i coni che da P' proiettano le coniche sezioni di tale superficie con i piani del fascio (k') costituiscono un sistema di indice n.

Infine il cono che da P proietta la g' è di ordine $3n$ e di genere $3n'-2$, come il cono della stella (P') circoscritto alla superficie Jacobiana $c_{3(n+1)}$ è di classe $3n$ e di genere $3n-2$.

Ed analogamente per la stella (P).

Con ciò restano determinate le proprietà fondamentali del sistema di corrispondenze quadratiche che vengono ad aversi proiettando da P e da P' i punti omologhi di due piani dei fasci (k), (k') che si corrispondano nella trasformazione in esame; — e sostituendo alle stelle due sistemi piani può affermarsi che:

Qualunque sia il numero intero n *è possibile costruire fra due piani dati un sistema di* ∞^1 *corrispondenze quadratiche tutte non degeneri, le quali ad un punto dell'un piano facciano corrispondere i punti di una curva razionale di ordine* n *dell'altro.*

In ciascun piano le terne di punti fondamentali costituiscono una curva di ordine 3n *e di genere* 3n − 2, *come le rette che uniscono a due a due i punti delle singole terne inviluppano una curva di classe* 3n *e dello stesso genere della precedente.*

Ad una retta dell'un piano nelle corrispondenze del sistema corrispondono nell'altro piano coniche d'un sistema di indice n *che presenta* 3n *coniche degeneri, ecc., ecc.*

È noto che una corrispondenza quadratica fra due piani è connessa ad un fascio di reciprocità. Ora, assegnata una rete di reciprocità, se in essa si considerano i fasci che hanno in comune una reciprocità K, nelle corrispondenze quadratiche connesse a tali fasci i punti corrispondenti ad un punto generico P dell'un piano sono i singoli punti della retta p dell'altro piano che nella K corrisponde al punto P, epperò tali corrispondenze formano un sistema razionale pel quale il numero n è 1.

Viceversa è agevole riconoscere che ogni sistema di corrispondenze quadratiche pel quale sia $n = 1$ è del tipo indicato.

IV.

Una superficie φ di ordine $m + n' + 1$ che presenti una retta k multipla secondo $n' + 1$ ed una retta o multipla secondo $m - 1$, può essere rappresentata sul piano in modo che le sezioni piane abbiano per immagini curve

$$c_{m+n'+1} \equiv A^{n'+1} B^{m-1} \ , \ (2mn' + 3m - n' - 2) C.$$

Se sulla retta o esiste un punto P che sia multiplo secondo m per la superficie, m punti fondamentali semplici C' della rappresentazione si allineano col punto A su una retta

$$p \equiv A \ , \ mC'$$

immagine di quel punto P, e l'ulteriore immagine della retta o risulta essere una

$$c_{m+n'-1} \equiv A^{n'} B^{m-2} \ , \ (2mn' + 2m - n' - 2) C,$$

mentre l'immagine della retta k continua ad essere una

$$c_{m+n'} \equiv A^{n'} B^{m-1} \ , \ CC'.$$

Se la superficie φ fa parte di un sistema omaloidico Σ capace di essere riferito omograficamente ai piani dello spazio in modo che nella trasformazione spaziale così determinata ai due fasci di piani (k), (o) corrispondano due fasci di piani (k'), (o') senza che nello spazio del sistema Σ esista alcun altro punto fondamentale oltre di P, la rete delle curve variabili di sezione della superficie φ con le altre del sistema deve avere per immagine sul piano iconico o una rete di coniche $c_2 \equiv ABC$ o l'insieme delle rette del piano, ed il primo caso può sempre ridursi al secondo mediante trasformazione quadratica sul piano iconico, senza che varii il tipo del sistema rappresentativo e delle linee immagini delle rette k, o e del punto P.

Inoltre se il sistema omaloidico Σ ha una linea base c_m situata in un piano del fascio (k), questa nella rappresentazione della φ avrà per immagine una retta $c_1 \equiv A$, onde l'immagine della parte fissa della sezione della φ con un

altra superficie del sistema, oltre alle linee immagini delle k, o, c_m e del punto P contate rispettivamente $n'+1$, $m-1$, 1 ed m volte, comprenderà una linea

$$c_{2(m+n'-1)} \equiv A^{2n'} B^{2(m-1)} C.$$

Questa linea esiste ed è l'immagine di una curva g di ordine $2mn'+2m-n'-2$, di genere $4mn'-2m-6n'+3$, che passa per P con $2(m-1)$ rami ed è incontrata da un piano per k o per o in $2(m-1)$ o in $2n'$ punti variabili: epperò esiste una trasformazione birazionale T che ad un piano generico del secondo spazio fa corrispondere nel primo una superficie

$$\varphi_{m+n'+1} \equiv k^{n'+1}\, o^{m-1}\, P^m\, c_m\, g_{2mn'+2m-n'-2}\,.$$

Le superficie ψ' che nel secondo spazio corrispondono ai piani del primo, sono di egual tipo delle φ, sono cioè delle

$$\psi'_{m+n+1} \equiv k'^{n+1}\, o'^{m-1}\, P'^m\, c'_m\, g'_{2mn+2m-n-2}\,;$$

essendo $n=n'$.

La Jacobiana delle superficie φ oltre ai piani kc_m, kP (il primo da contarsi due volte) che corrispondono al punto P' ed alla curva c'_m, comprende le superficie

$$\chi_{m+n} \equiv k^n o^{m-1} P^m c g \quad , \quad \omega_{m+n-1} \equiv k^n o^{m-2} P^{m-1} g\,,$$

che corrispondono alle rette k', o, e la rigata

$$\sigma_{2(m+n-1)} \equiv k^{2n} o^{2(m-1)} P^{2(m-1)} g$$

che corrisponde alla g'.

Ed analogamente per le superficie ψ'.

Ad un piano α del fascio (o) corrisponde un piano α' del fascio (o') e ad una retta r del primo che passa per P corrisponde una curva di ordine $n+2$ del secondo che passa semplicemente per P', diguisachè due rette r, r', l'una del fascio $(P-\alpha)$, l'altra del fascio $(P-\alpha')$, sono sostegni di n coppie di punti corrispondenti nella trasformazione in esame.

Perciò se dai punti P, P' si proiettano i punti omologhi di due piani corrispondenti dei fasci (k), (k'), le ∞^1 corrispondenze isologiche che vengono ad aversi fra le due stelle, oltre al far corrispondere al fascio di piani (o) il fascio di piani (o') con la medesima corrispondenza proiettiva, godono la proprietà che fissati due raggi r, r' appartenenti a piani omologhi dei due fasci esistono fra di esse n corrispondenze nelle quali quei due raggi si corrispondono.

Questa e le altre proprietà che possono stabilirsi per il sistema delle corrispondenze in esame, enunciate per due sistemi piani piuttosto che per due stelle, dànno origine alla seguente proposizione:

Dati due fasci di raggi proiettivi $(O-\omega)$, $(O'-\omega')$ *è possibile stabilire fra i loro piani un sistema continuo e razionale di corrispondenze isologiche di ordine* m, *tutte non degeneri, che mutino l'un fascio nell'altro, e tali che* n *fra di esse ad un punto generico* A *dell'un piano facciano corrispondere un punto* A' *del secondo, situato sul raggio* O'A' *che nella data proiettività corrisponde al raggio* OA; *e ciò qualunque siano il numero intero* $m > 1$ *ed il numero intero* n.

In ciascuno dei piani dati la linea luogo dei punti fondamentali semplici delle corrispondenze del sistema è di ordine $(2m-1)n$, *di genere* $4mn-2m-6n+3$, *ed è segata in* 2n *punti variabili dai raggi del fascio* (O) [*o del fascio* (O')].

Riferendo proiettivamente il sistema Σ ora ottenuto ad un sistema razionale Σ' di omografie fra gli stessi piani ω e ω' e facendo il prodotto delle corrispondenze omologhe dei due sistemi, si ottiene un sistema di corrispondenze isologiche a punto fondamentale multiplo variabile in ciascuno dei due piani.

Ma il sistema presenta corrispondenze degeneri; mentre in alcuni casi è possibile costruire sistemi razionali di corrispondenze isologiche tutte non degeneri, a punti fondamentali variabili, col procedimento diretto indicato in questa Nota.

QUESTIONE PROPOSTA

Siano due serie a termini positivi

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots, \quad v_1 + v_2 + v_3 + \dots,$$

convergente la prima, *divergente* la seconda. Dimostrare che, se il rapporto di u_n a v_n finisce per decrescere sempre, quando n cresce indefinitamente, si ha [1]

$$\lim \frac{u_n}{v_n}(v_1 + v_2 + \dots + v_n) = 0.$$

E. CESÀRO

---

[1] Per $v_n = 1$, vedi Borel " *Théorie des fonctions entières* " p. 17.

SEPARAZIONE DELLE RADICI REALI D'EQUAZIONE A COEFFICIENTI NUMERICI REALI

NOTA

DI

F. GIUDICE

Se $f(x)$ è funzione reale derivabile della variabile reale x, si possono calcolare assintoticamente le radici reali dell'equazione $f(x)=0$ così per via ascendente come per via discendente e con qualsiasi approssimazione mediante il procedimento dato recentemente in questo Giornale [1]. Per non lasciare incertezze convien proporsi anzitutto di isolare le radici, che vogliansi calcolare, cioè di dare per ciascuna un numero minore ed uno maggiore tra i quali non siavi altra radice. Vedremo ora come si possan isolare comodamente, quando sian tutte semplici, per es. quando trattisi d'una delle equazioni alle quali siasi ridotta un' equazione algebrica col noto procedimento della separazione complessiva di tutte le radici d'uno stesso grado di molteplicità.

Supponiamo dunque che l'equazione $f(x)=0$ tra i due numeri α e β non possa avere che un numero finito di radici e tutte semplici ; il minore dei due numeri, che indicheremo anche con α_0, sia α. Intraprendiamo il calcolo d'una successione

$$\alpha_0 \ , \ \alpha_1 \ , \ \alpha_2 \ , \ldots$$

tendente alla minor radice (se esista) superante α, la quale (se esista) indicheremo con ρ; arrestiamoci quando dall'evanescenza delle differenze degli ultimi termini calcolati siamo indotti a ritenere d'esser molto vicini alla radice: se l'ultimo termine calcolato sia α_n, che indicheremo anche con α'_n, intraprendasi allora il calcolo d'una successione

$$\alpha'_n \ , \ \alpha'_{n+1} \ , \ \alpha'_{n+2} \ , \ldots$$

tendente alla minor radice superante α'_n dell' equazione derivata $f'(x)=0$ (se tal radice esista). Generalmente si perverrà così ad un α'_{n+m} tale che

$$f(\alpha'_{n+m-1})\ f(\alpha'_{n+m}) < 0 \,,$$

e la radice ρ sarà così isolata tra α'_{n+m-1} ed α'_{n+m}. Potrà però avvenire, eccezionalmente, che, prima di pervenire ad un tal risultato, gli ultimi termini calcolati della seconda successione sian tali da far temere la presenza di qualche radice dell'equazione derivata tra α_n e ρ: se α'_{n+m} sia l'ultimo termine calcolato, senza esser pervenuti ad isolar ρ, allora α'_{n+m}, che indicheremo anche con α_{n+m}, è minore di ρ e conviene intraprendere il calcolo d'una successione

$$\alpha_{n+m} \ , \ \alpha_{n+m+1} \ , \ldots$$

---

[1] E. Giudice: Sul calcolo assintotico delle radici reali d'equazione.

tendente a ρ, per ritornar poi all'equazione derivata, ecc. In questo modo o si riconoscerà che l'equazione non ha radici tra α e β oppure, se ne abbia, si perverrà ad isolare la minore ρ tra un numero minore α'_p ed uno maggiore α'_{p+1}; e vi si perverrà anche sempre relativamente presto per mezzo d'equazioni lineari cioè col metodo di Newton perfezionato perchè il valore assoluto di $f(x):f'(x)$, mentre tende a zero coll' avvicinarsi di x ad una radice semplice o multipla dell'equazione primitiva $f(x)=0$, cresce indefinitamente coll' avvicinarsi di x ad una radice dell'equazione derivata, che non sia radice della primitiva. Talvolta, per aver più rapida approssimazione, come risulterebbe dall'ultima osservazione della nota citata, invece che ad equazioni lineari si potrà ricorrere ad equazioni quadratiche o di maggior grado.

Se $\alpha'_{p+1} < \beta$, si passa ad isolare la minor radice superante α'_{p+1}, ecc. Si potrebbe isolare le radici procedendo in ordine inverso, dalla maggiore alla minore; e si potrebbe anche procedere, alternatamente, per via ascendente e per via discendente.

Si può procedere alla separazione delle radici reali anche senza preoccuparsi della possibile presenza di radici multiple. Si potrà isolare una qualsiasi radice, semplice o multipla, spingendo il calcolo di due successioni convergenti verso essa tanto da rinserrarla tra un numero minore a ed uno maggiore b tali che $b-a$ sia minore d'ogni differenza tra radici reali dell'equazione proposta, al qual fine è della massima importanza una mia generalizzazione d'un criterio di Cauchy (¹)

Converrà, per lo meno, riservare il calcolo di separazione complessiva delle radici d'ugual grado di moltiplicità a quando siasi in qualche modo accertata, o presunta, la presenza di radici multiple, il qual calcolo sarà allora conveniente. A conferma di quanto ora dissi ritengo opportuno d'aggiungere le considerazioni seguenti.

È noto che una radice d'equazione algebrica, se è unica del proprio grado di molteplicità, è necessariamente razionale nei coefficienti dell' equazione. Per ciò, dopo d'aver calcolate le radici razionali, se il grado non è molto elevato, e questo è quanto succede in pratica, si può facilmente riconoscere se l' equazione abbia radici multiple. Da quanto fu richiamato segue infatti subito che: Se un' equazione algebrica non ha radici razionali nei coefficienti ed il suo grado è minore di sei e non è quattro, le sue radici son tutte semplici; se un' equazione algebrica del quarto grado non ha radici razionali nei coefficienti ed il suo primo membro non è un quadrato, le sue radici son tutte semplici; una del sesto grado, che non abbia radici razionali nei coefficienti, non può aver radici multiple se il suo primo membro non è nè un cubo nè un quadrato nè il prodotto d'un polinomio del 2° grado per un quadrato; una del 7°, che non abbia radici razionali nei coefficienti, non può aver radici multiple, se non è prodotto d'un polinomio del 3° grado per un quadrato, ecc..

(¹) F. Giudice: Esistenza, calcolo, e diff. di radici d'equaz. num.: Rend. Circ. Mat., Palermo 1902.

GIUBILEO ACCADEMICO

DEL

Professore LEONIDA RASCHI

Il dì 8 Febbraio del corrente anno 1903 è stato celebrato solennemente nell' Università di Parma il giubileo del prof. Leonida Raschi Ordinario di Algebra complementare, per il compimento del suo cinquantesimo anno d' insegnamento.

Statuts relatifs a la fondation du Prix Bolyai par l'Académie Hongroise des Sciences.

1. A l'occasion du centième anniversaire de la naissance de Jean Bolyai l'Académie Hongroise de Sciences, voulant perpétuer le souvenir de cet illustre savant, ainsi que celui du profond penseur que fut Farkas Bolyai, son père et son maître, décide de fonder un prix, qui portera le nom de Prix Bolyai. Ce prix, qui consistera en une médaille commémorative — dont l'avers représentera l'Académie avec le Panorama de Budapest, et le revers portera une légende — et en une somme de dix mille couronnes, sera décerné pour la première fois en 1905, puis de 5 en 5 ans, à l'auteur du meilleur ouvrage de mathématiques (prises dans le sens le plus général) paru au cours des 5 années précédentes. Le prix pourra être décerné à tout ouvrage, qui en sera jugé digne, quelle que soit la langue dans laquelle il aura été rédigé, et quelle que soit la forme sous laquelle il aura été publié. La nomination du Lauréat aura lieu au cours de l'Assemblée générale de l'Académie au mois de Décembre.

2. Dans le cas où l'ouvrage d'un auteur décédé serait reconnu digne du prix, celui-ci sera attribué à ses héritiers.

3. La troisième Section de l' Académie (Section des Sciences) est chargée de constituer, dans sa séance du mois de Mars, un comité composé de deux membres internes et de deux membres étrangers, qui aura pour mission de juger de la valeur des ouvrages. Le comité se réunira à Budapest dans la première quinzaine d'Octobre, et nommera dans son sein un Président et un Rapporteur. En cas de partage la voix du Président est prépondérante. Le Rapporteur est chargé de présenter un rapport détaillé relatif à la décision prise par le Comité. Ce rapport sera lu à l' Assemblée Générale de l' Académie des Sciences, le jour où le prix sera décerné.

4. Les ouvrages des auteurs faisant partie du comité sont exclus du concours, et ils ne seront pas mentionnés dans le rapport du comité.

5. Les membres étrangers désignés pour faire partie du comité et qui prenant part aux délibération, séjourneront quelques jours à Budapest, recevront une indemnité de 1000 couronnes. Le honoraires, accordés au Rapporteur pour ses travaux ont été fixés à 300 couronnes.

6. Le rapport sera publié dans le journal « Akadémiai Értesitö ». L' Académie Hongroise des Sciences publiera ce rapport à l'Étranger, et en donnera connaissance à toutes les Académies Associées.

(Votés le 27 janvier 1902; enregistrés le 26 janvier 1903).

Le Secrétaire général
C. Szily.

CALCOLO DELLA K^esima SPINTA FRA DUE FORME BINARIE

NOTA

DEL

Dottor IGNAZIO DE LUCA.

Date due forme binarie:

$$f(\overset{m}{x}) = a_0 x_1^m + \binom{m}{1} a_1 x_1^{m-1} x_2 + \binom{m}{2} a_2 x_1^{m-2} x_2^2 + \ldots + a_m x_2^m$$

$$\varphi(\overset{q}{x}) = b_0 x_1^q + \binom{q}{1} b_1 x_1^{q-1} x_2 + \binom{q}{2} b_2 x_1^{q-2} x_2^2 + \ldots + b_2 x_2^q ,$$

degli ordini m e q, se poniamo:

$$f(\overset{m}{x}) = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^m = \alpha_x^m$$

$$\varphi(\overset{q}{x}) = (\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)^q = \beta_x^q ,$$

l' espressione simbolica:

$$(f , \varphi)^{(k)} = (\alpha\beta)^k \alpha_x^{m-k} \beta_x^{q-k} ,$$

che rappresenta un covariante simultaneo delle due forme fondamentali f e φ, chiamasi K^{ma} *spinta* (1) della forma f sulla forma φ.

Possiamo avere l'espressione effettiva della spinta facendo lo sviluppo della parentesi:

$$(\alpha\beta)^k = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^k$$

e delle potenze α_x^{m-k} , β_x^{q-k}, eseguendo il prodotto e sostituendo poi i coefficienti effettivi delle forme date.

(1) Dal tedesco " *Ueberschiebung* " — (Cfr. CLEBSCH: *Theorie der binären algebraischen Formen*. Leipzig, 1872).

Per esempio, la 4ª spinta di:

$$f(\overset{9}{x}) = a_0 x_1^9 + 9a_1 x_1^8 x_2 + \ldots + a_9 x_2^9 = \alpha_x^9$$

sopra

$$\varphi(\overset{7}{x}) = b_0 x_1^7 + 7b_1 x_1^6 x_2 + \ldots + b_7 x_2^7 = \beta_x^7 ,$$

è espressa simbolicamente da:

$$(\alpha\beta)^4 \alpha_x^5 \beta_x^3 ;$$

cioè:

$$(\overset{9}{f}, \overset{7}{\varphi})^{IV} = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^4 (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^5 (\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)^3 .$$

Volendo questa spinta espressa con i coefficienti effettivi delle forme, porremo, dopo avere sviluppato:

$$\alpha_1^9 = a_0 , \ \alpha_1^8 \alpha_2 = a_1 , \ \alpha_1^7 \alpha_2^2 = a_2 , \ \ldots , \ \alpha_2^9 = a_9 ,$$

$$\beta_1^7 = b_0 , \ \beta_1^6 \beta_2 = b_1 , \ \beta_1^5 \beta_2^2 = b_2 , \ \ldots , \ \beta_2^7 = b_7 .$$

L'espressione effettiva della K^{ma} spinta di $f(\overset{m}{x})$ sopra $\varphi(\overset{q}{x})$ si può anche ottenere, con un procedimento più lungo e mercè derivazioni, applicando la formola: (1)

$$\frac{\lfloor m \, \lfloor q}{\lfloor m-k \, \lfloor q-k} \left(f(\overset{m}{x}) , \varphi(\overset{q}{x}) \right)^{(k)} =$$

$$= \frac{\partial^k f}{\partial x_1^k} \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_2^k} - \binom{k}{1} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k-1} \partial x_2} \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_2^{k-1} \partial x_1} + \binom{k}{2} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k-2} \partial x_2^2} \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_2^{k-2} \partial x_1^2} - \ldots .$$

$$\ldots . \pm \frac{\partial^k f}{\partial x_2^k} \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^k} .$$

Esporremo brevemente la via da noi seguita per stabilire delle formole mercè le quali si ha l'espressione *effettiva* della K^{ma} spinta fra due forme binarie, affatto generali, con sviluppi molto semplici di Σ.

Con queste formole si opera più speditamente e simmetricamente mentre si evitano i calcoli lunghi e difficili del processo ordinario e l'introduzione dei simboli.

Esse ci permettono inoltre di calcolare separatamente il coefficiente d'un

---

(1) Cfr. *Clebsch* l. c. oppure: CAPELLI: *Lezioni sulla teoria delle forme algebriche.* Napoli, 1902, pag. 281.

termine qualunque della spinta, o anche soltanto il coefficiente numerico d'una certa combinazione $a_i b_j$ (di coeff. delle forme date) che fa parte d'un coefficiente della spinta stessa.

§ I.

1. Sappiamo, per un noto teorema di *Sylvester*, che una forma binaria f, d'ordine $m = 2n - 1$:

$$\overset{m}{f}(x) = a_0 x_1^m + \binom{m}{1} a_1 x_1^{m-1} x_2 + \ldots + a_m x_2^m, \tag{1}$$

si può trasformare in una somma di n potenze, di grado m, di forme binarie lineari:

$$f = p_1(x_1 + \alpha_1 x_2)^m + p_2(x_1 + \alpha_2 x_2)^m + \ldots + p_n(x_1 + \alpha_n x_2)^m. \tag{2}$$

Questa riduzione non può farsi che in un modo soltanto, e tra i coefficienti della forma data ed i coefficienti della trasformata esistono le relazioni:

$$\left.\begin{array}{l} p_1 + p_2 + \ldots + p_n = a_0 \\ p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + \ldots + p_n\alpha_n = a_1 \\ p_1\alpha_1^2 + p_2\alpha_2^2 + \ldots + p_n\alpha_n^2 = a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_1\alpha_1^m + p_2\alpha_2^m + \ldots + p_n\alpha_n^m = a_m \end{array}\right\} \tag{3}$$

Se la forma f è d'ordine $m = 2n - 2$, possiamo in infiniti modi trasformarla nella somma di n potenze, del grado $2n - 2$, di forme binarie lineari, perchè si hanno $2n - 1$ relazioni fra $2n$ indeterminate.

S'ottiene però un solo sistema di valori dei coefficienti della trasformata se si fissa un certo valore per uno dei coefficienti p o dei coefficienti α.

Dunque la (2) vale anche per $m = 2n - 2$ e le relazioni (3) sono evidentemente le stesse.

Noi adopereremo la forma canonica di *Sylvester* (2) per $m = 2n - 1$ e per $m = 2n - 2$, non avendo bisogno di determinare i valori delle p e delle α, ma dovendo solo servirci delle relazioni (3), che, come abbiamo detto, sussistono in entrambi i casi.

2. Riducendo le due forme date:

$$\overset{m}{f}(x) = a_0 x_1^m + \binom{m}{1} a_1 x_1^{m-1} x_2 + \ldots + a_m x_2^m$$

$$\overset{q}{\varphi}(x) = b_0 x_1^q + \binom{q}{1} b_1 x_1^{q-1} x_2 + \ldots + b_q x_2^q$$

alla forma canonica di *Sylvester*, otteniamo (per $m=2n-1$, $m=2n-2$, $q=2l-1$, $q=2l-2$):

$$f(\overset{m}{x}) = p_1(x_1+\alpha_1 x_2)^m + p_2(x_1+\alpha_2 x_2)^m + \ldots + p_n(x_1+\alpha_n x_2)^m$$

$$\varphi(\overset{q}{x}) = r_1(x_1+\beta_1 x_2)^q + r_2(x_1+\beta_2 x_2)^q + \ldots + r_l(x_1+\beta_l x_2)^q.$$

Per calcolare la K^{ma} spinta di f sopra φ, applichiamo a queste ultime forme trasformate, la nota formola che dà l'espressione operativa della spinta voluta:

$$\frac{\underline{|m}\,\underline{|q}}{\underline{|m-k}\,\underline{|q-k}}\left(f(\overset{m}{x}),\ \varphi(\overset{q}{x})\right)^{(k)} = \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\,k}}\frac{\partial^k \varphi}{\partial x_2^{\,k}} - \binom{k}{1}\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\,k-1}\partial x_2}\frac{\partial^k \varphi}{\partial x_2^{\,k-1}\partial x_1} +$$

$$+\binom{k}{2}\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\,k-2}\partial x_2^{\,2}}\frac{\partial^k \varphi}{\partial x_2^{\,k-2}\partial x_1^{\,2}} - \ldots \pm \frac{\partial^k f}{\partial x_2^{\,k}}\frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^{\,k}},$$

o più brevemente:

$$\frac{\underline{|m}\,\underline{|q}}{\underline{|m-k}\,\underline{|q-k}}\left(f(\overset{m}{x}),\ \varphi(\overset{q}{x})\right)^{(k)} = \sum_{\rho=0}^{\rho=k}(-1)^\rho\binom{k}{\rho}\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\,k-\rho}\,\partial x_2^{\,\rho}}\frac{\partial^k \varphi}{\partial x_2^{\,k-\rho}\,\partial x_1^{\,\rho}}.$$

Intanto si ha:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\,k-\rho}\,\partial x_2^{\,\rho}} = \frac{\underline{|m}}{\underline{|m-k}}\left\{p_1\alpha_1^{\,\rho}(x_1+\alpha_1 x_2)^{m-k} + p_2\alpha_2^{\,\rho}(x_1+\alpha_2 x_2)^{m-k} + \ldots + p_n\alpha_n^{\,\rho}(x_1+\alpha_n x_2)^{m-k}\right\},$$

$$\frac{\partial^k \varphi}{\partial x_2^{\,k-\rho}\,\partial x_1^{\,\rho}} = \frac{\underline{|q}}{\underline{|q-k}}\left\{r_1\beta_1^{\,k-\rho}(x_1+\beta_1 x_2)^{q-k} + r_2\beta_2^{\,k-\rho}(x_1+\beta_2 x_2)^{q-k} + \ldots + r_l\beta_l^{\,k-\rho}(x_1+\beta_l x_2)^{q-k}\right\};$$

onde:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\,k-\rho}\,\partial x_2^{\,\rho}}\frac{\partial^k \varphi}{\partial x_2^{\,k-\rho}\,\partial x_1^{\,\rho}} = \frac{\underline{|m}}{\underline{|m-k}}\frac{\underline{|q}}{\underline{|q-k}}\sum_{j=1}^{j=l}\sum_{i=1}^{i=n} p_i r_j \alpha_i^{\,\rho}\beta_j^{\,k-\rho}(x_1+\alpha_i x_2)^{m-k}(x_1+\beta_j x_2)^{q-k}$$

e sostituendo:

$$\left(f(\overset{m}{x}),\ \varphi(\overset{q}{x})\right)^{(k)} = \sum_{\rho=0}^{\rho=k}(-1)^\rho\binom{k}{\rho}\sum_{j=1}^{j=l}\sum_{i=1}^{i=n} p_i r_j \alpha_i^{\,\rho}\beta_j^{\,k-\rho}(x_1+\alpha_i x_2)^{m-k}(x_1+\beta_j x_2)^{q-k}. \quad (1)$$

Eseguendo il prodotto:

$$(x_1+\alpha_i x_2)^{m-k}(x_1+\beta_j x_2)^{q-k}$$

si ha:

$$(x_1+\alpha_i x_2)^{m-k}(x_1+\beta_j x_2)^{q-k}=x_1^{m+q-2k}+\left\{\binom{m-k}{1}\alpha_i+\binom{q-k}{1}\beta_j\right\}x_1^{m+q-2k-1}x_2+$$

$$+\left\{\binom{m-k}{2}\alpha_i^2+\binom{m-k}{1}\binom{q-k}{1}\alpha_i\beta_j+\binom{q-k}{2}\beta_j^2\right\}x_1^{m+q-2k-2}x_2^2+\ldots$$

$$\ldots+\alpha_i^{m-k}\beta_j^{q-k}x_2^{m+q-2k};$$

quindi

$$p_i r_j \alpha_i^{\rho}\beta_j^{k-\rho}(x_1+\alpha_i x_2)^{m-k}(x_1+\beta_j x_2)^{q-k}=p_i\alpha_i^{\rho}.r_j\beta_j^{k-\rho}x_1^{m+q-2k}+$$

$$+\left\{\binom{m-k}{1}p_i\alpha_i^{\rho+1}\cdot r_j\beta_j^{k-\rho}+\binom{q-k}{1}p_i\alpha_i^{\rho}\cdot r_j\beta_j^{k-\rho+1}\right\}x_1^{m+q-2k-1}x_2+$$

$$+\left\{\binom{m-k}{2}p_i\alpha_i^{\rho+2}\cdot r_j\beta_j^{k-\rho}+\binom{m-k}{1}\binom{q-k}{1}p_i\alpha_i^{\rho+1}\cdot r_j\beta_j^{k-\rho+1}+\right.$$

$$\left.+\binom{q-k}{2}p_i\alpha_i^{\rho}\cdot r_j\beta_j^{k-\rho+2}\right\}x_1^{m+q-2k-2}x_2^2+\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+p_i\alpha_i^{m+\rho-k}\cdot r_j\beta_j^{q-\rho}x_2^{m+q-2k}.$$

E ricordando che:

$$\sum_1^n p_i=a_0\quad,\quad\sum_1^n p_i\alpha_i^{\lambda}=a_{\lambda},$$

$$\sum_1^l r_j=b_0\quad,\quad\sum_1^l r_j\beta_j^{\mu}=b_{\mu}:$$

$$\sum_{j=1}^{j=l}\sum_{i=1}^{i=n}p_i r_j\alpha_i^{\rho}\beta_j^{k-\rho}(x_1+\alpha_i x_2)^{m-k}(x_1+\beta_j x_2)^{q-k}=$$

$$=a_{\rho}b_{k-\rho}x_1^{m+q-2k}+\left\{\binom{m-k}{1}a_{\rho+1}b_{k-\rho}+\binom{q-k}{1}a_{\rho}b_{k-\rho+1}\right\}x_1^{m+q-2k-1}x_2+$$

$$+\left\{\binom{m-k}{2}a_{\rho+2}b_{k-\rho}+\binom{m-k}{1}\binom{q-k}{1}a_{\rho+1}b_{k-\rho+1}+\binom{q-k}{2}a_{\rho}b_{k-\rho+2}\right\}x_1^{m+q-2k-2}x_2^2$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+a_{m+\rho-k}b_{q-\rho}x_2^{m+q-2k}.$$

E sostituendo nella (1) e riducendo:

$$(f,\varphi)^{(k)}=\left\{a_0b_k-\binom{k}{1}a_1b_{k-1}+\binom{k}{2}a_2b_{k-2}\ \ldots\ \pm a_kb_0\right\}x_1^{m+q-2k}$$

$$+\left\{\binom{q-k}{1}a_0b_{k+1}\left[\binom{m-k}{1}-\binom{k}{1}\binom{q-k}{1}\right]a_1b_k+\left[-\binom{k}{1}\binom{m-k}{1}+\binom{k}{2}\binom{q-k}{1}\right]a_2b_{k-1}\right.$$

$$+\left[\binom{k}{2}\binom{m-k}{1}-\binom{k}{3}\binom{q-k}{1}\right]a_3b_{k-2}+\left[-\binom{k}{3}\binom{m-k}{1}+\binom{k}{4}\binom{q-k}{1}\right]a_4b_{k-3}$$

$$+\ \ldots\ldots\ldots\ \pm\binom{k}{k}\binom{m-k}{1}a_{k+1}b_0\Big\}x_1^{m+q-2k-1}x_2$$

$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\left\{a_{m-k}b_q-\binom{k}{1}a_{m-k+1}b_{q-1}+\binom{k}{2}a_{m-k+2}b_{q-2}-\ \ldots\ldots\right.$$

$$\pm\binom{k}{k}a_mb_{q-k}\Big\}x_2^{m+q-2k}.$$

Notiamo pertanto che il coefficiente di $x_1^{m+q-2k-i}x_2^{i}$ è costituito da un'espressione di $k+i+1$ termini, ciascuno dei quali contiene il prodotto:

$$a_\sigma\, b_\tau,$$

in cui:

$$\sigma+\tau=k+i.$$

Avremo quindi le combinazioni:

$$a_0b_{k+i}\ ,\ a_1b_{k+i-1}\ ,\ a_2b_{k+i-2}\ ,\ \ldots\ ,\ a_{k+i}b_0\ ,$$

delle quali mancheranno quelle che hanno l'indice delle a maggiore di m, o l'indice delle b maggiore di q. Possiamo quindi scrivere l'$(i+1)^{mo}$ termine della spinta nel seguente modo:

$$(A_{i,0}a_0b_{k+i}+A_{i,1}a_1b_{k+i-1}+A_{i,2}a_2b_{k+i-2}+\ldots\ldots\ldots$$

$$+A_{i,\lambda}a_\lambda b_{k+i-\lambda}+\ldots\ldots+A_{i,k+i}a_{k+i}b_0)x_1^{m+q-2k-i}x_2^{i}\ ,$$

essendo:

$$A_{i,\lambda}=\sum_{\sigma=0}^{\sigma=i}(-1)^{\lambda-i+\sigma}\binom{k}{\lambda-i+\sigma}\binom{m-k}{i-\sigma}\binom{q-k}{\sigma}\ ;$$

s' ottiene cioè:

$$\left(f(\overset{m}{x}),\, \varphi(\overset{q}{x})\right)^{(k)} = \sum_{i=0}^{i=m+q-2k} C_i x_1^{m+q-2k-i} x_2^{\,i} \qquad (A)$$

in cui

$$C_i = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=k+i} A_{i,\lambda} a_\lambda b_{k+i-\lambda} \qquad (B)$$

e

$$A_{i,\lambda} = \sum_{\sigma=0}^{\sigma=i} (-1)^{\lambda-i+\sigma} \binom{k}{\lambda-i+\sigma} \binom{m-k}{i-\sigma} \binom{q-k}{\sigma} \qquad (C)$$

§ II.

Applicando le formole ottenute (A), (B), (C), calcoliamo la 4ª spinta di $f(\overset{9}{x})$ sopra $\varphi(\overset{7}{x})$, di cui ci siamo occupati al principio della presente Nota. Si ha:

$$(f, \varphi)^{IV} = C_0 x_1^8 + C_1 x_1^7 x_2 + \ldots\ldots + C_8 x_2^8,$$

e calcolando separatamente i coefficienti di ciascun termine:

$$C_0 = A_{0,0} a_0 b_4 + A_{0,1} a_1 b_3 + A_{0,2} a_2 b_2 + A_{0,3} a_3 b_1 + A_{0,4} a_4 b_0$$

$$C_1 = A_{1,0} a_0 b_5 + A_{1,1} a_1 b_4 + A_{1,2} a_2 b_3 + A_{1,3} a_3 b_2 + A_{1,4} a_4 b_1 + A_{1,5} a_5 b_0$$

. . . . . .

. . . . . .

$$C_8 = A_{8,5} a_5 b_7 + A_{8,6} a_6 b_6 + A_{8,7} a_7 b_5 + A_{8,8} a_8 b_4 + A_{9,9} a_9 b_3.$$

Se vogliamo il coefficiente del prodotto $a_i b_j (i = 0, 1, 2 \ldots 9;\, j = 0, 1, 2, \ldots, 7)$ ci serviamo della (C). Per esempio: il coefficiente $A_{3,1}$ di $a_1 b_6$ (in C_3) è:

$$\binom{5}{1}\binom{3}{2} - \binom{4}{1}\binom{3}{3} = 11.$$

§ III.

Ponendo $k = q$ nella (A) del § I, otterremo l'espressione della spinta *massima* di f su φ.

In tal caso è:

$$A_{i,\lambda} = (-1)^{\lambda-i} \binom{q}{\lambda-i} \binom{m-q}{i},$$

dunque:

$$\left(f(\overset{m}{x}), \varphi(\overset{q}{x})\right)^{(q)} = \sum_{i=0}^{i=m-q} C_i x_1^{m-q-i} x_2^{i},$$

$$C_i = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=q+i} (-1)^{\lambda-i} \binom{q}{\lambda-i} \binom{m-q}{i} a_\lambda b_{q+i-\lambda}$$

§ IV.

Supponiamo eguali gli ordini delle forme date, siano cioè:

$$f = a_0 x_1^m + \binom{m}{1} a_1 x_1^{m-1} x_2 + \ldots\ldots + a_m x_2^m$$

$$\varphi = b_0 x_1^m + \binom{m}{1} b_1 x_1^{m-1} x_2 + \ldots\ldots + b_m x_2^m.$$

Per $m = q$, la (C) del § I diventa:

$$A_{i,\lambda} = \sum_{\sigma=0}^{\sigma=i} (-1)^{\lambda-i+\sigma} \binom{k}{\lambda-i+\sigma} \binom{m-k}{i-\sigma} \binom{m-k}{\sigma},$$

nello sviluppo della quale i termini estremi ed i termini equidistanti dagli estremi hanno rispettivamente come fattori comuni:

$$\binom{m-k}{i}, \binom{m-k}{i-1}\binom{m-k}{1}, \binom{m-k}{i-2}\binom{m-k}{2}, \ldots.$$

Quindi per $i = 2d+1$, essendo $2d+2$ il numero dei termini di $A_{i,\lambda}$, se mettiamo in vista i fattori comuni, riduciamo l'espressione di $A_{i,\lambda}$ a $d+1$ termini; per $i = 2d$ invece, avremo anche $d+1$ termini l'ultimo dei quali, però, non si riduce.

Per conseguenza

$$\left.\begin{aligned} (\overset{m}{f}, \overset{m}{\varphi})^{(k)} &= \sum_{i=0}^{i=2(m-k)} C_i x_1^{2(m-k)-i} x_2^{i} \\ \text{dove} \qquad & \\ C_i &= \sum_{\lambda=0}^{\lambda=k+i} A_{i,\lambda} a_\lambda b_{k+i-\lambda} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

come nel caso generale, e:

$$\left.\begin{aligned}
A_{i,\lambda} &= \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\frac{i-1}{2}} \left[(-1)^{\lambda-i+\sigma}\binom{k}{\lambda-i+\sigma}+(-1)^{\lambda-\sigma}\binom{k}{\lambda-\sigma}\right]\binom{m-k}{i-\sigma}\binom{m-k}{\sigma} \quad \textit{per i dispari} \\
A_{i,\lambda} &= \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\frac{i}{2}-1} \left[(-1)^{\lambda-i+\sigma}\binom{k}{\lambda-i+\sigma}+(-1)^{\lambda-\sigma}\binom{k}{\lambda-\sigma}\right]\binom{m-k}{i-\sigma}\binom{m-k}{\sigma}+ \\
&\qquad +(-1)^{\lambda-\frac{i}{2}}\binom{k}{\lambda-\frac{i}{2}}\binom{m-k}{\frac{i}{2}}^2 \quad \textit{per i pari.}
\end{aligned}\right\} (2)$$

§ V.

Per calcolare l'espresssione della k^a spinta della forma $f(\overset{m}{x})$ sopra sè stessa, notiamo che nello sviluppo di:

$$C_i = \sum_{\lambda=\sigma}^{\lambda=k+i} A_{i,\lambda} a_\lambda a_{k+i-\lambda},$$

i termini estremi ed i termini equidistanti degli estremi hanno rispettivamente i fattori comuni:

$$a_0 a_{k+i}\ ,\ a_1 a_{k+i-1}\ , \ldots\ldots$$

I risultati sono:

$$(f\,,f)^{(k)} = \sum_{i=0}^{i=2(m-k)} C_i\, x_1^{2(m-k)-i} x_2^{\,i}$$

in cui:

$$C_i = 2 \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\frac{k+i-1}{2}} A_{i,\lambda} a_\lambda a_{k+i-\lambda} \qquad \text{per } i \textit{ dispari}$$

$$C_i = 2 \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\frac{k+i}{2}-1} A_{i,\lambda} a_\lambda a_{k+i-\lambda} + A_{i,\frac{k+i}{2}}\, a^2_{\frac{k+i}{2}} \quad \text{per } i \textit{ pari.}$$

Le $A_{i,\lambda}$ sono le (2) del § precedente.

Per avere l' espressione dell' Hessiano d' una forma $f(\overset{m}{x})$ basta porre $k = 2$ nelle ultime formole ottenute, giacchè sappiamo che la seconda spinta d' una forma sopra sè stessa ci dà l' Hessiano della forma, a meno d' una costante.

S' ha quindi:

$$H = (f, f)'' = \sum_{i=0}^{i=2(m-2)} C_i x_1^{2(m-2)-i} x_2^i, \text{ ecc.}$$

Napoli, giugno 1903.

ANNUNZI BIBLIOGRAFICI

Complementi di Matematica ad uso dei Chimici e dei Naturalisti di Giulio Vivanti prof. ord. nella R. Università di Messina. N.° X + 381 pagine. (Milano, Manuale Hoepli, 1903).

Il libro è diviso in sei parti. Parte I Algebra, II Geometria analitica, III Calcolo infinitesimale, IV Calcolo delle probabilità, V Meccanica, VI Termodinamica e meccanica chimica.

Esercizii di Calcolo Infinitesimale del Dott. Luciano Orlando, pag. 118 (Messina, libreria editrice, Ant. Trimarchi).

UN TEOREMA SUI GRUPPI ABELIANI

PER

VINCENZO D'ESCAMARD

1. Sarebbe utile studiare quelle sostituzioni che si hanno, moltiplicando fra loro le sostituzioni di un gruppo dato, permutate in tutti i modi possibili. Io esaminerò il caso che di tali sostituzioni prodotto non ve ne sia che una, vale a dire il caso che il gruppo dal quale si prendono le mosse sia abeliano.

E prima supponendo che, ancora più in particolare, si abbia un gruppo ciclico la cui base S abbia il periodo p, scrivendo il gruppo $G \equiv S, S^2, S^3, \ldots, S^p$ il prodotto sarà

$$P = S^{p\frac{(p+1)}{2}} = \left| \begin{array}{ll} (S^p)^{\frac{p+1}{2}} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . & p \text{ dispari} \\ (S^{p+1})^{\frac{p}{2}} = (S^p)^{\frac{p}{2}} \cdot S^{\frac{p}{2}} = S^{\frac{p}{2}} & p \text{ pari} \end{array} \right.$$

dunque: « il prodotto delle sostituzioni di un gruppo ciclico è l'identità o la sostituzione base elevata alla metà del periodo, secondo che questo è dispari o pari ».

2. Dato un gruppo abeliano qualunque G, sia $\sigma_1\ \sigma_2 \ldots \sigma\ \sigma_i$ una sua base e $p_1\ p_2 \ldots p_i$ i rispettivi periodi. È noto che le sostituzioni del gruppo son tutte della forma:

$$(1) \qquad \sigma_1^{\beta_1}\sigma_2^{\beta_2}, \ldots, \sigma_i^{\beta_i} \ (\beta_h = 1, 2, 3, \ldots, p_h)$$

e che inoltre le (1) son tutte distinte. Nel prodotto P delle sostituzioni di G la σ_1 comparirà come segue:

$$(2) \qquad \sigma_1^{p_2 p_3 \ldots p_i \frac{p_1(p_1+1)}{2}}$$

e in modo analogo comparirà ogni σ_h: ci fermeremo a σ_1.

Se p_1 è dispari, la sostituzione (2) si potrà scrivere:

$$\left(\sigma_1^{p_1 p_2 \ldots p_i}\right)^{\frac{p_1+1}{2}} = 1$$

e se p_1 è pari:

$$\left(\sigma_1^{(p_1+1)p_2\cdots p_i}\right)^{\frac{p_1}{2}} = \left(\sigma_1^{p_1p_2\cdots p_i}\right)^{\frac{p_1}{2}} \sigma_1^{\frac{p_1p_2\cdots p_i}{2}} = \sigma_1^{\frac{p_1p_2\cdots p_i}{2}}$$

Ora è chiaro che se, oltre σ_1, anche σ_2 (p. es.) ha il periodo p_2 pari, la potenza di σ_1 ultimamente scritta è l'identità, non altrimenti che l'analoga potenza di σ_2; se invece solo p_1 è pari (come avviene in particolare se G è il gruppo ciclico di base σ_1) quella potenza di σ_1 non è l'identità ma rappresenta il prodotto P di tutte le sostituzioni del gruppo.

Dunque: « se si ha un gruppo abeliano G se ne consideri una base $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_i$ dai periodi $p_1p_2\ldots p_i$: se tali numeri p son tutti dispari o più di uno è pari, il prodotto P è l'identità, se uno solo dei numeri p(p_1 ad es.) è pari, il prodotto P è dato dalla potenza di σ_1 il cui esponente è il semiprodotto di $p_1p_2\ldots p_i$ ». Questo teorema mostra che la potenza in questione è un invariante di G, cioè: se G ha la base $\sigma_1\,\sigma_2\ldots\sigma_i$ coi periodi $p_1p_2\ldots p_i$, ove solo p_1 è pari; se prendiamo un' altra base $\tau_1\,\tau_2\ldots\tau_j$ coi periodi $q_1\,q_2\ldots q_j$ una sola q (p. es. q_1) sarà pari e si avrà:

$$\sigma_1^{\frac{p_1p_2\cdots p_i}{2}} = \tau_1^{\frac{q_1q_2\cdots q_j}{2}} = \ldots = \mathrm{P}.$$

3. *Esempii* — Il teorema che riguarda il caso dei gruppi ciclici non merita per la sua semplicità, di essere illustrato da esempii: del resto di gruppi ciclici se ne possono avere quanti se ne vogliono e su ciascuno di essi si può verificare il teorema. Volendo esempii di gruppi abeliani, che non siano ciclici, possiamo ricordare che di tali gruppi, quando si opera su non più di cinque oggetti, ve n'ha due tipi e due soli:

$$\mathrm{G} \equiv 1 \quad (x_0x_1)(x_2x_3) \quad (x_0x_2)(x_1x_3) \quad (x_0x_3)(x_1x_2) \equiv (1\,,\mathrm{T},\mathrm{T}',\mathrm{T}'')$$

$$\Gamma \equiv 1 \quad (x_0x_1)(x_2x_3) \quad (x_0x_1) \quad (x_2x_3) \quad \equiv (1\,,\mathrm{T},\mathrm{T}_1\,,\mathrm{T}_2)$$

e possiamo prendere per base di G T, T', per base di $\Gamma\,\mathrm{T}\,\mathrm{T}_1$. La P deve esser dunque in entrambi i casi l' identità, come si può verificare direttamente.

Si consideri il gruppo

$$\mathrm{G} \equiv (\mathrm{S},\mathrm{T}) \quad , \quad \text{essendo} \mathrm{S} = (x_0x_1x_2)(x_3x_4x_5) \text{ e } \mathrm{T} = (x_0x_3)x_1x_4)(x_2x_5);$$

G è abeliano e possiamo prenderne per base S,T. Il prodotto P è T come si verifica e come deve essere

Come ultimo esempio si prenda il gruppo abeliano $\mathrm{G} \equiv (\mathrm{U}\,,\mathrm{V})$ essendo $\mathrm{U} = (x_0x_1x_2)(x_3x_4x_5x_6)(x_7x_8x_9x_{10})$, $\mathrm{V} = (x_0x_2x_1)(x_3x_7)(x_4x_8)(x_5x_9)(x_6x_{10})$. Il gruppo G è di ordine 24 e per esso il prodotto P è l'identità. Abbiamo preso per base. p. es. U,V, come era lecito.

SOPRA UNA EQUAZIONE DEL DECIMO GRADO DI JACOBI

NOTA

DEL

Dott. GIACOMO CANDIDO

Poniamo

$$W_n(x, q) = x^n - \frac{n}{1} x^{n-2} q + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2} x^{n-4} q^2 - \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-6} q^3 + \ldots + $$

$$+ (-1)^r \frac{n(n-r-1)\ldots(n-2r+1)}{1.2\ldots r} x^{n-2r} q^r + \ldots,$$

dove i termini del secondo membro cessano quando l'esponente della x diviene negativo. Supponiamo che siano note due quantità λ e μ tali che si verifichi l'identità

$$W_n(x, q) - \lambda q W_n(x, q) = W_n(x, \mu q) \ldots \tag{1}$$

L'equazione

$$W_n(x, \mu q) = p$$

è risoluta dalla formola [1]

$$x = \sqrt[n]{\frac{p + \sqrt{p^2 - 4\mu^n q^n}}{2}} + \sqrt[n]{\frac{p - \sqrt{p^2 - 4\mu^n q^n}}{2}}.$$

Ciò premesso, consideriamo l'equazione

$$y^{2n} - \lambda q y^{2n-2} - \lambda q^{n-4} y^2 + q^n = p y^n \ldots \tag{2}$$

che mettiamo sotto la forma

$$y^n + \frac{q^n}{y^n} - \lambda q \left(y^{n-2} + \frac{q^{n-2}}{y^{n-2}} \right) = p \ldots \tag{3}$$

e che, ponendo

$$y + \frac{q}{y} = x$$

diviene

$$W_n(x, q) - \lambda q W_{n-2}(x, q) = p$$

---

[1] V. a pag. 103 del vol. XXXIX di questo giornale.

ossia

$$W_n(x, \mu q) = p \ldots \tag{4}$$

La (4) la diciamo la risolvente della (3).

Per la posizione fatta si ha

$$2y = x \pm \sqrt{x^2 - 4q}$$

e la (3) è risoluta da

$$y = \frac{1}{2}\left[\sqrt[n]{\frac{p + \sqrt{p^2 - 4\mu^n q^n}}{2}} + \sqrt[n]{\frac{p - \sqrt{p^2 - 4\mu^n q^n}}{2}} \pm \right.$$

$$\left. \pm \sqrt{\sqrt[2n]{\frac{p + \sqrt{p^2 - 4\mu^n q^n}}{2}} + \sqrt[2n]{\frac{p - \sqrt{p^2 - 4\mu^n q^n}}{2}} + 2\mu q - 4q}\right].$$

Applicazione. Consideriamo l' equazione del decimo grado di Jacobi (¹)

$$y^{10} - 5qy^6 - 5q^4y^2 + q^5 = py^5.$$

La sua risolvente è

$$x^5 - 10qx^3 + 20q^2x = p$$

e poichè in questo caso $\lambda = 5$ e $\mu = 2$ si ha

$$y = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{p + \sqrt{p^2 - 128q^5}}{2}\right)^{\frac{1}{5}} + \left(\frac{p - \sqrt{p^2 - 128q}}{2}\right)^{\frac{1}{5}} \pm \right.$$

$$\left. \pm \sqrt{\left(\frac{p + \sqrt{p^2 - 128q^5}}{2}\right)^{\frac{2}{5}} + \left(\frac{p - \sqrt{p^2 - 128q^5}}{2}\right)^{\frac{2}{5}}}\right]$$

che è la risoluzione di Jacobi.

Osservazione — Per costruire equazioni analoghe a quelle di Jacobi si può adoperare il metodo d'identificazione dei coefficienti nella (1) e si ricavano i valori di λ e μ che soddisfanno al caso.

Esempii — L' equazione di 6° grado analoga a quella di Jacobi è

$$y^6 - 3qy^4 - 3y^2q^2 + q^3 = py^3$$

che ha per risolvente

$$x^3 - 6xq = p.$$

L' equazione di grado 8° è

$$y^8 - 8qy^6 - 8q^3y^2 + q^4 = py^4$$

che ha per risolvente

$$x^4 - 12x^3q + 18q^2 = p.$$

(¹) V. Nouv. Ann. de Math. année 1864 pg. 120 e 121.

SUI SISTEMI LINEARI D'EQUAZIONI ALGEBRICHE

NOTA

DI

F. GIUDICE

Parendomi alquanto geniale, e conforme a superiori teorie, il metodo seguito dal Prof. Ricci [1] nella trattazione dei sistemi di equazioni algebriche di primo grado, ritengo conveniente fermarvi sopra l'attenzione. Attenendosi ad esso si può giungere, con facilità ai seguenti risultati.

Se

$$x^{(1)}\ ,\ x^{(2)}\ ,\ \ldots\ ,\ x^{(m+n)}$$

è una particolare soluzione del sistema non omogeneo

$$a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sm+n}x_{m+n} = a_s \quad (s = 1\ ,\ 2\ ,\ \ldots\ ,\ m)\ ,$$

tutte le soluzioni di questo sistema son date da

$$x_k = x^{(k)} + y_k \quad (k = 1\ ,\ 2\ ,\ \ldots\ ,\ m+n)\ ,$$

dove per $y_1\ ,\ y_2\ ,\ \ldots\ ,\ y_{m+n}$ debbonsi porre le soluzioni del sistema omogeneo

$$a_{s1}\,y_1 + a_{s2}\,y_2 + \ldots + a_{sm+n}\,y_{m+n} = 0 \quad (s = 1\ ,\ 2\ ,\ \ldots\ ,\ m).$$

Se è diverso da zero almeno uno dei determinanti d'ordine m contenuti nella matrice delle prime m orizzontali del determinante

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1m+n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{m1} & u_{m2} & \ldots & u_{mm+n} \\ v_{11} & v_{21} & \ldots & v_{m+n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{1n} & v_{2n} & \ldots & v_{m+nn} \end{vmatrix}$$

---

[1] Gregorio Ricci; Lezioni di Algebra Complementare, pag. 84-110; fratelli Drucker, Padova 1900.

e la matrice delle ultime n orizzontali è formata da un sistema fondamentale di soluzioni del sistema d' equazioni lineari omogenee, che ha per matrice dei coefficienti quella delle prime m; allora, viceversa, le prime m orizzontali daranno un sistema fondamentale di soluzioni di quel sistema omogeneo, che ha la matrice delle ultime n orizzotali per matrice dei coefficienti. E due determinanti minori complementari appartenenti alle due matrici cioè uno d' ordine m preso nelle prime m orizzontali, o d'ordine n preso nelle n ultime, ed il suo complementare, nel determinante d' ordine $m+n$, sono od entrambi zero od entrambi diversi da zero.

Affinchè l'equazione

$$u_1 v_1 + \ldots + u_{m+n} v_{m+n} = 0$$

sia soddisfatta dagli n sistemi di valori dati dalle ultime n orizzontali è necessario e sufficiente ch' essa sia una combinazione lineare delle m, che hanno per matrice dei coefficienti quella delle prime m orizzantali, cioè che si possan fissare $c_1, c_2, \ldots, c_m$ in modo d'avere che

$$u_r = c_1 u_{1r} + c_2 u_{2r} + \ldots + c_m u_{mr} \quad (r = 1, 2, \ldots, m+n).$$

Ed affinchè il sistema di valori $v_1, v_2, \ldots, v_{m+n}$ sia una soluzione del sistema lineare omogeneo avente per matrice quella delle prime m orizzotali è necessario e sufficienie ch' esso sia una combinazione lineare delle ultime n orizzontali, cioè che si possan fissare $k_1, k_2, \ldots, k_n$ in modo d'avere che

$$v_r = k_1 v_{r1} + k_2 v_{r2} + \ldots + k_n v_{rn} \quad (r = 1, 2, \ldots, m+n).$$

SULLA RELAZIONE DI DIPENDENZA FRA LORO

DELLE FUNZIONI DELLE STESSE VARIABILI

LA CUI MATRICE JACOBIANA HA UNA DETERMINATA CARATTERISTICA

NOTA

DI

F. STASI.

Nella teoria delle funzioni, la proposizione che stabilisce la indipendenza di certe funzioni di un determinato sistema, delle medesime variabili, e la dipendenza delle rimanenti da queste, in relazione colla caratteristica della matrice jacobiana di tutte le funzioni, non mi pare che abbia ricevuto il suo completo sviluppo, collo stabilire la relazione effettiva esistente fra ciascuna delle funzioni dipendenti e quelle indipendenti, se non per semplici casi particolari.

Mi propongo perciò in questa nota di ricercare in generale in quali casi una tale relazione è lineare, e di farne l'applicazione a qualche caso notevole.

1. Premettiamo alcuni teoremi.

Sia

$$F = \sum B_i x_1^{\gamma_1^{(i)}} \ldots x_n^{\gamma_n^{(i)}}$$

una funzione razionale intera ed omogenea, d'ordine p nelle x, e siano f_1, $f_2, \ldots, f_m$ funzioni pure razionali intere ed omogenee delle medesime variabili degli ordini rispettivi $p_1, p_2, \ldots, p_m$ tali che i divisori comuni dei p_i siano divisori di p. Allora l'equazione indeterminata

$$p = \sum p_i \alpha_i \tag{1}$$

nelle α, si può risolvere, com'è noto, in numeri interi e positivi. Siano

$$\alpha_1^{(1)}, \ldots, \alpha_m^{(1)}$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_1^{(s)}, \ldots, \alpha_m^{(s)}$$

alcuni di questi sistemi di soluzioni, e consideriamo i prodotti

$$F_j = f_1^{\alpha_1^{(j)}} \ldots f_m^{\alpha_m^{(j)}}.$$

Se:

$$f_i = \sum a_i x_1^{\beta_1^{(i)}} \ldots x_n^{\beta_n^{(i)}}$$

sostituendo alle f la loro espressione ed effettuando i prodotti F_j, indichiamo con

$$P_1^{(j)}, \ldots, P_N^{(j)}$$

i coefficienti dei varii termini distinti di F_j, che sono evidentemente somme di prodotti di coefficienti a_i ed in numero di $\binom{p+n-1}{p} = N$, alcuni dei quali possono essere anche nulli, e consideriamo la matrice

$$\Delta = \begin{vmatrix} P_1^{(1)} & \ldots & P_N^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ P_1^{(s)} & \ldots & P_N^{(s)} \end{vmatrix}$$

dei coefficienti P delle F_j, disposti in guisa che gli elementi di una stessa colonna sono i rispettivi coefficienti delle F_j relativi ad uno stesso prodotto di x. Se h è la caratteristica di Δ, possiamo supporre, senza nuocere alla generalità della quistione, che

$$\Delta' = \begin{vmatrix} P_1^{(1)} & \ldots & P_h^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ P_1^{(h)} & \ldots & P_h^{(h)} \end{vmatrix}$$

sia uno dei determinanti d'ordine h non nullo. Allora se i determinanti

$$\theta_r = \begin{vmatrix} P_1^{(1)} & \ldots & P_h^{(1)} & P_r^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_1^{(h)} & \ldots & P_h^{(h)} & P_r^{(h)} \\ B_1 & \ldots & B_h & B_r \end{vmatrix}$$

che si ottengono dal precedente aggiungendo la linea dei coefficienti B della funzione F, ordinata come le F_j, ed un' altra colonna della matrice Δ colla B

corrispondente, sono tutti nulli, la funzione F può esprimersi in funzione delle f. Potremo allora difatto esprimere i valori delle prime h incognite $A_1, \ldots, A_h$ del sistema di equazioni lineari

$$B_1 = A_1 P_1^{(1)} + \ldots + A_s P_1^{(s)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$B_N = A_1 P_N^{(1)} + \ldots + A_s P_N^{(s)}$$

quando si siano stabiliti arbitrariamente i valori delle altre $s-h$. Avremo perciò

$$F = \sum B_i x_1^{\gamma_1^{(i)}} \ldots x_n^{\gamma_n^{(i)}} = \sum A_j f_1^{\alpha_1^{(j)}} \ldots f_m^{\alpha_m^{(j)}}.$$

Adunque una funzione omogenea F d'ordine p nelle x potrà esprimersi in funzione intera di altre funzioni $f_1, f_2, \ldots, f_m$, omogenee e degli ordini rispettivi $p_1, p_2, \ldots, p_m$ nelle x, allorquando i divisori comuni alle p_i sono anche divisori di p, ed allorquando determinata la caratteristica h della matrice dei coefficienti delle F_j, i determinanti θ_r sono tutti nulli.

2. Esaminiamo vari casi particolari.

1.° Supponiamo che i gradi delle funzioni f siano tali che

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_m = k$$

dimodochè la (2) diventi

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_m = \frac{p}{k}$$

si avrà che: una funzione omogenea F d'ordine p nelle x potrà esprimersi in funzione di altre funzioni $f_1, \ldots, f_m$ omogenee e dello stesso ordine, se il grado k delle f è un divisore del grado p di F, e se, determinata la caratteristica della matrice dei coefficienti delle F_j, i determinanti θ_r sono tutti nulli. In questo caso, se le f le riguardiamo come nuove variabili, risulta che la F si trasforma in una funzione di grado $\frac{p}{k}$ in esse.

2.° Supponiamo ancora che $p = k$. La (1) ammetterà i sistemi di soluzioni

$$\alpha_1 = 1 \ , \ \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_{m-1} = 0 \ , \ \alpha_m = 1$$

la condizione che k sia divisore di p essendo verificata e riducendosi la matrice delle $P_j^{(i)}$ a

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^{(1)} & \dots & a^{N(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^{(m)} & \dots & a_N^{(m)} \end{vmatrix}$$

si ha che se h è la caratteristica di Δ e se i determinanti θ_r, nei quali le P sono cambiate in a sono tutti nulli, la funzione F sarà esprimibile in funzione lineare delle f. Avremo cioè

$$F = \Sigma b_i f_i$$

dove le b_i sono costanti, delle quali $m - h$ sono arbitrarie.

3.° Supponiamo infine che $f_1, \dots, f_m$ siano funzioni lineari delle x, sia cioè

$$p_1 = \dots = p_m = 1.$$

Allora l'equazione (1) diventa

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_m = p$$

onde i sistemi di valori delle α sono ripartizioni in somme di m numeri interi e positivi di p. Considerandoli tutti si ricava che una funzione omogenea F di ordine p nelle x, potrà esprimersi per mezzo delle funzioni lineari $f_1, \dots, f_m$ se, determinata la caratteristica della matrice Δ dei coefficienti delle funzioni F_j, i determinanti θ_r sono tutti nulli. In questo caso la funzione F viene ad essere trasformata con sostituzioni lineari in un' altra con m variabili, onde se $m < n$ la trasformata conterrà un numero minore di variabili della funzione data.

Ponendo

$$y_1 = f_1, \dots, y_m = f_m$$

se $m = n$ e se è diverso da zero il modulo θ della sostituzione, sappiamo che la funzione F si può trasformare in una funzione omogenea delle y.

Intanto la matrice Δ diventa un determinante di ordine $\binom{n+p-1}{n}$, e dovrà essere evidentemente $\Delta \neq 0$, essendo i coefficienti A_j tutti perfettamente determinati. Se poi $\theta = 0$, la trasformazione diventa impossibile e dovrà in conseguenza essere $\Delta = 0$, e qualche $\theta_r \neq 0$. Adunque Δ è diverso o uguale a zero, se è diverso o eguale a zero θ, θ è quindi un fattore di Δ.

3. Consideriamo ora il determinante

$$D = \begin{vmatrix} f_{11} & \cdots & f_{m1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{1m} & \cdots & f_{mm} \end{vmatrix}$$

delle funzioni f omogenee nelle medesime variabili, e tali che le funzioni di una medesima colonna i^{ma} sono tutte dello stesso ordine p_i.

Se

$$f_{ij} = a_{ij}^{(\alpha_i)} x_1^{\alpha_{i1}} \ldots x_n^{\alpha_{in}} + \ldots + a_{ij}^{(\lambda_i)} x_1^{\lambda_{i1}} \ldots x_n^{\lambda_{in}}$$

sarà

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}^{(\alpha_1)} x_1^{\alpha_{11}} \ldots x_n^{\alpha_{1n}} + \ldots + a_{11}^{(\lambda_1)} x_1^{\lambda_{11}} \ldots x_n^{\lambda_{1n}} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots a_{m1}^{(\alpha_m)} x_1^{\alpha_{m1}} \ldots x_n^{\alpha_{mn}} + \ldots + a_{m1}^{(\lambda_m)} x_1^{\lambda_{m1}} \ldots x_n^{\lambda_{mn}} \\ \cdot \quad \cdot \\ a_{1m}^{(\alpha_1)} x_1^{\alpha_{11}} \ldots x_n^{\alpha_{1n}} + \ldots + a_{1m}^{(\lambda_1)} x_1^{\lambda_{11}} \ldots x_n^{\lambda_{1n}} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots a_{mm}^{(\alpha_m)} x_1^{\alpha_{m1}} \ldots x_n^{\alpha_{mn}} + \ldots + a_{mm}^{(\lambda_m)} x_1^{\lambda_{m1}} \ldots x_n^{\lambda_{mn}} \end{vmatrix}$$

dalla quale espressione si ricava

$$D = \sum_{\Sigma\beta_{1i} + \ldots + \Sigma\varepsilon_{mi} = \Sigma p_i} \begin{vmatrix} a_{11}^{(\beta_1)} & \ldots & a_{m1}^{(\varepsilon_m)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1m}^{(\beta_1)} & \ldots & a_{mm}^{(\varepsilon_m)} \end{vmatrix} \left(x_1^{\beta_{11}} \ldots x_n^{\beta_{1n}}\right) \ldots \left(x_1^{\varepsilon_{m1}} \ldots x_n^{\varepsilon_{mn}}\right).$$

ossia

$$D = \sum_{\Sigma\beta_{1i} + \ldots + \varepsilon_{mi}) = \Sigma p_i} \begin{vmatrix} a_{11}^{(\beta_1)} & \ldots & a_{m1}^{(\varepsilon_m)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1m}^{(\beta_1)} & \ldots & a_{mm}^{(\varepsilon_m)} \end{vmatrix} x_1^{(\beta_{11} + \cdots + \varepsilon_{m1})} \ldots x_n^{(\beta_{1n} + \cdots + \varepsilon_{mn})}.$$

Ne risulta che la funzione D è omogenea e di grado Σp_i, ed i suoi coefficienti sono somme di determinanti dello stesso ordine m.

Se le funzioni della colonna k^{ma} in D, per $k = 1, 2, \ldots, m$ sono omogenee

e di ordine p_k nelle x, meno la x_k, se è cioè

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}^{(\alpha_1)} x_2^{\alpha_{12}} \dots x_n^{\alpha_{1n}} + \dots + a_{11}^{(\lambda_1)} x_2^{\lambda_{12}} \dots x_n^{\lambda_{1n}} \dots\dots \\ \dots\dots a_{m1}^{(\alpha_m)} x_1^{\alpha_{m1}} \dots\dots x_{m-1}^{\alpha_{m(m-1)}} x_{m+1}^{\alpha_{m(m+1)}} \dots x_n^{\alpha_{mn}} + \\ + \dots + a_{m1}^{(\lambda_m)} x_1^{\lambda_{m1}} \dots x_{m-1}^{\lambda_{m(m-1)}} x_{m+1}^{\lambda_{m(m+1)}} x_n^{\lambda_{mn}} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1m}^{(\alpha_1)} x_2^{\alpha_{12}} \dots x_n^{\alpha_{1n}} + \dots + a_{1m}^{(\lambda_1)} x_2^{\lambda_{12}} \dots x_n^{\lambda_{1n}} \dots \\ \dots\dots a_{mm}^{(\alpha_m)} x_1^{\alpha_{m1}} \dots x_{m-1}^{\alpha_{m(m-1)}} x_{m+1}^{\alpha_{m(m+1)}} \dots x_n^{\alpha_{mn}} + \\ + \dots + a_{mm}^{(\lambda_m)} x_1^{\lambda_{m1}} \dots x_{m-1}^{\lambda_{m(m-1)}} x_{m+1}^{\lambda_{m(m+1)}} \dots x_n^{\lambda_{mn}} \end{vmatrix}$$

posto che $m \leqq n$, sarà

$$D = \sum \begin{vmatrix} a_{11}^{(\beta_1)} & \dots & a_{m1}^{(\varepsilon_m)} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1m}^{(\beta_1)} & \dots & a_{mm}^{(\varepsilon_m)} \end{vmatrix} \left(x_2^{\beta_{12}} \dots x_n^{\beta_{1n}}\right) \dots \left(x_1^{\varepsilon_{m1}} \dots x_{m-1}^{\varepsilon_{m(m-1)}} x_{m+1}^{\varepsilon_{m(m+1)}} \dots x_n^{\varepsilon_{mn}}\right)$$

onde D sarà omogenea in tutte le variabili e dell' ordine Σp_i, però in x_j per $j = 1, 2, \dots, m$, la D sarà dell'ordine $\Sigma p_i - p_j$.

Se le funzioni del determinante D sono tutte dello stesso ordine p, allora D sarà omogenea e dell'ordine $(m-1)p$ nelle x_i, per $i = 1, 2, \dots, m$, e del grado mp nelle altre.

4. Siano come innanzi $f_1, \dots, f_m$ m funzioni omogenee e dello stesso ordine p nelle medesime n variabili x, e sia h la caratteristica della matrice jacobiana

$$I = \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$$

Senza nuocere alla generalità della quistione possiamo supporre che

$$I' = \frac{\partial(f_1, \dots, f_h)}{\partial(x_1, \dots, x_h)}$$

sia uno dei determinanti non nulli d'ordine h della I. Ordinando f_i rispetto alla variabile x_j, sia

$$f_i = u_{ij}^{(0)} x_j^p + u_{ij}^{(1)} x_j^{p-1} + \dots + u_{ij}^{(p-1)} x_j + u_{ij}^{(p)}$$

dove $u_{ij}^{(s)}$ è evidentemente una funzione omogenea delle x, meno la x_j, e di ordine s.

Avremo

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = p u_{ij}^{(0)} x_j^{p-1} + (p-1) u_{ij}^{(1)} x_j^{p-2} + \ldots + u_{ij}^{(p-1)}$$

e quindi

$$\mathrm{I}' = \begin{vmatrix} (p u_{11}^{(0)} x_1^{p-1} + \ldots + u_{11}^{(p-1)}) \ldots (p u_{1h}^{(0)} x_h^{(p-1)} + \ldots + u_{1h}^{(p-1)}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (p u_{h1}^{(0)} x_1^{p-1} + \ldots + u_{h1}^{(p-1)}) \ldots (p u_{hh}^{(0)} x_h^{(p-1)} + \ldots + u_{hh}^{(p-1)}) \end{vmatrix}$$

ossia

$$\mathrm{I}' = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_h = 0, 1, \ldots, p-1} (p - i_1) \ldots (p - i_h) \begin{vmatrix} u_{11}^{(i_1)} & \ldots & u_{1h}^{(i_h)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{h1}^{(i_1)} & \ldots & u_{hh}^{(i_h)} \end{vmatrix} x_1^{(p-i_1-1)} \ldots x_h^{(p-i_h-1)}$$

Il determinante

$$\mathrm{I}'' = \begin{vmatrix} u_{11}^{(i_1)} & \ldots & u_{1h}^{(i_h)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{h1}^{(i_1)} & \ldots & u_{hh}^{(i_h)} \end{vmatrix}$$

è costituito di funzioni tali che quelle della colonna k^{ma} sono tutte dello stesso ordine i_k, ed omogenee nelle variabili $x_1, \ldots, x_n$ tranne la x_k. Per l'osservazione fatta al teorema del numero precedente, sarà

$$\mathrm{I}'' = \begin{vmatrix} a_{11}^{(i_1)} \ldots a_{1h}^{(i_h)} \\ \ldots\ldots \\ a_{h1}^{(i_1)} \ldots a_{hh}^{(i_h)} \end{vmatrix} \left(x_2^{\alpha_2^{(i_2)}} \ldots x_n^{\alpha_n^{(i_n)}} \right) \ldots \left(x_1^{\alpha_1^{(i_{h-1})}} \ldots x_{h-1}^{\alpha_{h-1}^{(i_{h-1})}} x_{h+1}^{\alpha_{h+1}^{(i_{h+1})}} \ldots x_n^{\alpha_n^{(i_n)}} \right)$$

dove $\sum_j \alpha_1^{(i_j)} = i_1, \ldots, \sum_j \alpha_h^{(i_j)} = i_h$ e dove $a_{s1}^{(i_1)}, \ldots, a_{sh}^{(i_h)}$ non sono altro che coefficienti rispettivamente delle funzioni $u_{s1}^{(i_1)}, \ldots, u_{sh}^{(i_h)}$, ossia non sono altro che h coefficienti distinti o no della funzione f_s.

Si ricava quindi

$$I' = \sum C_i \begin{vmatrix} a_{11}^{(i_1)} & \dots & a_{1h}^{(i_h)} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{h1}^{(i_1)} & \dots & a_{hh}^{(i_h)} \end{vmatrix} x_1^{q_1} \dots x_n^{q_n}$$

dove C_i è una costante determinata e $\Sigma q_i = \Sigma p_i - h$.

Ora se tutti i determinanti che entrano sotto la sommatoria della espressione di I' fossero nulli sarebbe identicamente $I'=0$, contrariamente a quanto abbiamo supposto. Ne risulta che se la caratteristica di I è h, la matrice dei coefficienti

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nN} \end{vmatrix}$$

avrà almeno un determinante d'ordine h diverso da zero.

Consideriamo un determinante

$$I_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_l} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_l}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_l}{\partial x_l} \end{vmatrix}$$

d'ordine $l > h$. Analogamente a quanto abbiamo innanzi visto, esso può prendere la forma

$$I_1 = \sum C_j \begin{vmatrix} a_{11}^{(i_1)} & \dots & a_{1l}^{(i_l)} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{l1}^{(i_1)} & \dots & a_{ll}^{(i_l)} \end{vmatrix} x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n}$$

dove, al solito C_j è una costante determinata e $\Sigma r_i = \Sigma p_i - l$.

Ora se I_1 è identicamente nullo, sarà identicamente nullo il secondo membro della precedente espressione; ma tenendo presente che il coefficiente di un dato prodotto di x è una somma di determinanti d'ordine l^{mo}, può una tale somma essere zero, senza essere zero ciascun suo addendo. Il determinante I_1 è così identicamente nullo senza essere i determinanti di Δ d'ordine l tutti nulli. Ne risulta che se la caratteristica di I è h, la caratteristica di Δ è h o è superiore ad h. E poi chiaro che reciprocamente se la caratteristica di Δ è k, la caratteristica di I o è k, o è minore di k.

Questo risultato messo in relazione con quanto abbiamo precedentemente stabilito ci dice che se la caratteristica della matrice jacobiana d'un sistema di m funzioni omogenee delle medesime variabili e dello stesso grado è h, la relazione di dipendenza fra $m-h$ di esse e ciascuna delle rimanenti h è lineare, allorchè la caratteristica della matrice Δ dei coefficienti di tutte le funzioni è pure h. Nel caso che quest'ultima caratteristica sia k, dovendo essere $k > h$, dovranno, per quanto abbiamo visto, $m-k$ di esse funzioni potersi esprimere linearmente nelle rimanenti k. Sarà p. es.:

$$f_{k+1} = \sum_k a_i^{(k+1)} f_i \,, \ldots, f_m = \sum_k a_i^{(m)} f_i.$$

Ma per essere la jacobiana I di caratteristica h, delle k funzioni che compariscono sotto i sommatori, $k-h$ sono dipendenti dalle rimanenti h, ed evidentemente le relative relazioni di dipendenza non possono essere lineari, perchè altrimenti Δ sarebbe di caratteristica h. Tali relazioni devono essere dunque di grado superiore. Ne viene di conseguenza che anche le relazioni di dipendenza fra $f_{k+1}, \ldots, f_m$ e le h funzioni $f_1, \ldots, f_h$ sono di grado superiore.

Adunque se la jacobiana I e la matrice Δ d'un sistema di m funzioni omogenee e dello stesso ordine nelle medesime variabili hanno la medesima caratteristica h, $m-h$ delle funzioni sono funzioni lineari, a coefficienti perfettamente determinati delle rimanenti h.

5. Sarebbe interessante vedere in quali campi di variabili la caratteristica di I uguaglia sempre quella di Δ. Riserbandomi di fare ciò in altra nota, si osservi per ora che in qualunque campo di variabili, se si hanno più funzioni $f_1, \ldots, f_m$, la di cui matrice jacobiana ha tutti i determinanti del second' ordine nulli, gli elementi di una linea di Δ sono proporzionali a quelli di una linea parallela.

Si avrà p. es., se f_{ij} è la derivata di f_i rispetto ad x_j

$$f_{i1} = k_{ih} f_{h1} \,, \ldots, f_{in} = k_{ih} f_{hn}$$

ed evidentemente k_{ih} è una costante, essendo tutte le prime derivate delle f dello stesso ordine.

Si ha intanto

$$\sum_j x_j f_{ij} = k_{ih} \sum_j x_j f_{hj}$$

ossia

$$f_i = k_{ih} f_h.$$

Si ricava che le funzioni date a meno d'una costante sono tutte uguali fra loro, e quindi la matrice Δ è pure di caratteristica 1.

Da ciò risulta che nel campo binario le caratteristiche di I e di Δ sono sempre uguali.

Se le funzioni date sono tutte lineari, la matrice jacobiana coincide colla matrice Δ, e ritroviamo il risultato notissimo che se h è la caratteristica della matrice dei coefficienti di un sistema di m forme lineari delle medesime variabili, $m-h$ di esse sono funzioni lineari delle rimanenti h.

6. Supponiamo ora che $f_1, f_2, \ldots, f_m$ siano omogenee degli ordini rispettivi $p_1, p_2, \ldots, p_m$ e sia h la caratteristica della loro matrice jacobiana. Chiamando δ il minimo multiplo comune dei numeri p_i e ponendo $p'_i = \frac{\delta}{p_i}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, le funzioni $f_1^{p'_1} = f'_1, \ldots, f_m^{p'_m} = f'_m$ saranno omogenee e dello stesso ordine δ. La caratteristica della jacobiana I' delle f' è h, giacchè I' si ottiene da I moltiplicando gli elementi della sua i^{ma} linea per la potenza $f_i^{p_i-1}$. Se ora è anche h la caratteristica della matrice Δ' dei coefficienti delle f', saranno h funzioni f' indipendenti, e le altre $m-h$ funzioni lineari di queste. Sarà cioè per es.:

$$f'_i = \sum_{j=1}^{h} a_{ij} f'_j \qquad \text{per } i = h+1, \ldots, m$$

ossia

$$f_i^{p'_i} = \sum_j a_{ij} f_j^{p'_j}$$

dove le a_{ij} sono costanti determinate alla solita maniera.

Adunque se le m funzioni $f_1, \ldots, f_m$, omogenee e degli ordini rispettivi $p_1, \ldots, p_m$ nelle medesime variabili, hanno la jacobiana di caratteristica h, e se è pure h la caratteristica della matrice Δ' dei coefficienti delle funzioni $f_1^{p'_1}, \ldots, f_m^{p'_m}$, dove, essendo δ il minimo multiplo comune dei gradi p_i delle f, è $p'_i = \frac{\delta}{p_i}$, per $m-h$ funzioni si verifica che la potenza $f_i^{p'_i}$, è una funzione lineare, a coefficienti perfettamente determinati, delle analoghe potenze delle funzioni rimanenti.

7. Siano ora le funzioni $f_1, \ldots, f_m$ non omogenee degli ordini massimi rispettivi $p_1, \ldots, p_m$ nelle medesime variabili. Operando nelle f la sostituzione

$$x_1 = \frac{x'_1}{x'_0}, \ldots, x_n = \frac{x'_n}{x'_0}$$

si ha

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{x'^{\,p_i}_0} f'_i(x'_0, \ldots, x'_n)$$

dove f'_i è evidentemente omogenea nelle variabili $x'_0, \ldots, x'_n$ e dell'ordine p_i.

Ora se h è la caratteristica della matrice jacobiana I delle f, $m-h$ delle f sono funzioni delle altre; ed evidentemente altrettanto deve verificarsi delle f', potendosi ogni relazione nelle f tradurre in un'altra fra le f'. Sarà perciò la matrice jacobiana I' delle f' anche di caratteristica h. Osservando poi che la matrice Δ' delle $f'^{p'_i}$ non differisce dalla matrice Δ delle $f_i^{p'_i}$, si deduce che se h è la caratteristica tanto di I che di Δ, sarà, per quanto abbiamo innanzi stabilito p. es.

$$f_i'^{p'_i} = \sum_{j=1}^{j=h} a_{ij} f_j'^{p'_j}, \; i = h+1, \ldots, m$$

dove $p'_i = \frac{\delta}{p_i}$ e δ è ora il minimo multiplo comune dei gradi massimi $p_1, \ldots, p_m$ rispettivamente delle funzioni $f_1, \ldots, f_m$.

Tenendo presente che

$$f'_i = f_i$$

quando si pone $x'_0 - 1$, $x'_1 = x_1, \ldots, x'_n = x_n$, si ha che

$$f_i^{p'_i} = \sum a_{ij} f_j^{p'_j}.$$

Adunque se la caratteristica della jacobiana e della matrice Δ di un sistema di m funzioni non omogenee è h, ciascuna delle $m-h$ funzioni dipendenti è tale che la sua potenza di grado uguale al quoziente del minimo comune multiplo dei gradi massimi di tutte le funzioni, per il suo grado, si esprime linearmente nelle analoghe potenze delle rimanenti h funzioni.

8. Facciamo ora qualche caso particolare.

Nel campo binario siano

$$f = a_x^m \quad \varphi = \alpha_x^n$$

due forme dei gradi m ed n rispettivamente. Se p è il minimo multiplo comune di m ed n e se inoltre

$$(f, \varphi)' = 0$$

sarà, come abbiamo innanzi visto, la matrice Δ di $f^{m'}$ e $\varphi^{n'}$ di caratteristica 1, onde

$$f^{m'} = A\varphi^{n'}$$

dove $m' = \frac{p}{m}$, $n' = \frac{p}{n}$ e dove A è una costante che potrà determinarsi parago-

nando i coefficienti di uno stesso prodotto di x nei due membri. Se f e φ non sono omogenee ed è

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \end{vmatrix} = 0$$

identicamente, sarà pure

$$f^{m'} = A\varphi^{n'}$$

dove però m ed n sono i gradi massimi dei termini delle funzioni f e φ rispettivamente. In generale in un campo n^{rio} qualunque, se si hanno due funzioni omogenee o no dei gradi massimi rispettivi m ed n, e tali che tutti i determinanti di second' ordine della loro matrice jacobiana sono identicamente nulli, sarà sempre

$$f^{m'} = A\varphi^{n'}$$

dove m' ed n' hanno il solito significato.

9. Sia f una forma delle n variabili $x_1, \ldots, x_n$ dell' ordine p. Consideriamo il suo Hessiano

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

che può riguardarsi, com'è noto, come il jacobiano delle n derivate prime delle f. Perciò supponendo che sia h la caratteristica di H e che sia pure h la caratteristica della matrice Δ dei coefficienti di tutte le derivate prime di f, se

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_h} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_h \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_h^2} \end{vmatrix} = | = 0$$

le derivate $\frac{\partial f}{\partial x_{h+1}}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ soddisfano alle relazioni

$$\frac{\partial f}{\partial x_{h+1}} = \sum_{r=1}^{r=h} a_{h+1,r} \frac{\partial f}{\partial x_r}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} = \sum_{r=1}^{r=h} a_{n,r} \frac{\partial f}{\partial x_r}$$

dove le $a_{j,r}$ sono costanti perfettamente determinate. Fra le derivate prime di f sussistono dunque $n-h$ relazioni lineari. Ponendo

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
x_1 &= -y_1 + a_{h+1,1}\, y_{h+1} + \dots + a_{n,1}\, y_n \\
&\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_h &= -y_h + a_{h+1,h}\, y_{h+1} + \dots + a_{n,h}\, y_n \\
x_{h+1} &= -y_{h+1} \\
&\dots\dots \\
x_n &= -y_n
\end{aligned}
$$

e chiamando F la trasformata di f, si avrà

$$
\frac{\partial F}{\partial y_{h+1}} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_{h+1}} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_{h+1}} = a_{h+1,1}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + a_{h+1,h}\frac{\partial f}{\partial x_h} - \frac{\partial f}{\partial x_{h+1}} = 0
$$

$$
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
$$

$$
\frac{\partial F}{\partial y_n} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_n}{\partial y_n} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_n} = a_{n,h}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + a_{n,h}\frac{\partial f}{\partial x_h} - \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.
$$

La funzione F è dunque costante rispetto ad $y_{h+1}, \dots, y_n$, ond'è che mediante la sostituzione (1) la funzione f, si trasforma in un'altra con sole h variabili.

Adunque se la caratteristica dell'Hessiano di una forma f è h, e se è pure h la caratteristica della matrice Δ dei coefficienti delle sue derivate prime, esiste sempre una sostituzione lineare mediante la quale la forma data si trasforma in un'altra ad $m-h$ variabili di meno. Questa proposizione, in forma diversa, è nota per gli studi di Hesse (1) e Gordan e Nöther (2).

Ora noi abbiamo visto innanzi che nel campo binario la caratteristica di H coincide sempre con quella di Δ, ond'è che in tale campo di variabili la sostituzione esiste sempre che sia soddisfatta l'identità H=0. Per le quadriche di qualsiasi campo l'Hessiano coincidendo sempre con Δ, la sostituzione che trasforma la quadrica ennaria in una quadrica del campo ad h variabili, $h<n$, esiste sempre che sia h la caratteristica di H.

Anche questi risultati sono noti per gli studi di Gordan e Nöther (3). Ma risulta pure da tali studi che nel campo ternario e quaternario l'annullarsi identico di H è condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza della sostituzione lineare colla quale la forma f si trasforma in un'altra con una variabile di meno. Ciò vorrà dire, per i nostri risultati, che anche in questi campi la caratteristica di Δ coincide sempre con quella di H.

---

(1) Journ. für Math. XLII p. 117-124, LVI p. 263-269.

(2) Math. Ann. X p. 547-568.

(3) V. Memoria citata.

SULLA RIDUZIONE DELLE QUADRICHE A FORMA CANONICA

NOTA

DEL

Dott. LUCIANO ORLANDO

Data la quadrica

$$Q = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$$

tale che le a_{ij} siano reali e che il discriminante non sia nullo, si dimostra abbastanza semplicemente (e non faremo qui la dimostrazione) che *se una sostituzione ortogonale la riduce alla forma*

$$A_1 y_1^2 + A_2 y_2^2 + \ldots + A_n y_n^2$$

le $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *sono le* n *radici reali dell' equazione in* A:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-A & a_{12} & , \ldots , & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-A & , \ldots , & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & , \ldots , & a_{nn}-A \end{vmatrix} = 0 \qquad (1).$$

Qui dimostreremo invece che *questa sostituzione ortogonale effettivamente può determinarsi*; non perchè la cosa non sia nota, ma perchè la dimostrazione suol essere da alcuni autori omessa e da altri condotta in modo poco rigoroso.

Se, dunque, A_1 è una radice di (1), poniamo:

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11} - A_1) x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = 0 \\ a_{21} x_1 + (a_{22} - A_1) x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + (a_{nn} - A_1) x_n = 0 \end{array}\right\} \qquad (2),$$

e riteniamo che sia A_1 una radice di (1) multipla d'ordine p. È facile vedere che la caratteristica della matrice del sistema (2) è $n-p$ [1]. Sia

$$k_{11}\ ,\ k_{12}\ ,\ \ldots\ ,\ k_{1n}$$

una soluzione del sistema (2). Le k contengono un fattore comune arbitrario, ma noi supponiamo d'averne disposto perchè sia

$$k_{11}^2 + k_{12}^2 + \ldots + k_{1n}^2 = 1 \qquad (3).$$

Ora alle equazioni del sistema (2), delle quali solo $n-p$ sono indipendenti, possiamo aggiungere quest'altra:

$$k_{11}x_1 + k_{12}x_2 + \ldots + k_{1n}x_n = 0 \qquad (4);$$

ed avremo un nuovo sistema. Sia

$$k_{21}\ ,\ k_{22}\ ,\ \ldots\ ,\ k_{2n}$$

una soluzione di questo nuovo sistema, tale che, come prima, si abbia:

$$k_{21}^2 + k_{22}^2\ ,\ \ldots\ ,\ k_{2n}^2 = 1. \qquad (5).$$

L'equazione, (4) diventa:

$$k_{11}k_{21} + k_{12}k_{22} + \ldots + k_{1n}k_{2n} = 0 \qquad (6).$$

Ora, se è p sufficientemente grande, possiamo ancora aggiungere al sistema costituito da (2) e da (4) l'equazione:

$$k_{21}x_1 + k_{22}x_2 + \ldots + k_{2n}x_n = 0 \qquad (7),$$

ed avremo un nuovo sistema. Se di questo nuovo sistema è

$$k_{31}\ ,\ k_{32}\ ,\ \ldots\ ,\ k_{3n}$$

una soluzione, potremo sempre porre:

$$k_{31}^2 + k_{32}^2 + \ldots + k_{3n}^2 = 1. \qquad (8)$$

L'equazione (4) e la (7), appartenenti a questo nuovo sistema, forniscono inoltre:

$$k_{11}k_{31} + k_{12}k_{32} + \ldots + k_{1n}k_{3n} = 0\ ,\quad k_{21}k_{31} + k_{22}k_{32} + \ldots + k_{2n}k_{3n} = 0 \qquad (9).$$

---

[1] V. una mia Nota sul Giornale di Matematiche di Battaglini, settembre 1902.

Certamente possiamo continuare fino ad aggiungere a (2) $p-1$ equazioni come (4) e (7), e avremo p soluzioni le quali tutte verificheranno le condizioni d'ortogonalità, analoghe a (3), (5), (8), (6), (9).

Se A_2 è un' altra radice di (1), ed è

$$k_{(p+1)1}\ ,\ k_{(p+1)2}\ ,\ \ldots\ ,\ k_{(p+1)n}$$

una soluzione d'un sistema analogo a (2), ammesso che sia sempre:

$$k^2_{(p+1)1} + k^2_{(p+1)2} + \ldots + k^2_{(p+1)n} = 1\ ,$$

avremo simultaneamente:

$$\left.\begin{array}{l} k_{11}A_1 = a_{11}k_{11} + a_{12}k_{12} + \ldots + a_{1n}k_{1n} \\ k_{12}A_1 = a_{21}k_{11} + a_{22}k_{12} + \ldots + a_{2n}k_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_{1n}A_1 = a_{n1}k_{11} + a_{n2}k_{12} + \ldots + a_{nn}k_{1n} \end{array}\right\} \quad (10),$$

e

$$\left.\begin{array}{l} k_{(p+1)1}A_2 = a_{11}k_{(p+1)1} + a_{12}k_{(p+1)2} + \ldots + a_{1n}k_{(p+1)n} \\ k_{(p+1)2}A_2 = a_{21}k_{(p+1)1} + a_{22}k_{(p+1)2} + \ldots + a_{2n}k_{(p+1)n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_{(p+1)n}A_2 = a_{n1}k_{(p+1)1} + a_{n2}k_{(p+1)2} + \ldots + a_{nn}k_{(p+1)n} \end{array}\right\} \quad (11).$$

Moltiplichiamo rispettivamente le equazioni (10) per $k_{(p+1)1}\ ,\ k_{(p+1)2}\ ,\ \ldots\ ,\ k_{(p+1)n}$, e rispettivamente le (11) per $k_{11}\ ,\ k_{12}\ ,\ \ldots\ ,\ k_{1n}$. Sottraendo, si ottiene:

$$(A_1 - A_2)(k_{11}k_{(p+1)1} + k_{12}k_{(p+1)2} + \ldots + k_{1n}k_{(p+1)n}) = 0.$$

Ma, non essendo $A_1 = A_2$, risulta:

$$k_{11}k_{(p+1)1} + k_{12}k_{(p+1)2} + \ldots + k_{1n}k_{(p+1)n} = 0.$$

Continuando fino ad esaurire il numero delle radici diverse e il grado di multiplicità d' ognuna, troveremo n^2 grandezze k, le quali verificano le condizioni d' ortogonalità. Queste potranno comporre la matrice d' una sostituzione ortogonale atta a ridurre la data quadrica a forma canonica.

Messina, luglio 1903.

SOPRA UN' EQUAZIONE ALGEBRICA

NOTA

DI

UMBERTO SBRANA

Nella ricerca delle condizioni necessarie e sufficienti affinchè una forma quadratica ennaria: $f = \Sigma a_{rs} x_r x_s$ sia definita, quando le $x_1, x_2, \dots, x_n$ sono legate da $n - m < n$ relazioni lineari omogenee: $\sum_{r=1}^{r=n} b_{ir} x_r = 0$ $(i = 1, 2, \dots, n - m)$ indipendenti, ove le b cioè sono tali che la caratteristica della matrice $\| b_{1\lambda}\ b_{2\lambda}, \dots, b_{n-m,\lambda} \|$ sia eguale ad $n - m$, si presenta l'equazione in ω:

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} - \omega, & a_{12}, & \dots, & a_{1n}, & b_{11}, & b_{21}, & \dots, & b_{n-m,1} \\ a_{21}, & a_{22} - \omega, & \dots, & a_{2n}, & b_{12}, & b_{22}, & \dots, & b_{n-m,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots, & a_{nn} - \omega, & b_{1n}, & b_{2n}, & \dots, & b_{n-m,n} \\ b_{11}, & b_{12}, & \dots, & b_{1n}, & 0, & 0, & \dots, & 0 \\ b_{21}, & b_{22}, & \dots, & b_{2n}, & 0, & 0, & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-m,1}, & b_{n-m,2}, & \dots, & b_{n-m,n}, & 0, & 0, & \dots, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

la quale è al più di grado m. Tale equazione, come è noto, gode della proprietà di avere tutte le radici reali, quando tali sono le a, b e quando: $a_{ik} = a_{ki}$. La dimostrazione che si dà ordinariamente di questo teorema, è fondata sopra un metodo indiretto che consiste nel far vedere che la (1) è equivalente ad una certa: $| a'_{ik} - \omega b'_{ik} | = 0$, ove $a'_{ik} = a'_{ki}$, e le b'_{ik} sono i coefficienti di una forma quadratica definita positiva, equazione che è appunto a radici reali.

Una dimostrazione diretta assai semplice del detto teorema si può ottenere col seguente procedimento. Sia $\alpha + i\beta$ una radice della (1) decomposta nella sua

parte reale e nell' immaginaria; sarà allora sempre possibile di soddisfare alle $2n - m$ equazioni lineari:

$$a_{\lambda 1}x_1+a_{\lambda 2}x_2+\ldots+a_{\lambda n}x_n+b_{1\lambda}y_1+b_{2\lambda}y_2+\ldots+b_{n-m,\lambda}y_{n-m}=(\alpha+i\beta)x_\lambda \qquad (\lambda=1,2\ldots n)$$

$$b_{j1}\,x_1+b_{j2}\,x_2+\ldots+b_{jn}\,x_n=0 \qquad (j=1\,,2\,,\ldots,n-m) \tag{2}$$

con valori non tutti nulli delle incognite: $x_1\,,x_2\,,\ldots,x_n\,,y_1\,,y_2\,,\ldots,y_{n-m}$.

Osserviamo di più che non può darsi che il sistema (2) riesca soddisfatto per valori tutti nulli delle x e per valori non tutti nulli delle y, poichè infatti ove ciò avvenisse, si dovrebbe potere con tali valori delle y soddisfare al sistema:

$$(\lambda=1\,,2\,,\ldots,n) \qquad b_{1\lambda}\,y_1+b_{2\lambda}+,\ldots,+b_{n-m,\lambda}\,y_{n-m}=0$$

il che è assurdo, avendo supposto che la caratteristica della matrice: $\|b_{1\lambda}b_{2\lambda}\ldots b_{n-m,\lambda}\|$ sia eguale ad $n - m$.

Ciò posto sia: $x_1=\xi_1+i\eta_1\,,x_2=\xi_2+i\eta_2\,,\ldots,x_n=\xi_n+i\eta_n\,,y_1=r_1+is_1\,,$ $y_2=r_2+is_2\,,\ldots,y_{n-m}=r_{n-m}+is_{n-m}$ una soluzione del sistema (2); sostituendo nelle (2) ed eguagliando nei due membri di ciascuna di esse le parti reali e i coefficienti dell' immaginario, otterremo le relazioni seguenti:

$$\left.\begin{array}{l} a_{\lambda 1}\xi_1+a_{\lambda 2}\xi_2+,\ldots,+a_{\lambda n}\xi_n+b_{1\lambda}r_1+b_{2\lambda}r_2+,\ldots,+b_{n-m,\lambda}r_{n-m}=\alpha\xi_\lambda-\beta\eta_\lambda \\ a_{\lambda 1}\eta_1+a_{\lambda 2}\eta_2+,\ldots,+a_{\lambda n}\eta_n+b_{1\lambda}s_1+b_{2\lambda}s_2+,\ldots,+b_{n-m,\lambda}s_{n-m}=\alpha\eta_\lambda+\beta\xi_\lambda \end{array}\right\} \quad (3) \quad \lambda=(1,2\ldots n)$$

$$\left.\begin{array}{l} b_{j1}\,\xi_1+b_{j2}\,\xi_2+,\ldots,+b_{jn}\,\xi_n=0 \\ b_{j1}\,\eta_1+b_{j2}\,\eta_2+,\ldots,+b_{jn}\,\eta_n=0 \end{array}\right\} \quad (4) \quad (j=1\,,2,\ldots,n-m)$$

Moltiplicando la prima delle (3) per $-\eta_\lambda$, la seconda per ξ_λ e sommando troviamo:

$$a_{\lambda 1}[\xi_\lambda\eta_1-\xi_1\eta_\lambda]+a_{\lambda 2}[\xi_\lambda\eta_2-\xi_2\eta_\lambda]+,\ldots+a_{\lambda n}[\xi_\lambda\eta_n-\xi_n\eta_\lambda]+b_{1\lambda}[\xi_\lambda s_1-\eta_\lambda r_1]+$$

$$+b_{2\lambda}]\xi_\lambda s_2-\eta_\lambda r_2]+,\ldots,+b_{n-m,\lambda}[\xi_\lambda s_{n-m}-\eta_\lambda r_{n-m}]=\beta(\xi_\lambda^2+\eta_\lambda^2) \quad (\lambda=,\ldots,n).$$

Sommando queste ultime rispetto a λ da 1 ad n e osservando che a causa delle (4) si ha:

$$\sum_1^n{}_\lambda\, b_{j\lambda}[\xi_\lambda s_j-\eta_\lambda r_j]=0 \qquad (j=1\,,2\,,\ldots,n-m),$$

troviamo :

$$\sum_{i\lambda}(a_{\lambda i}-a_{i\lambda})(\xi_\lambda\eta_i-\xi_i\eta_\lambda)=\beta\sum_{1}^{n}{}_{\lambda}(\xi_\lambda^2+\eta_\lambda^2) \tag{5}$$

ove la sommatoria del 1° membro va estesa a tutte le combinazioni λi degli indici $1, 2, \ldots, n$. Quando si supponga $a_{\lambda i}=a_{i\lambda}$, la precedente diviene:

$$\beta\sum_{1}^{n}(\xi_\lambda^2+\eta_\lambda^2)=0$$

e poichè $\Sigma(\xi_\lambda^2+\eta_\lambda^2)=|=0$ non essendo le $\xi_\lambda+i\eta_\lambda$ tutte nulle, si conclude che $\beta=0$ ciò che dimostra il teorema.

Osserviamo come la (5) e la (6) permettano di generalizzare i risultati trovati da Ivar Bendixson (¹) per l'equazione:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\omega, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}-\omega, & \ldots, & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn}-\omega \end{vmatrix}=0;$$

basta perciò usare lo stesso procedimento. Supponiamo che non siano soddisfatte tutte le relazioni: $a_{\lambda i}=a_{i\lambda}$ e indichi g il massimo dei valori $\frac{|a_{\lambda i}-a_{i\lambda}|}{2}$, allora dalla (5) si trae:

$$|\beta|\sum_{1}^{n}(\xi_\lambda^2+\eta_\lambda^2)\leq 2g\sum_{i\lambda}|\xi_\lambda\eta_i-\xi_i\eta_\lambda|$$

o anche quadrando:

$$|\beta|^2\left[\sum(\xi_\lambda^2+\eta_\lambda^2)\right]^2\leq 4g^2\left[\sum_{i\lambda}|\xi_\lambda\eta_i-\xi_i\eta_\lambda|\right]^2. \tag{6}$$

Ma ora se $k_1 k_2, \ldots, k_n$ indicano n quantità reali qualsiansi, si ha manifestamente:

$$|k_1+k_2+,\ldots,+k_n|^2\leq n(k_1^2+k_2^2+,\ldots,+k_n^2),$$

perciò la (6) può scriversi:

$$|\beta|^2\left[\sum(\xi_\lambda^2+\eta_\lambda^2)\right]^2\leq 2n(n-1)g^2\left[\sum_{i\lambda}(\xi_\lambda\eta_i-\xi_i\eta_\lambda)^2\right] \tag{7}$$

(¹) Acta Mathematica. Bd. 25.

D'altra parte si ha:

$$\left\| \begin{matrix} \xi_1 \ \xi_2, \ \ldots, \xi_n \\ \eta_1 \ \eta_2, \ldots, \xi_n \end{matrix} \right\|^2 = \left(\sum \xi_\lambda^2\right)\left(\sum \eta_\lambda^2\right) - \left(\sum \xi_\lambda \eta_\lambda\right)^2 = \sum_{i\lambda} (\xi_\lambda \eta_i - \xi_i \eta_\lambda)^2$$

$$\left(\sum \xi_\lambda^2 + \sum \eta_\lambda^2\right)^2 = 4\left(\sum \xi_\lambda^2\right)\left(\sum \eta_\lambda^2\right) + \left(\sum \xi_\lambda^2 - \sum \xi_\lambda^2\right)^2,$$

dunque:

$$\left(\sum \xi_\lambda^2 + \sum \eta_\lambda^2\right)^2 \geq 4 \sum_{i\lambda} (\xi_\lambda \eta_i - \xi_i \eta_\lambda)^2$$

onde dalla (7) deduciamo subito:

$$|\beta| \leq g \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}$$

risultato stabilito dal Bendixson per l'equazione suddetta.

Se si moltiplica la prima delle (3) per ξ_λ, la seconda per η_λ e si somma, si trova

$$\lambda = 1, 2, \ldots, n \qquad \xi_\lambda \sum_i^n a_{\lambda i} \xi_i + \xi_\lambda \sum_k^{n-m} b_{k\lambda} r_k + \eta_\lambda \sum_i^n a_{\lambda i} \eta_i + \eta_\lambda \sum_k^{n-m} b_{k\lambda} s_k - \alpha(\xi_\lambda^2 + \eta_\lambda^2) = 0$$

da cui sommando rispetto a λ da 1 ad a, col tener conto delle (4) si trae:

$$\sum_{\lambda i} a_{\lambda i} (\xi_\lambda \xi_i + \eta_i \eta_i) - \alpha \sum_\lambda (\xi_\lambda^2 + \eta_\lambda^2) = 0$$

e ciò basta, a causa di un teorema di Weierstrass, per affermare che se m, M denotano rispettivamente la più piccola e la più grande delle radici dell' equazione:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - s, & \frac{a_{12} + a_{21}}{2}, & \ldots, & \frac{a_{1n} + a_{n1}}{2} \\ \frac{a_{21} + a_{12}}{2}, & a_{22} - s, & \ldots, & \frac{a_{2n} + a_{n2}}{2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{a_{n1} + a_{1n}}{2}, & \frac{a_{n2} + a_{2n}}{2}, & \ldots, & a_{nn} - s \end{vmatrix} = 0$$

si ha:

$$m \leq \alpha \leq \mathrm{M}.$$

Possiamo concludere insomma che le radici della (1) anche quando non si abbia per tutte le coppie di λ, μ: $a_{\lambda\mu} = a_{\mu\lambda}$, essendo poi le b reali e tali che la caratteristica della matrice: $\| b_{1\lambda}\ b_{2\lambda} \ldots b_{n-m,\lambda} \|$ sia $n-m$, soddisfano alle stesse relazioni di diseguaglianza delle radici dell' equazione $| a_{ik} - \varepsilon_{ik}\lambda | = 0$ ove è $\varepsilon_{ik} = 0$ per $i \neq k$, $\varepsilon_{ik} = 1$ per $i = k$. Notiamo infine come con processo analogo a quello usato si vedrebbe facilmente che le radici dell' equazione:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \omega c_{11}, & a_{12} - \omega c_{12}, & \ldots, & a_{1n} - \omega c_{1n}, & b_{11}, & \ldots, & b_{n-m,1} \\ a_{21} - \omega c_{21}, & a_{22} - \omega c_{22}, & \ldots, & a_{2n} - \omega c_{2n}, & b_{12}, & \ldots, & b_{n-m,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{11}, & b_{12}, & \ldots, & b_{1n}, & 0, & \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n-m,1}, & b_{n-m,2}, & \ldots, & b_{n-m,n}, & 0, & \ldots, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

soddisfano colla loro parte reale e col coefficiente dell' immaginario alle diseguaglianze stesse cui soddisfano le radici dell' altra: $| a_{ik} - \omega c_{ik} | = 0$, ove le c sono i coefficienti di una forma quadratica $\Sigma\, c_{is}\, x_s\, x_i$ definita positiva, diseguaglianze dimostrate per quest'ultima equazione dal Bendixson nel lavoro citato.

Pisa 31 Maggio 1903.

IL PROBLEMA DI DIRICHLET PER UN PARALLELEPIPEDO RETTANGOLO

NOTA

DI

PIETRO ALIBRANDI

1. In alcune ricerche d'Idrodinamica pubblicate sugli *Annali della Società degl' ingegneri italiani* (1900, fasc. IV) mi sono occupato della determinazione dei moti d'un liquido contenuto entro un recipiente parallelepipedo rettangolo munito di bocche d'efflusso praticate nelle pareti, nell'ipotesi dell'esistenza di un potenziale di velocità, ottenendo la soluzione del problema mediante una serie triplamente infinita di potenziali d'attrazione. Ora mi lusingo di far cosa grata ai lettori proponendomi, in questa breve Nota, di ricercare con lo stesso metodo la soluzione di un doppio problema più generale e di non mediocre importanza in Fisica Matematica, al quale, in senso lato, si può dare il titolo posto qui a capo.

E precisamente mi proporrò di *trovare una funzione* U *finita, continua ed uniforme nel campo di un dato parallelepipedo* S, *entro il quale, detta* Φ *una funzione data delle coordinate,* U *soddisfi all' equazione a derivate parziali di 2° ordine* $\Delta_2 U = \Phi$, *e sulla superficie del quale prendano valori dati: 1.° la funzione* U; *2.° la derivata* $\frac{dU}{dn}$ *rispetto alla normale* n *alla superficie di* S.

2. Incominceremo dal secondo problema, cioè quando il dato in superficie sia $\frac{dU}{dn} = F(x, y, z)$ funzione perciò nota al pari di Φ.

Sia per ora s una data superficie qualunque racchiudente uno spazio S. Dal teorema di Green sappiamo che, ritenendo come positivo il senso della normale n a partire dalla superficie verso l'interno di S, si ha l'equazione

$$\int_S \Delta_2 U \, dS + \int_s \frac{dU}{dn} \, ds = 0.$$

Onde affinchè il problema sia possibile, conviene sia

$$\int_S \Phi \, dS = - \int_s F \, ds$$

condizione a cui supporremo che i dati soddisfacciano.

Ora chiamisi $S\Phi_m$ il valore costante dei due membri dell'equazione scritta, vale a dire sia Φ_m il valore medio di Φ entro S. Cerchiamo anzitutto una funzione u che dentro S soddisfaccia alla

$$\Delta_2 u = \Phi - \Phi_m = \varphi \text{ (per brevità).}$$

Possiamo scegliere, ad esempio, la seguente, che si potrà subito verificare:

$$u = U - \frac{\Phi_m}{6}(x^2 + y^2 + z^2) = U - \frac{\Phi_m \rho^2}{6} \tag{1}$$

se ρ è il raggio vettore condotto dall'origine al punto (x, y, z).

Allora, in superficie, u dovrà soddisfare alla

$$\frac{du}{dn} = F - \frac{\Phi_m}{3}\left(x\frac{dx}{dn} + y\frac{dy}{dn} + z\frac{dz}{dn}\right)$$

equivalente all'altra

$$\frac{du}{dn} = F - \Phi_m \frac{\rho \cos(n, \rho)}{3},$$

od anche, detto brevemente f il 2° membro:

$$\frac{du}{dn} = f.$$

Evidentemente si avrà

$$\int_S \varphi\, dS = \int_s f\, ds = 0.$$

Ciò premesso, se si applica il menzionato teorema di Green ad u ed alla funzione $\frac{1}{r}$, essendo r la distanza

$$\overline{PQ} = r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

fra due punti di S, uno $P(x, y, z)$ arbitrario pel quale u si cerca, ed uno $Q(\xi, \eta, \zeta)$ variabile; è noto [1] che si riesce alla formola seguente:

$$u = \frac{1}{4\pi}\int_s \left(u\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r}\frac{du}{dn}\right) ds - \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\varphi\, dS}{r}. \tag{2}$$

---

[1] V. p. e. Cesàro — *Introduzione alla teoria matematica della elasticità*, Cap. IX, n. 4.

Sotto l'integrale di superficie si può eliminare u, oppure $\frac{du}{dn}$; noi, attesochè il dato del problema attuale è quest'ultima quantità, vogliamo eliminare u.

A tal uopo ammettiamo di conoscere una funzione armonica Γ tale che su di s abbiasi costantemente

$$\frac{d\Gamma}{dn} = -\frac{d\frac{1}{r}}{dn}. \tag{3}$$

Allora applicando di nuovo il teorema di Green, otterremo

$$\int_S \Gamma \cdot \Delta_2 u \cdot dS = -\int_s \left(u \frac{d\frac{1}{r}}{dn} + \Gamma \frac{du}{dn} \right) ds,$$

che può anche scriversi

$$\frac{1}{4\pi} \int_S \Gamma \varphi \, dS + \frac{1}{4\pi} \int_s \left(u \frac{d\frac{1}{r}}{dn} + \Gamma \frac{du}{dn} \right) ds = 0.$$

Sottraendo da (2), ne risulta

$$u = -\frac{1}{4\pi} \int_s \left(\Gamma + \frac{1}{r} \right) f \, ds - \frac{1}{4\pi} \int_S \left(\Gamma + \frac{1}{r} \right) \varphi \, dS. \tag{4}$$

Con tal formola il problema che ora ci occupa sarebbbe risoluto, trovata che fosse Γ, mentre per (1) è

$$U = u + \frac{\Phi_m \rho^2}{6}.$$

3. Facciamo per ora l'ipotesi semplice che S sia lo spazio infinito limitato dall'angolo diedro retto di due piani p_1, p_2. Consideriamo un punto $P(x, y, z)$ di S e le sue tre immagini P_1, P_2, P_3 ottenute come se p_1 e p_2 fossero due specchi piani rivolti verso P. Questo e P_1, P_2, P_3 staranno sui vertici d'un rettangolo pel quale tanto p_1 che p_2 sono piani di simmetria.

Dicansi r_1, r_2, r_3 le distanze di $Q(\xi, \eta, \zeta)$ da P_1, P_2, P_3 rispettivamente. Allora, se noi prendiamo la funzione

$$\Gamma' = \frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3},$$

avremo che la sua derivata $\frac{d\Gamma'}{dn}$ si annulla tanto su p_1 che su p_2. Scegliamo infatti p_1 come piano xy. Designate con indici omonimi le coordinate di P_1, P_2, P_3,

si ha

$$\frac{\partial \Gamma'}{\partial \zeta} = \frac{z-\zeta}{r^3} + \frac{z_1-\zeta}{r_1^3} + \frac{z_2-\zeta}{r_2^3} + \frac{z_3-\zeta}{r_3^3}.$$

Ma su p_1 è $\frac{d\Gamma'}{dn} = \frac{\partial \Gamma'}{\partial \zeta}$; onde

$$\left(\frac{d\Gamma'}{dn}\right)_{\zeta=0} = \frac{z}{r^3} + \frac{z_1}{r_1^3} + \frac{z_2}{r_2^3} + \frac{z_3}{r_3^3}.$$

Ora per costruzione si ha $r = r_1$, $r_2 = r_3$, $z = -z_1$, $z_2 = -z_3$; dunque resta

$$\left(\frac{d\Gamma'}{dn}\right)_{\zeta=0} = 0.$$

Ugualmente si mostrerebbe che $\frac{d\Gamma'}{dn}$ è nulla sul piano p_2.

Se pertanto diamo a Γ il valore

$$\Gamma = \Gamma' - \frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3},$$

è chiaro che essa è armonica e tale che $\frac{d\Gamma}{dn}$ diviene uguale a $-\frac{d\frac{1}{r}}{dn}$ tanto su p_1 che su p_2, come è richiesto.

4. Ma oramai è agevole vedere che p_1 e p_2 potrebbero non essere ortogonali, e di più che lo spazio S potrebbe esser limitato da un numero k (anche diverso da 2) di piani; e *purchè fuori di* S *si possano individuare, per qualunque suo punto* P, *dei punti* $P_1, P_2, \ldots, P_m$ *tali che il sistema* $P, P_1, P_2, \ldots, P_m$ *abbia per piani di simmetria ciascuno dei piani* $p_1, p_2, \ldots, p_k$, Γ *verrebbe data dall' espressione*

$$\Gamma = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{r_i},$$

essendo $r_i = \overline{QP_i}$.

La dimostrazione emergerebbe subito come sopra, prendendo uno dei piani coordinati coincidente con uno qualunque dei $p_1, \ldots . p_k$.

Ora la condizione è facilmente ottenibile se $p_1, \ldots, p_k$ sono fra loro ortogonali e se S non presenta angoli rientranti. Il caso completo è quello di $k = 6$ e precisamente quando S è un parallelepipedo rettangolo. Del resto non v' ha difficoltà ad applicare ciò che ora diremo ai casi di $k < 6$, cioè quando fossero rimosse a distanza infinita una o più facce del parallelepipedo. Si riconoscerà immediatamente che il sistema ausiliario $P_1 P_2 \ldots P_m$ si otterrà appunto *costruendo*

tutte le immagini di P *come se le 6 facce del parallelepipedo fossero 6 specchi piani rivolti verso l' interno*; elementare problema di ottica geometrica. Quindi in generale $m = \infty$.

Così per tutte le dette forme *ortoedriche* di S, che possono dunque variare dallo spazio limitato da un solo piano al parallelepipedo rettangolo, possiamo scrivere la (4)

$$(5) \qquad u = -\frac{1}{4\pi}\int_s \Gamma' f\, ds - \frac{1}{4\pi}\int_S \Gamma' \varphi\, dS$$

con $\Gamma' = \frac{1}{r} + \sum_1^m \frac{1}{r_i}$.

5. Gioverà dare alla (5) un' altra forma estesa a limiti infiniti.

Immaginiamo tutto lo spazio riempito di materia nel modo seguente. Consideriamo il solido parallelepipedo S come avente la densità $\delta = -\frac{\varphi}{4\pi}$ variabile, come in ipotesi, da punto all' altro. Poi supponiamo che, collocati al posto delle 6 facce altrettanti specchi piani, vengano *materializzate* tutte le infinite immagini dei varii punti di S, e loro vengano attribuite le rispettive densità δ dei punti oggetti. Allora è evidente:

1.° che, chiamando V il potenziale d' attrazione di tutto lo spazio così materializzato verso l'unità di massa del punto interno $P(x, y, z)$, cioè posto

$$V = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\varphi\, dS}{r},$$

si avrà per la nota formola di Poisson

$$\Delta_2 V = -4\pi\delta = \varphi(x, y, z);$$

2.° che siccome il piano di ciascuna delle facce del parallelepipedo è un piano di simmetria del sistema, cioè della distribuzione delle densità, $\frac{dV}{dn}$ ivi sarà nulla, come eguale alla componente normale dell' attrazione di masse elementari due a due uguali fra loro e simmetricamente disposte rispetto al piano.

Dopo ciò supponiamo invece S vuoto di materia, ma le 6 facce caricate di uno strato di spessore infinitesimo e di densità $\delta' = -\frac{f}{4\pi}$ pur variabile da un punto all' altro giusta l'ipotesi. Sieno poi materializzate come sopra le immagini del sistema così costruito, il quale sarà quello di tre famiglie di piani o lamine infinitamente sottili ed infinitamente estese (dividenti tutto lo spazio in tanti parallelepipedi uguali ad S) ed aventi densità evidentemente uguali a $2\delta' = -\frac{f}{2\pi}$.

Se allora consideriamo il potenziale V' d' attrazione di tale sistema sull' unità di massa concentrata in $P(x, y, z)$, avremo, estendendo l' integrazione a tutta la tripla famiglia:

$$V' = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{f\,ds}{r},$$

soddisfacente notoriamente alla formola di Laplace $\Delta_2 V' = 0$.

Valutiamo che cosa diverrà $\frac{dV'}{dn}$ per P situato sopra una data faccia di S. A tal uopo osserviamo che, preso per comodità il suo piano p_i per piano xy, la componente normale

$$\frac{dV'}{dn} = \frac{\partial V'}{\partial z}$$

dell' attrazione si può scindere in due termini: uno dovuto alle masse distribuite su p_i; l'altro a quelle distribuite su tutti i rimanenti piani della tripla famiglia: ora quest'ultimo termine è nullo per una ragione ovvia e già detta. Il primo termine poi può scriversi:

$$-\frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta)\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\,d\xi\,d\eta,$$

e quindi, sostituito per la derivata il suo valore, avremo:

$$\frac{dV'}{dn} = \frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta)\,\frac{z}{r^3}\,d\xi\,d\eta \qquad (\text{su } p_i).$$

Si cambino adesso le coordinate cartesiane in polari ponendo

$$\xi = x + \rho\cos\theta \quad , \quad \eta = y + \rho\,\text{sen}\,\theta \quad , \quad r = \sqrt{\rho^2 + z^2},$$

e poi si faccia $\rho = z\rho'$. L' integrale or ora scritto diverrà così:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} f(x + z\rho'\cos\theta\,,\, y + z\rho'\,\text{sen}\,\theta)\,\frac{\rho'\,d\rho'}{(1+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

E fatto finalmente $z = 0$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} f(x, y)\,\frac{\rho'\,d\rho'}{(1+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ma tale espressione non essendo altro che $f(x, y)$, e lo stesso discorso potendo ripetersi per qualunque delle facce di S, ne segue che su esse si ha:

$$\frac{dV'}{dn} = f(x, y).$$

Raccogliendo quanto si è detto, è chiaro che la funzione u soddisfacente ai dati del nostro problema verrà data dalla sovrapposizione dei due potenziali d'attrazione:

$$(6) \qquad u = V + V' = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{f\,ds}{r} - \frac{1}{4\pi}\int \frac{\varphi\,dS}{r}.$$

E difatti $\Delta_2 u = \varphi$ dentro S, e $\frac{du}{dn}$ riducesi ad f sulla superficie s di S.

Quindi le due espressioni (5) e (6) necessariamente si equivalgono. Sarebbe del resto facile vedere direttamente che l' equivalenza si verifica termine a termine.

Potrebbe sembrare, a prima giunta, inutile l'introduzione della funzione ausiliaria u, e che i risultati precedenti avrebbero condotto senz' altro alla soluzione ponendovi U, Φ, F in luogo di u, φ, f. Ma dalla (6) chiaro apparisce l'inconveniente che sarebbe seguito. Considerandone, per esempio, l'ultimo integrale che sarebbe stato sostituito da

$$\int \frac{\Phi\,dS}{r} = \int \frac{\varphi\,dS}{r} + \Phi_m \int \frac{dS}{r},$$

è palese che quest' ultimo termine, esteso com'è a tutto lo spazio, è infinito se Φ_m non è zero. Al contrario con l' introduzione della u la forma infinita è evitata.

6. Risoluto il primo dei problemi propostici, passeremo ora al secondo, dove il dato in superficie è U. Ad esso più propriamente si addice il nome di problema di Dirichlet.

Se invece di eliminare dal secondo membro della formola generale (2) la u, ne avessimo eliminato $\frac{du}{dn}$, saremmo riusciti alla

$$(7) \qquad u = \frac{1}{4\pi}\int_s u\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{dG}{dn}\right) ds + \frac{1}{4\pi}\int_S \left(G - \frac{1}{r}\right)\varphi\,dS,$$

dove G è la *funzione di* Green, cioè la funzione armonica che prende su di s i valori $\frac{1}{r}$ (¹).

(¹) Cfr. Cesàro op. cit. pag. 82.

Ora mostreremo che si può determinar G per qualunque forma ortoedrica di S, variabile fra lo spazio limitato da un piano indefinito al parallelepipedo rettangolo. Per più chiara intelligenza della cosa gioverà ricorrere ad un mezzo rappresentativo, grossolano se si vuole, ma adatto allo scopo. Vedemmo che con la costruzione ottica indicata al n. 5 tutto lo spazio resta diviso in infinite celle parallelepipede uguali al dato S. Ora, incominciando da questo e poi proseguendo l'operazione per tutte le altre celle, immaginiamo di dare all'una il colore bianco, all'altra il colore nero, in guisa da ottenerne, diremo così, uno scacchiere a tre dimensioni infinitamente esteso in tutti i sensi. Si avrà allora tutto il sistema composto di celle alternativamente bianche e nere, tali che due adiacenti qualunque ed aventi una faccia comune, saranno di colore differente. È chiaro che lo stesso fatto accadrà per due celle qualunque fra loro simmetriche rispetto ad uno qualunque dei piani delle facce di S. Dopo ciò diamo un numero d'ordine arbitrario a ciascuna cella, solo però in modo che alle bianche venga dato un numero pari, ed alle nere un numero dispari, convenendo insieme di dare il numero zero al dato parallelepipedo.

Ciò fatto, e chiamata r_i la distanza fra il solito punto Q variabile di S e l'immagine P_i di P la quale travasi dentro la cella i^{ma} (giacchè ogni cella contiene un'immagine, tranne S che contiene P oggetto) si vedrà facilmente che la serie a segni alterati

$$G' = -\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{r}$$

si annulla per Q situato su qualunque delle facce di S, mentre ivi ad ogni r_i di indice pari ne corrisponde uno uguale d'indice dispari. Orbene, r_0 non essendo cosa diversa da r, se allora poniamo:

$$G = G' + \frac{1}{r} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{r_i}$$

avremo evidentemente la funzione di Green che ci occorre, giacchè essa è armonica e si riduce ad $\frac{1}{r}$ in superficie.

Così il problema resterà risoluto dalla formola:

$$u = -\frac{1}{4\pi}\int_s \psi \frac{dG'}{dn}\, ds + \frac{1}{4\pi}\int_S G'\varphi\, dS\,,$$

indicato con ψ il valore noto di u in superficie; la formola medesima non essendo che la (7).

Se cinque delle facce di S vanno a distanza infinita, G si riduce semplicemente ad $\frac{1}{r_1}$, conosciuto risultato riferentesi ad uno spazio S limitato da un

solo piano indefinito. Per questo caso G coincide con Γ, cioè la funzione di Green soddisfa anche alla condizione

$$\frac{dG}{dn} = -\frac{d\frac{1}{r}}{dn}$$

sul piano limite.

Nota Aggiunta.—La trasformazione puntuale d'uno spazio S in un altro S' per raggi vettori reciproci ci permette di utilizzare alcuni dei risultati precedenti per la soluzione del problema di Green (e quindi del problema di Dirichlet) anche per altre figure geometriche. È noto che, scelto un punto fisso o *polo d'inversione* O ed una sfera fondamentale o *direttrice* Σ di centro O e di raggio (*modulo d'inversione*) R che per semplicità noi porremo $= 1$, la trasformazione consiste nel costruire, per ogni punto Q di S, il suo *coniugato* Q' *rispetto a* Σ, cioè nel determinare sulla retta OQ un punto Q' per modo che sia

$$OQ \cdot OQ' = R^2 = 1.$$

L'insieme dei punti Q' coniugati di tutti i punti Q di S costituisce lo spazio trasformato S'.

In questa trasformazione ad una sfera corrisponde in generale una sfera, ad un circolo un circolo; ad un piano e ad una retta corrispondono rispettivamente una sfera ed una circonferenza passanti per O, i quali si riducono ad un piano e ad una retta se il piano e la retta dati passano per O. Quest'ultimo punto corrisponde poi al piano all'infinito. I punti che corrispondono a sè stessi sono quelli della superficie di Σ.

Per costruzione segue anche che uno spazio S esterno a Σ ha per corrispondente o trasformato uno spazio S' interno a Σ, e viceversa. Così, dato un piano A esterno a Σ, tutto lo spazio infinito limitato da A e situato dalla parte opposta a Σ ha per ispazio corrispondente quello limitato esternamente dalla superficie sferica σ corrispondente ad A; all'altra metà dello spazio bisecato da A corrisponde lo spazio internamente limitato da σ. La costruzione di σ è molto semplice. Abbassata da O la perpendicolare OK su A, si costruisca K' coniugato da K; σ sarà la sfera che ha OK' per diametro.

Supponiamo dati due piani A e B, e prendiamo per S uno degli angoli diedri da quelli formato, o, più precisamente, lo spazio angolare corrispondente, esternamente al quale stabiliremo Σ. S' sarà allora il solido compreso fra due calotte sferiche σ o σ' di diverso raggio, e che sarà facile costruire mediante la regola data or ora. Alla circonferenza base comune delle due calotte corrisponderà la retta intersezione fra A e B.

È noto poi (e del resto sarebbe agevole dimostrarlo) che la rappresentazione per raggi vettori reciproci è *conforme*, vale a dire conserva gli angoli; perciò l'angolo costante secondo cui s'intersecano σ e σ' è uguale all'angolo di A con B.

Ciò premesso, supponiamo che un punto fisso P ed un punto variabile Q facciano parte di un certo spazio S pel quale sappiasi trovare la funzione G di Green, ed essa venga data dal potenziale di attrazione di un determinato sistema di masse $m_1, m_2, \ldots$, concentrate in determinati punti $P_1, P_2, \ldots$, esterni ad S. Scelta una Σ pure esterna ad S, si costruiscano $Q', P', P'_1, P'_2, \ldots$, coniugati di $Q, P, P_1, P_2, \ldots$

Dicansi poi, oltrechè $QP = r$ come al solito,

r'	la distanza	$Q'P'$
r_i	»	$Q\ P_i$
r'_i	»	$Q'P'_i$
q	»	$O\ Q$
q'	»	$O\ Q'$
p	»	$O\ P$
p'	»	$O\ P'$
p_i	»	$O\ P_i$
p'_i	»	$O\ P'_i$.

I triangoli OQP_i, OP'_iQ' sono simili, e quindi, avendosi

$$\frac{r_i}{r'_i} = \frac{p_i}{q'},$$

sarà, considerando una massa ipotetica m'_i concentrata in P'_i:

$$\frac{m'_i}{r'_i} = \frac{m'_i p_i}{r_i q'} = \frac{m'_i q}{r_i p'_i}$$

giacchè $p_i p'_i = q q' = 1$. Facciamo $m'_i = m_i p'_i$. Allora si avrà:

$$\frac{m'_i}{r'_i} = q \frac{m_i}{r_i},$$

e quindi

$$\sum_i \frac{m'_i}{r'_i} = q \sum_i \frac{m_i}{r_i}$$

il cui 1° membro è il potenziale V dovuto all' azione delle masse m'_i verso Q'. Così possiamo scrivere:

$$V = qG.$$

Ora se, come accade nei casi qui contemplati, i punti P_i sono esterni ad S, i punti P'_i saranno a loro volta esterni ad S'. Così V sarà una funzione armonica delle coordinate di Q', assumente in superficie di S' i valori $\frac{q}{r}$, e quindi, poichè $r = \frac{r'q}{p'}$, V assumerà sulla superficie stessa i valori $\frac{p'}{r'}$.

Quindi è chiaro che la funzione G' di Green per S', cioè la funzione armonica che prende in superficie di S' i valori $\frac{1}{r'}$ non è altro che:

$$G' = \frac{V}{p'} = \frac{1}{p'} \sum_i \frac{m_i p'_i}{r'_i}. \tag{8}$$

Facciamo qualche applicazione di questa formola.

Funzione di Green per la sfera. — Si prenda il polo O d'inversione sulla superficie della data sfera σ, che, assumendo opportunamente l'unità di misura, supporremo tutta interna alla sfera direttrice. Si costruisca il piano A corrispondente a σ e il punto P corrispondente (coniugato) al punto P' *dato* di σ. Consideriamo lo spazio limitato da A e situato dalla parte opposta di σ. Vedremo che per tale spazio la funzione G è il potenziale d'attrazione di una massa $m_1 = 1$ concentrata nel punto P_1 simmetrico di P rispetto ad A. Quindi, detto P'_1 il coniugato di P_1, sarà per (8):

$$G' = \frac{p'_1}{p'} \frac{1}{r'_1}.$$

Ma se a è il raggio della σ e d la distanza fra il suo centro e P', si può dimostrare che:

$$\frac{p'_1}{p'} = \frac{a}{d};$$

e quindi:

$$G' = \frac{a}{dr'_1}.$$

Questo risultato è conosciuto.

Funzione di Green per la mezza sfera. — Assumiamo O in un punto della circonferenza base della data semisfera σ'. Allora alla superficie curva ed al circolo base corrisponderanno rispettivamente due piani A, B tagliantisi ortogonalmente, il primo normale al circolo base, e l'altro in prosecuzione del piano di questo. L'angolo diedro dei due piani è lo spazio trasformato di quello emisferico dato. Ora, costruite le tre *immagini* P_1, P_2, P_3 (formate dagli *specchi* A, B) del punto P' *dato* di σ', sappiamo da quanto altrove si disse che per l'angolo diedro AB la funzione G è data dalla formola:

$$G = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3},$$

essendo r_1, r_2, r_3 le 3 distanze del punto Q (coniugato del punto variabile Q' di σ') dai punti P_1, P_2, P_3 rispettivamente.

Sostituendo pertanto in (8) i valori $m_1 = 1, m_2 = -1, m_3 = 1$, abbiamo che la funzione cercata è

$$G' = \frac{1}{p'}\left(\frac{p'_1}{r'_1} - \frac{p'_2}{r'_2} + \frac{p'_3}{r'_3}\right),$$

conservando le usate denominazioni. Ma evidentemente:

$$p'_1 = p'_2 \quad , \quad p'_3 = p';$$

onde (vedi sopra):

$$G' = \frac{a}{d}\left(\frac{1}{r'_1} - \frac{1}{r'_2}\right) + \frac{1}{r'_3},$$

risultato anche questo notevole per la sua semplicità. Se ne può verificar direttamente l'esattezza avendo presente la soluzione relativa alla sfera intera. Ed è chiaro che basta costruire P'_1, perchè P'_2 e P'_3 sono simmetrici a P'_1 ed a P' rispetto al piano B cioè della base di σ' (¹).

Funzione di Green per certi solidi lenticolari. — Più generale del precedente è il caso del solido racchiuso fra due calotte sferiche di diverso raggio, le quali però supporremo intersecantisi secondo un angolo $\frac{\pi}{n}$ essendo n un intero. Allora assunto, come al solito, O sulla circonferenza base delle due calotte, al solido dato corrisponderà l'angolo diedro di due piani, angolo anch'esso eguale a $\frac{\pi}{n}$. Ora si scorge dal detto di sopra che G è il potenziale delle $2n-1$ immagini di P nelle quali sieno concentrate le masse $m_1 = 1, m_2 = -1, m_3 = 1$, ecc. Quindi seguirà:

$$G' = \frac{1}{p'}\sum_{i=1}^{2n-1}\frac{(-1)^{i+1}p'_i}{r'_i}.$$

Roma, Dicembre 1900.

(¹) P'_1 non è poi altro che il coniugato di P' rispetto alla data superficie sferica.

SULLE EQUAZIONI NORMALI E SU CERTE APPLICAZIONI

ALLE EQUAZIONI CICLICHE

NOTA

DEL

Dott. GIULIO DARBI.

In una mia nota [1] e successivamente in un'altra [2], mi occupai di quelle equazioni irreduttibili in un certo campo di razionalità K a cui appartengono i coefficienti, le quali godono della seguente proprietà: ogni funzione razionale in K delle radici si può rappresentare in funzione lineare omogenea di queste con coefficienti appartenenti al campo K.

Seguendo anche un consiglio datomi dal Prof. Capelli, mi propongo con la presente memoria di riprendere da capo la quistione dal punto di vista alquanto più generale, cioè la rappresentabilità di una qualunque funzione razionale in K delle radici in funzione lineare di queste con coefficienti appartenenti al campo K, anche allo scopo di entrare al tempo stesso in maggiori particolari.

Invocando poi i risultati già ottenuti, farò qualche applicazione alle equazioni cicliche di grado primo, come per esempio, che « ogni funzione razionale in C, essendo C il campo dei numeri reali commensurabili, delle radici di un'equazione ciclica di grado primo, si può esprimere in funzione lineare in C delle potenze ennesime delle radici, essendo n un numero intero, positivo o negativo, fissato ad arbitrio.

I.

1. Sia

$$f(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_{n-1} x + p_n = 0 \tag{1}$$

un' equazione, irreduttibile in un certo campo di razionalità K a cui appartengono i coefficienti $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n$.

---

(1) Cfr. Giornale di Matematica Battaglini Anno 1901.

(2) Cfr. Rendiconto della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli. Marzo 1903.

Se l'equazione (1) gode della proprietà che ogni funzione razionale in K delle sue radici si esprime in funzione lineare omogenea di queste con coefficienti in K, sappiamo [1] che l'equazione (1) è normale [2], e fra le sue radici non può esistere alcuna relazione lineare omogenea con coefficienti in K.

Reciprocamente: se l'equazione (1) è normale, e se fra le sue radici non ha luogo alcuna relazione lineare omogenea con coefficienti in K, la (1) gode della proprietà che ogni funzione razionale in K delle sue radici si esprime in funzione lineare omogenea di queste con coefficienti in K.

Infatti, supponendo che $f(x)=0$ sia un'equazione normale, e fra le sue radici non abbia luogo alcuna relazione lineare omogenea con coefficienti in K, si ha:

$$\begin{aligned} x_2 &= A_1 x_1^{n-1} + A_2 x_1^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x_1 + A_n \\ x_3 &= B_1 x_1^{n-1} + B_2 x_1^{n-2} + \ldots + B_{n-1} x_1 + B_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= E_1 x_1^{n-1} + E_2 x_1^{n-2} + \ldots + E_{n-1} x_1 + E_n \end{aligned} \tag{2}$$

(essendo $A_1, A_2, \ldots, A_n; \ldots; E_1, E_2, \ldots, E_n$ numeri appartenenti a K).

Per mezzo dell'equazione data $f(x)=0$, le (2) possiamo scriverle così:

$$\begin{aligned} x_2 &= a_1 x_1^n + a_2 x_1^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x_1^2 + a_n x_1 \\ x_3 &= b_1 x_1^n + b_2 x_1^{n-1} + \ldots + b_{n-1} x_1^2 + b_n x_1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= e_1 x_1^n + e_2 x_1^{n-1} + \ldots + e_{n-1} x_1^2 + e_n x_1 \end{aligned} \tag{3}$$

(essendo $a_1, a_2, \ldots, a_n; \ldots; e_1, e_2, \ldots, e_n$ numeri appartenenti a K).

Consideriamo le (3) come un sistema di $n-1$ equazioni lineari nelle incognite $x_1^n, x_1^{n-1}, \ldots, x_1^2$. Poichè abbiamo supposto che fra le radici $x_1, x_2, \ldots, x_n$ non ha luogo alcuna relazione lineare omogenea in K, il determinante dei coefficienti del sistema (3) è diverso da zero. Onde, risolvendo le (3) rispetto ad $x_1^2, x_1^3, \ldots, x_1^{n-1}$, si ha:

$$\begin{aligned} x_1^2 &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n \\ x_1^3 &= \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^{n-1} &= \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + \ldots + \eta_n x_n \end{aligned} \tag{4}$$

($\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n; \ldots; \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ sono numeri appartenenti a K).

---

(1) Cfr. Giornale di Matematica Battaglini. Anno 1901.

(2) Chiamiamo *normale* un'equazione di cui tutte le radici si possono esprimere razionalmente per mezzo di una di esse (Cfr. Weber, Lehrbuch der Algebra, 1895).

Tenuto conto che $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sono radici di equazione normale, le (4) dimostrano il teorema enunciato.

Onde possiamo dire che: la condizione necessaria e sufficiente affinchè un'equazione $f(x) = 0$, irreduttibile in un certo campo di razionalità K a cui appartengono i suoi coefficienti, goda della proprietà che ogni funzione razionale in K delle sue radici si esprima in funzione lineare omogenea di queste con coefficienti appartenenti a K, è che l'equazione $f(x) = 0$ sia normale, e fra le sue radici non abbia luogo alcuna relazione lineare omogenea con coefficienti appartenenti a K.

2. Dalle (3) ricaviamo che: un' equazione normale $f(x) = 0$ gode della proprietà testè enunciata solo e quando il determinante dei coefficienti del sistema (3), ossia

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_1 & e_2 & \ldots & e_{n-1} \end{vmatrix}$$

sia diverso da zero.

Questo determinante, così importante nello studio delle equazioni normali, vogliamo chiamarlo determinante *fondamentale* dell'equazione normale $f(x) = 0$.

3. Sull' equazione

$$f(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_{n-1} x + p_n = 0, \qquad (1)'$$

irreduttibile in un certo campo K di razionalità a cui appartengono i suoi coefficienti, facciamo la seguente ipotesi:

Ogni funzione razionale in K delle sue radici si esprime in funzione lineare di queste con coefficienti appartenenti a K.

È facile vedere che:

« *La condizione necessaria e sufficiente, affinchè l'equazione* (1)' *goda anche della proprietà che ogni funzione razionale in* K *delle sue radici si possa esprimere in funzione lineare omogenea di queste con coefficienti in* K, *è che il coefficiente del suo secondo termine sia diverso da zero* ».

Infatti, denotando con $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ il simbolo di una qualunque funzione razionale in K delle radici $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dell'equazione data (1)', supponiamo che si abbia:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n + a_{n+1} \qquad (5)$$

(essendo $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ numeri appartenenti a K).

Se il coefficiente p_1 è diverso da zero, si ha:

$$a_{n+1} = -(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \cdot \frac{a_{n+1}}{p_1}.$$

Sostituendo nella (5) ad a_{n+1} l'espressione che figura nel secondo membro della precedente uguaglianza, si ha:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n,$$

essendo $\alpha_i = a_i - \frac{a_{n+1}}{p_1}$; $i = 1, 2, \ldots, n$.

Reciprocamente, se supponiamo che si abbia:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n + a_{n+1} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n, \quad (6)$$

il coefficiente p_1 è diverso da zero, poichè ci è noto [1] che: se ogni funzione razionale in K delle radici di un'equazione irreduttibile si esprime in funzione lineare omogenea di queste, il coefficiente del secondo termine dell'equazione è diverso da zero.

Resta quindi dimostrato quanto erasi asserito.

4. Ferme rimanendo le ipotesi fatte sull'equazione (1)', questa, in virtù del teorema precedente, avrà il determinante *fondamentale* diverso da zero solo e quando il coefficiente del secondo termine non sia nullo. In tal caso gode della proprietà che ogni funzione razionale in K delle sue radici si esprime in funzione lineare omogenea di queste con coefficienti in K.

Sappiamo inoltre che è equazione normale, e fra le sue radici non può esistere alcuna relazione lineare del tipo

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b,$$

ove $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ sono numeri appartenenti a K, se non siano verificate le seguenti uguaglianze:

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = -\frac{b}{p_1}. \quad (7)$$

Se invece l'equazione (1)' ha il coefficiente del secondo termine uguale a zero, il suo determinante fondamentale è nullo.

---

[1] Cfr. il citato Giornale di Matematica Battaglini. Anno 1901.

Esaminiamo questo caso particolare, cioè supponiamo che l'equazione

$$f(x) = x^n + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} x + p_n = 0 \tag{8}$$

sia priva del coefficiente del secondo termine. Ammettiamo inoltre che sia irreduttibile in un certo campo di razionalità K a cui appartengono i suoi coefficienti $p_2, p_3, \ldots, p_n$, e goda della proprietà che ogni funzione razionale in K delle radici si possa esprimere in funzione lineare di queste con coefficienti appartenenti a K.

Si dimostra facilmente che:

« *L'equazione* (8) *è normale* ».

5. In luogo delle (7) abbiamo la seguente proprietà:

« *Fra le radici della* (8) *non può esistere una relazione lineare del tipo*

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = \alpha_{n+1},$$

essendo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ *numeri appartenenti al campo* K, *se non siano verificate le seguenti uguaglianze*:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n \,;\, \alpha_{n+1} = 0 \text{ ».}$$

Per l'ipotesi fatta, cioè: ogni numero del corpo algebrico $(K, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ si esprime in funzione lineare delle radici $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con coefficienti appartenenti a K, si ha:

$$\begin{array}{llllll}
0 & = x_1 & + x_2 & + \ldots + x_n & & \\
x_1^2 & = a_{11} x_1 & + a_{12} x_2 & + \ldots + a_{1,n} x_n & + a_{1,n+1} & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_1^{n-1} & = a_{n-2,1} x_1 & + a_{n-2,2} x_2 & + \ldots + a_{n-2,n} x_n & + a_{n-2,n-1} & .
\end{array} \tag{9}$$

Supponiamo che si abbia:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = \alpha_{n+1}. \tag{10}$$

Applicando alla (10) le n sostituzioni del Gruppo [1] di Galois dell' equazione (8), avremo in tutto n relazioni, le quali sommate fra loro membro a mem-

---

[1] Cfr. E. Netto, Thèorie des Substitutions.

bro ci danno:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) = n\alpha_{n+1}.$$

Ora, avendo supposto il coefficiente del secondo termine della (8) uguale a zero, si ha:

$$\alpha_{n+1} = 0.$$

Così la (10) diventa:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0. \qquad (10)'$$

Le (9), considerate come un sistema di $n-1$ equazioni lineari nelle incognite $x_2, x_3, \ldots, x_n$, ci permettono di esprimere queste in funzione razionale intera di x_1, essendo il determinante Δ dei coefficienti diverso da zero, come è facile vedere.

Notando che si ha:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -1 & \ldots & -1 \\ a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-2,2} & a_{n-2,3} & \ldots & a_{n-2,n} \end{vmatrix},$$

risolvendo le (9) rispetto ad $x_2, x_3, \ldots, x_n$, e sostituendo le espressioni così ottenute nella (10), si ricava:

$$\Delta\alpha_1 x_1 + \alpha_2 \begin{vmatrix} x_1 & -1 & \ldots & -1 \\ x_1^2 - a_{11}x_1 - a_{1,n+1} & a_{12} & \ldots & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{n-1} - a_{n-2,1}x_1 - a_{n-2\,n+1} & a_{n-2,3} & \ldots & a_{n-2,n} \end{vmatrix} + \ldots$$

$$\ldots + \alpha_n \begin{vmatrix} -1 & -1 & \ldots & x_1 \\ a_{12} & a_{13} & \ldots & x_1^2 - a_{11}x_1 - a_{1,n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-2,n} & a_{n-2,3} & \ldots & x_1^{n-1} - a_{n-2,1}x_1 - a_{n-2,n+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Denotando con $A_{s,t}$ l'aggiunto dell'elemento che occupa nel determinante Δ il posto d'incontro della s^{ma} orizzontale e della t^{ma} verticale, e raccogliendo i termini che contengono x_1 alla medesima potenza, la precedente equazione si può scrivere così:

$$
\begin{array}{l}
x_1^{n-1}(A_{n-1,1}\alpha_2 \qquad + A_{n-1,2}\alpha_3 + \ldots + A_{n-1,n-1}\alpha_n) + \\
+ x_1^{n-2}(A_{n-2,1}\alpha_2 \qquad + A_{n-2,2}\alpha_3 + \ldots + A_{n-2,n-1}\alpha_n) + \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ x_1^2 \quad (A_{21}\alpha_2 \qquad + A_{22}\alpha_3 \quad + \ldots + A_{2,n-1}\alpha_n) \quad + \\
+ x_1 \left\{ \begin{array}{l}
\Delta\alpha_1 + A_{11}\alpha_2 \qquad + A_{12}\alpha_3 \quad + \ldots + A_{1,n-1}\alpha_n \quad - \\
\quad - a_{11}(A_{21}\alpha_2 \qquad + A_{22}\alpha_3 \quad + \ldots + A_{2,n-1}\alpha_n) - \\
\quad - a_{21}(A_{31}\alpha_2 \qquad + A_{32}\alpha_3 \quad + \ldots + A_{3,n-1}\alpha_n) - \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\quad - a_{n-2,1}(A_{n-1,1}\alpha_2 + A_{n-1,2}\alpha_3 + \ldots + A_{n-1,n-1}\alpha_n) +
\end{array} \right. \\
+ H = 0
\end{array}
$$

(H è un numero appartenente al campo di razionalità K).

Questa equazione di grado $n-1$ in x_1, avendo una radice in comune con la (8), che è di grado n in x, ha i coefficienti nulli. Onde si ha:

$$
\begin{array}{l}
\alpha_2 A_{n-1,1} + \alpha_3 A_{n-1,2} \qquad + \ldots + \alpha_n A_{n-1,n-1} = 0 \\
\alpha_2 A_{n-2,1} + \alpha_3 A_{n-2,2} \qquad + \ldots + \alpha_n A_{n-2,n-1} = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\alpha_2 A_{21} \quad + \alpha_3 A_{22} \qquad + \ldots + \alpha_n A_{2,n-2} \quad = 0 \\
\left\{ \begin{array}{l}
\alpha_2 A_{11} + \alpha_3 A_{12} \quad + \ldots\ldots + \alpha_n A_{1,n-1} - \\
- a_{11}(A_{21}\alpha_2 + A_{22}\alpha_3 + \ldots\ldots + A_{2,n-1}\alpha_n) - \\
- a_{21}(A_{31}\alpha_2 + A_{32}\alpha_3 + \ldots\ldots + A_{3,n-1}\alpha_n) - \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
- a_{n-2,1}(A_{n-1,1}\alpha_2 + A_{n-1,2}\alpha_3 + \ldots + A_{n-1,n-1}\alpha_n)
\end{array} \right\} = - \alpha_1 \Delta.
\end{array}
\tag{11}
$$

Quest'ultima relazione lineare fra $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, tenuto conto delle rimanenti $n-2$ equazioni, si riduce alla più semplice

$$\alpha_2 A_{11} + \alpha_3 A_{12} + \ldots + \alpha_n A_{1,n-1} = -\alpha_1 \Delta.$$

Onde, le (11) equivalgono alle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
&\alpha_2 A_{11} + \alpha_3 A_{12} + \ldots + \alpha_n A_{1,n-1} = -\alpha_1 \Delta \\
&\alpha_2 A_{21} + \alpha_3 A_{22} + \ldots + \alpha_n A_{2,n-1} = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (11)' \\
&\alpha_2 A_{n-2,1} + \alpha_3 A_{n-2,2} + \ldots + \alpha_n A_{n-2,n-1} = 0 \\
&\alpha_2 A_{n-1,1} + \alpha_3 A_{n-1,2} + \ldots + \alpha_n A_{n-1,n-1} = 0.
\end{aligned}$$

Due casi possono accadere: $\alpha_1 = 0$, oppure $\alpha_1 \neq 0$.

Intanto, il determinante dei coefficienti del sistema (11)', formato da $n-1$ equazioni lineari nelle incognite $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$, è diverso da zero, poichè altro non è che il reciproco del determinante Δ. Onde, se supponiamo $\alpha_1 = 0$, il sistema (11)' a determinante diverso da zero ammette l'unica soluzione

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Se invece si ha: $\alpha_1 \neq 0$, risolvendo le (11)' rispetto ad $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$, si ricava:

$$\alpha_i \Delta^{n-2} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \ldots\ldots -\alpha_1\Delta \ldots & A_{1,n-1} \\ A_{21} & A_{22} \ldots\ldots 0 \ldots\ldots & A_{2,n-1} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ A_{n-1,1} & A_{n-1,2} \ldots 0 \ldots\ldots & A_{n-1,n-1} \end{vmatrix}.$$

Da cui si ricava:

$$\alpha_i \Delta^{n-3} = \alpha_1 (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & \ldots A_{2,i-2} & A_{2,i} & \ldots A_{2,n-1} \\ A_{31} & A_{32} & \ldots A_{3,i-2} & A_{3,i} & \ldots A_{3,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n-1,1} & A_{n-1,2} & \ldots A_{n-1,i-2} & A_{n-1,i} & \ldots A_{n-1,n-1} \end{vmatrix}. \qquad (12)$$

Ricordando che si ha:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 \\ a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n} \\ a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-2,2} & a_{n-2,3} & \dots & a_{n-2,n} \end{vmatrix},$$

il reciproco di Δ altro non è che

$$\Delta' = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1,n-1} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n-1,1} & A_{n-1,2} & \dots & A_{n-1,n-1} \end{vmatrix}.$$

Nella (12), il determinante

$$B_{1,i-1} = (-1)^i \cdot \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2,i-2} & A_{2,i} & \dots & A_{2,n-1} \\ A_{31} & A_{32} & \dots & A_{3,i-2} & A_{3,i} & \dots & A_{3,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n-1,1} & A_{n-1,2} & \dots & A_{n-1,i-2} & A_{n-1,i} & \dots & A_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

altro non è che il complemento algebrico dell'elemento che occupa in Δ' il posto d'incontro della 1ª orizzontale e della $(i-1)^{ma}$ verticale.

Ora, noi sappiamo dall'algebra che: il complemento algebrico di un elemento del reciproco di un determinante di ordine $n-1$ è uguale all'omologo di questo elemento nel primitivo moltiplicato per la potenza $(n-3)^{ma}$ del primitivo.

Si ha quindi:

$$B_{1,i-1} = -\Delta^{n-3}.$$

Sostituendo questo valore nella (12), si ha:

$$a_i = a_1. \qquad (i = 2, 3, \dots, n)$$

Onde resta dimostrato quanto erasi asserito.

6. Reciprocamente, supponiamo che fra le radici dell'equazione normale (8) non abbia luogo alcuna relazione lineare con coefficienti appartenenti a K.

Si ha dunque:

$$
\begin{aligned}
x_2 &= A_1 x_1^{n-1} + A_2 x_1^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x_1 + A_n \\
x_3 &= B_1 x_1^{n-1} + B_2 x_1^{n-2} + \ldots + B_{n-1} x_1 + B_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (13) \\
x_n &= E_1 x_1^{n-1} + E_2 x_1^{n-2} + \ldots + E_{n-1} x_1 + E_n
\end{aligned}
$$

($A_1, A_2, \ldots, A_n$; $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sono numeri appartenenti al campo K).

Consideriamo le (13) come un sistema di $n-1$ equazioni lineari nelle incognite $x_1^{n-1}, x_1^{n-2}, \ldots, x_1$. Il determinante D' dei coefficienti del sistema (13) è diverso da zero, poichè, se fosse nullo, si avrebbe una relazione lineare fra i primi membri delle (13), cioè:

$$\lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \ldots + \lambda_n x_n = \lambda_2 A_n + \lambda_3 B_n + \ldots + \lambda_n E_n. \qquad (14)$$

Per quanto si è detto, la (14) non può sussistere se non sono verificate le seguenti uguaglianze:

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Onde la (14) non sarebbe più una relazione, ma una identità; il che, come è facile comprendere, è impossibile attesa l'irreduttibilità della (8); conseguentemente il determinante D' è diverso da zero.

Quindi, risolvendo le (13) rispetto ad $x_1^2, x_1^3, \ldots, x_1^{n-1}$, si ha:

$$
\begin{aligned}
x_1^2 &= \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \ldots + \alpha_n x_n + \alpha_{n+1} \\
x_1^3 &= \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \ldots + \beta_n x_n + \beta_{n+1} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (15) \\
x_1^{n-1} &= \eta_2 x_2 + \eta_3 x_3 + \ldots + \eta_n x_n + \eta_{n+1}
\end{aligned}
$$

($\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n+1}; \ldots; \eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_{n+1}$ sono numeri appartenenti a K).

Tenuto conto che $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sono radici di equazione normale, le (15) dimostrano che ogni funzione razionale in K delle radici dell'equazione normale (8) si può esprimere in funzione lineare di queste con coefficienti appartenenti a K.

7. Riassumendo i risultati fin qui ottenuti, possiamo dire che:

« *La condizione necessaria e sufficiente affinchè un'equazione* f(x) = 0, *irreduttibile in un certo campo di razionalità* K *a cui appartengono i suoi coefficienti, goda della proprietà che ogni funzione razionale in* K *delle sue radici si esprima in funzione lineare di queste con coefficienti appartenenti a* K, *è che l'equazione* f(x) = 0 *sia normale, e fra le sue radici non abbia luogo alcuna relazione lineare del tipo*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = a_{n+1},$$

se non siano verificate le seguenti uguaglianze:

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n \,;\; a_{n+1} = -\, a_1 p_1 \text{ »}$$

(p_1 è il coefficiente del secondo termine dell'equazione $f(x) = 0$; $a_1\, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ sono numeri appartenenti al campo K di razionalità).

8. Da quanto si è detto, risulta che un'equazione normale gode della proprietà testè enunciata, solo e quando il determinante dei coefficienti del sistema (13) è diverso da zero, cioè si abbia:

$$D' = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & \ldots & A_{n-1} \\ B_1 & B_2 & \ldots & B_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ E_1 & E_2 & \ldots & E_{n-1} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{16}$$

II.

9. Abbiasi un'equazione ciclica

$$\varphi(x) = x^n + p_1x^{n-1} + \ldots + p_{n-1}x + p_n = 0, \tag{17}$$

irreduttibile in un certo campo di razionalità K a cui appartengono i suoi coefficienti. Supponiamo che il suo determinante *fondamentale* sia diverso da zero. Sappiamo che il gruppo di Galois [1] (G) della (17) è ciclico, ossia è formato dalle potenze di una stessa sostituzione circolare $S = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Si ha dunque:

$$(G) = S, S^2, \ldots, S^n = 1.$$

---

[1] Cfr. Jordan, Traitè des Substitutions.

Ci è noto altresì che tutti i sottogruppi di (G) sono ciclici, e per costruirli bisogna vedere in quanti modi il numero n, grado dell'equazione (17) si può spezzare in un prodotto di due fattori; ad ogni spezzamento, ossia ad ogni divisore di n, corrisponde un sottogruppo ciclico.

Supponendo che si abbia: $n = e\mu$, avremo un sottogruppo (H) definito dalle sostituzioni

$$S^e, S^{2e}, \ldots, S^{\mu e} = 1.$$

Ci proponiamo di costruire una funzione, la quale goda della proprietà di non essere alterata nel suo valore numerico dalle sostituzioni del sottogruppo (H), ed alterata dalle altre sostituzioni di (G).

Nel caso che la (17) sia l'equazione della divisione del cerchio in p parti uguali, (p, essendo numero primo) Gauss [1] trovò che la funzione

$$\eta_1 = x_1 + x_{1+e} + \ldots + x_{1+(\mu-1)e} \tag{18}$$

rimane inalterata per le sostituzioni di (H) ed alterata per le rimanenti sostituzioni di (G). Inoltre η_1 è radice di un'equazione $\varepsilon(z) = 0$, ciclica [2] ed irreduttibile nel campo dei numeri reali commensurabili.

Queste proprietà, di cui gode la funzione η_1, dimostrate da Gauss nel caso che $x_1, x_2, \ldots, x_n$ siano radici dell'equazione della divisione del cerchio in p parti uguali, valgono ancora se l'equazione (17) sia ciclica, irreduttibile in un certo campo K di razionalità a cui appartengono i suoi coefficienti, ed abbia il determinante *fondamentale* diverso da zero.

Che le sostituzioni di (H) lascino inalterata la (18) è facile vedere.

Ci è noto che le sostituzioni del gruppo (G) possiamo rappresentarle nel seguente modo:

$$(G) = (H), S(H), S^2(H), \ldots, S^{e-1}(H).$$

Ora, per dimostrare che una qualunque altra sostituzione di (G) applicata alla (18) ne altera il valore numerico, basterà vedere ciò che avviene della (18) quando eseguiamo su di essa la sostituzione S^λ, essendo $\lambda < e$.

Si ha quindi:

$$\eta_{\lambda+1} = x_{1+\lambda} + x_{1+\lambda+e} + \ldots + x_{1+\lambda+(\mu-1)e}.$$

Se fosse $\eta_1 = \eta_\lambda$, si avrebbe una relazione lineare omogenea fra le radici $x_1, x_{e+1}, \ldots, x_{1+(\mu-1)e}, x_{1+\lambda}, x_{1+\lambda+e}, \ldots, x_{1+\lambda+(\mu-1)e}$.

---

[1] Cfr. Bachmann Paolo. La teoria della divisione del cerchio e sua applicazione alla teoria dei numeri.

[2] Cfr. Weber, Traité d'Algèbre supérieure 1898, p. 648.

Ciò è in contraddizione con quanto abbiamo supposto al principio di questo articolo, cioè che il determinante *fondamentale* sia diverso da zero. Onde la (18) è inalterata dalle sostituzioni di (H) ed alterata dalle rimanenti sostituzioni di (G).

L'equazione $\varepsilon(z) = 0$ di grado e è quindi irreduttibile in K.

Inoltre è ciclica, poichè, applicando ai secondi membri delle uguaglianze

$$\eta_1 = x_1 + x_{1+e} + \ldots + x_{1+(\mu-1)e}$$

$$\eta_2 = x_2 + x_{2+e} + \ldots + x_{2+(\mu-1)e}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\eta_3 = x_e + x_{2e} + \ldots + x_{\mu e}$$

le n sostituzioni del gruppo di Galois dell'equazione (14), le radici $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_e$ si permutano fra di loro circolarmente.

Il determinante *fondamentale* dell'equazione $\varepsilon(z) = 0$, è diverso da zero. Infatti, essendo $\varepsilon(z) = 0$ normale, ogni funzione razionale in K delle sue radici si può rappresentare in funzione intera di una qualunque di esse, oppure in funzione lineare omogenea di tutte le radici dell'equazione (18) con coefficienti appartenenti a K.

Si ha dunque:

$$f(\eta_1) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \tag{19}$$

(denotando f il simbolo di una funzione razionale intera di η_1; inoltre $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono numeri appartenenti a K).

La funzione $f(\eta_1)$ è inalterata dalle sostituzioni di (H); altrettanto dovendo accadere per la funzione

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n,$$

questa si può scrivere nel seguente modo:

$$b_1\eta_1 + b_2\eta_2 + \ldots + b_e\eta_e.$$

Da cui si ricava che ogni funzione razionale in K di $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_e$ si può esprimere in funzione lineare omogenea delle radici $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_e$ con coefficienti appartenenti a K.

Per mezzo della funzione (18), la quale rimane inalterata nel suo valore numerico dalle sostituzioni del sottogruppo (H) di ordine μ ed alterata dalle rimanenti sostituzioni di (G), il problema della risolubilità dell'equazione (17) è reso più agevole.

Infatti, essendo $m = e\mu$, la risoluzione dell'equazione ciclica (17) si fa dipendere, come ci è noto, da un'altra equazione ciclica di grado e, risolta la quale si risolverà un'equazione ciclica di grado μ.

Più generalmente possiamo dire che, scomponendo il numero n, grado dell'equazione data, nei suoi fattori primi, cioè $n = p^\alpha q^\beta r^\gamma \ldots s^\delta$, in cui $p, q, r, \ldots, s$ sono numeri primi, la risoluzione dell' equazione data si fa dipendere da equazioni cicliche, rispettivamente di grado $p, q, r, \ldots, s$.

A tal uopo si costruiscono delle funzioni di $x_1, x_2, \ldots, x_n$, le quali rimangono inalterate numericamente dalle sostituzioni di certi sottogruppi ciclici di (G), ed alterate dalle altre sostituzioni appartenenti a (G).

Da ciò deriva l'importanza delle menzionate funzioni, che, come la (18) soddisfino alle condizioni testè enunciate e siano della massima semplicità.

10. Supponiamo che si abbia l'equazione ciclica di grado primo

$$F(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0, \tag{20}$$

irreduttibile nel campo (c) dei numeri reali commensurabili a cui appartengono i suoi coefficienti $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Vediamo in quali casi il suo determinante *fondamentale* sia uguale a zero, cioè sotto quali condizioni possa aver luogo una qualunque relazione fra le sue radici con coefficienti appartenenti a (c).

Supponiamo che si abbia:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0. \tag{21}$$

Le sostituzioni del gruppo di Galois della (20) siano:

$$S = (x_1, x_2, \ldots, x_n), S^2, \ldots, S^n = 1$$

Applicando alla (21) queste sostituzioni, si hanno le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n &= 0 \\ \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_3 + \ldots + \alpha_n x_1 &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \alpha_1 x_n + \alpha_2 x_1 + \ldots + \alpha_n x_{n-1} &= 0. \end{aligned} \tag{21'}$$

Consideriamo le (21)' come un sistema di n equazioni lineari omogenee nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Il determinante D del sistema, ossia

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_2 & x_3 & \dots & x_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n & x_1 & \dots & x_{n-1} \end{vmatrix},$$

è un circolante di ordine n; sappiamo dall' algebra che si scinde in n fattori razionali nei suoi elementi, cioè è uguale al prodotto

$$(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \psi(y_1)\,\psi(y_2) \dots \psi(y_n),$$

essendo

$$\psi(y) = x_1 + x_2 y + x_3 y^2 + \dots + x_n y^{n-1},$$

ove $y_1, y_2, \dots,$ sono radici dell'equazione

$$y^n - 1 = (y-1)(y^{n-1} + y^{n-2} + \dots + y + 1) = 0.$$

Se fosse $D = 0$, l'equazione in y

$$x_1 + x_2 y + x_3 y^2 + \dots + x_n y^{n-1} = 0 \tag{22}$$

avrebbe radici in comune con l'equazione

$$y^n - 1 = (y-1)(y^{n-1} + y^{n-2} + \dots + y + 1) = 0.$$

Ora, se la (22) fosse soddisfatta dalla radice $y = 1$, si avrebbe:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0,$$

cioè il coefficiente del secondo termine dell'equazione (20) sarebbe nullo.

Facciamo vedere che la (22) non può avere radici in comune con l' equazione

$$y^{n-1} + y^{n-2} + \dots + y + 1 = 0, \tag{23}$$

la quale altro non è che l'equazione della divisione del cerchio in n parti uguali (n essendo numero primo).

Sappiamo che la (23) è equazione ciclica, è irreduttibile [1] nel campo (c) dei numeri reali commensurabili, ed ha il determinante *fondamentale* diverso da zero.

Se al campo di razionalità (c) aggiungiamo le radici $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dell'equazione data (20), la (23) rimane ancora irreduttibile nel nuovo campo di razionalità $(c') = (c, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, poichè sappiamo [2] che: se al campo K di razionalità di un'equazione irreduttibile $f(x) = 0$, aggiungiamo una radice di un'equazione normale irreduttibile in K, il cui grado sia un numero primo rispetto a quello dell'equazione $f(x) = 0$, questa è irreduttibile nel nuovo campo di razionalità (c'). Onde, la (23), essendo irreduttibile nel campo di razionalità (c'), a cui appartengono le radici $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dell'equazione (20), non può avere radici in comune con questa se non siano verificate le seguenti uguaglianze:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n.$$

Ciò è assurdo, avendo supposto l'equazione (20) irreduttibile.

Possiamo dire che, se la somma delle radici della (20) è diversa da zero, cioè se abbiamo $a_1 \neq 0$, il determinante D testè considerato non è nullo.

Onde, il sistema (21)', composto di n equazioni lineari omogenee in $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, ammette l'unica soluzione

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0. \tag{24}$$

Le (24) ci dimostrano che, supponendo a_1 diverso da zero, la (21) non può aver luogo.

Si ha quindi: un'equazione ciclica, il cui grado sia numero primo, la quale, avendo il coefficiente del secondo termine diverso da zero, sia irreduttibile nel campo (c) dei numeri reali commensurabili a cui appartengono i suoi coefficienti, gode della proprietà che ogni funzione razionale in (c) delle sue radici si esprime in funzione lineare omogenea di queste con coefficienti appartenenti a (c).

11. Possiamo anche dire che:

« *La condizione necessaria e sufficiente, affinchè un'equazione ciclica di grado primo, irreduttibile nel campo* (c) *dei numeri reali commensurabili a cui appartengono i suoi coefficienti, abbia il determinante* fondamentale *diverso da zero, è che il coefficiente del suo secondo termine non sia nullo* ».

12. L'equazione (20), oltre della proprietà testè enunciata, ne gode di altre non meno prive d'interesse. Sulla (20) facciamo una trasformazione razionale, ponendo $y = f(x)$, ove f è il simbolo di una funzione razionale con coefficienti appartenenti a (c); possiamo sempre supporre la $f(x)$ intera e di grado al più uguale ad $n - 1$.

---

(1) Cfr. Kronecker, Journal de Liouville, 1854.

(2) Cfr. Bianchi Luigi, Teoria dei Gruppi di sostituzioni e delle equazioni algebriche secondo Galois.

L'equazione trasformata $\psi(y)=0$ di grado n, (essendo n numero primo) come è facile vedere, è irreduttibile [1] in (c).

Onde, essendovi l'invertibilità dei simboli funzionali nella relazione $y=f(x)$, si hanno le seguenti uguaglianze:

$$(K, x_1) = (K, y_1) ; (K, x_2) = (K, y_2) ; \ldots ; (K, x_n) = (K, y_n).$$

Tenuto conto che l'equazione (20) è normale, si ha:

$$(K, x_1) = (K, x_2) = \ldots = (K, x_n).$$

Onde si ricava:

$$(K, y_1) = (K, y_2) = \ldots = (K, y_n).$$

Queste ultime uguaglianze ci dicono che l'èquazione trasformata è normale; anzi, essendo il suo grado un numero primo, è ciclica come la primitiva.

Se il coefficiente del secondo termine dell' equazione trasformata è diverso da zero, potremo dire che ogni funzione razionale in (c) delle radici dell'equazione primitiva, si esprime in funzione lineare omogenea delle radici dell'equazione trasformata con coefficienti commensurabili.

Ciò premesso, studiamo il caso in cui l' equazione data $\varphi(x) = 0$ di grado primo, ciclica ed irreduttibile in (c), abbia nullo il coefficiente del suo secondo termine. Poniamo $y = x + d$, essendo d un numero non nullo appartenente a (c), nell'equazione $\varphi(x) = 0$. Questa si trasforma in un'altra $\psi(y) = 0$, la quale è dello stesso grado n della primitiva, ed è parimenti ciclica ed irreduttibile in (c). Poichè abbiamo supposto che d sia diverso da zero, così il coefficiente del secondo termine dell'equazione $\psi(y) = 0$ non è nullo.

Denotando $\Omega(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ il simbolo di una qualunque funzione razionale in (c) di $x_1, x_2, \ldots, x_n$, per quanto si è detto precedentemente, possiamo scrivere la seguente uguaglianza:

$$\Omega(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_n y_n. \tag{25}$$

Sostituendo nel secondo membro dell'uguaglianza (22) alle radici $y_1, y_2, \ldots, y_n$ i corrispondenti valori $x_1 + d, x_2 + d, \ldots, x_n + d$, ricavati dalla relazione $y = x + d$, si ha:

$$\Omega(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_n x_n + d \cdot \sum_{i=1}^{i=n} b_i.$$

13. Questa relazione, essendo $b_1, b_2, \ldots, b_n, d$ numeri appartenenti a (c), ci dice che:

---

[1] Cfr. Capelli, Istituzioni di Analisi Algebrica. Anno 1902.

« *Ogni funzione razionale in* (c) *delle radici di un'equazione ciclica, il cui grado sia un numero primo, irreduttibile nel campo* (c) *dei numeri reali commensurabili a cui appartengono i suoi coefficienti, si può esprimere in funzione lineare delle radici con coefficienti appartenenti a* (c) ».

14. Consideriamo per equazione trasformata quella le cui radici siano x_1^s, x_2^s, ..., x_n^s, essendo s un numero intero, positivo o negativo, fissato ad arbitrio.

Per quanto si è detto all'articolo 12 l'equazione trasformata di grado primo è ciclica ed irreduttibile in (c) come la proposta.

Onde, applicando il teorema (13) possiamo dire che:

« *Un'equazione ciclica di grado primo, irreduttibile nel campo* (c) *dei numeri reali commensurabili a cui appartengono i suoi coefficienti, gode della seguente proprietà: ogni funzione razionale in* (c) *delle sue radici si può esprimere in funzione lineare delle potenze ennesime di queste con coefficienti appartenenti a* (c), *essendo n un numero intero, positivo o negativo, fissato ad arbitrio* ».

15. Se la somma delle potenze di grado s delle radici x_1, x_2, ..., x_n è diversa da zero, possiamo dire che ogni funzione razionale in (c) delle radici dell'equazione ciclica data di grado primo si esprime in funzione lineare omogenea delle potenze di grado s delle radici con coefficienti commensurabili. Se s è un numero pari si ha: ogni funzione razionale in (c) delle radici di un' equazione ciclica di grado primo, irreduttibile nel campo (c) dei numeri reali commensurabili a cui appartengono i suoi coefficienti, si può esprimere in funzione lineare omogenea delle potenze di grado s delle radici (essendo s un numero intero pari, positivo o negativo fissato ad arbitrio).

16. Consideriamo per equazione trasformata quella le cui radici siano le inverse delle radici della proposta. Poichè si ha:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}=-\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

possiamo dire che ogni funzione razionale in (c) delle radici di un' equazione ciclica di grado primo, irreduttibile nel campo (c) dei numeri reali commensurabili a cui appartengono i suoi coefficienti, la quale abbia il coefficiente del penultimo termine diverso da zero, si può esprimere in funzione lineare omogenea delle inverse delle radici con coefficienti appartenenti a (c).

Napoli 4 agosto 1903.

SOPRA
LA QUESTIONE PROPOSTA NEL FASCICOLO MAGGIO-GIUGNO 1903

RISOLUZIONE DELL' AUTORE

Il rapporto u_n/v_n tende ad un limite, che non può essere diverso da zero, altrimenti la prima serie sarebbe divergente come la seconda. Il rapporto $b_n = v_n/u_n$ cresce dunque all' infinito; e però (*Analisi algebrica*, p. 98)

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}, \tag{1}$$

quando esiste il secondo membro. Ora, se si prende

$$a_n = b_n S_n - (v_1 + v_2 + \ldots + v_n),$$

dove $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, si ha

$$a_n - a_{n-1} = b_n(S_n - u_n) - b_{n-1}S_{n-1} = (b_n - b_{n-1})S_{n-1},$$

e però esiste, in questo caso, il secondo membro di (1), ed è la somma S della prima serie. Dunque

$$\lim \left(S_n - \frac{u_n}{v_n}(v_1 + v_2 + \ldots + v_n)\right) = S,$$

e per conseguenza

$$\lim \frac{u_n}{v_n}(v_1 + v_2 + \ldots + v_n) = 0.$$

In particolare per $v_n = 1$ si ha che nu_n tende a zero nelle serie convergenti a termini positivi *decrescenti*. Per $v_n = 1/n$ si trova che, *se* nu_n *va decrescendo*, il suo prodotto per $\log n$ tende necessariamente a zero; ecc. Se poi si rappresenta con k_n un numero, che vada crescendo con n in guisa che il rapporto di $k_n - k_{n-1}$ a v_n si serbi finito, è chiaro che ciò sarà vero anche del rapporto di k_n a $v_1 + v_2 + \ldots + v_n$; e però si avrà, più generalmente,

$$\lim_{n=\infty} k_n \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

Questo teorema è dovuto al prof. F. Giudice [1].

---

[1] " *Teoremi relativi alla convergenza*, ecc. " (teor. VIII) nelle " *Matematiche pure ed applicate* " 1902.

SUI COMPLESSI TETRAEDRALI

NOTA

DI

F. ASCHIERI.

Il compianto prof. Battaglini ha lasciato interessanti lavori sulla geometria della retta trattata col metodo delle coordinate, contemporaneamente al Plücker fondatore di quella geometria con quel metodo.

I detti lavori furono pubblicati nella maggior parte, nei primi volumi di questo giornale (dal 6° in avanti), ed uno nei rendiconti dell' Accademia dei lincei, (anno 1869), che verte sui complessi tetraedrali.

La seguente nota non ha altro scopo che di richiamare l' attenzione degli studiosi sui lavori del compianto geometra, specialmente per le molte formole poste che servono in particolare alla geometria delle forme fondamentali di 1ª 2ª e 3ª specie dello spazio rigato e dei loro sistemi lineari che, nella rappresentazione sopra una quadrica di uno spazio lineare $S_5 \infty^5$, corrispondono agli spazi lineari contenuti nella quadrica stessa ed ai sistemi di tali spazi.

Delle dette formole si fa in questa nota applicazione allo studio del *complesso tetraedrale*, del quale si danno le varie generazioni, l' equazione della *congruenza di 1° grado polare* di una retta qualunque e si considerano le rette *conjugate* rispetto ad esso, le rette *singolari* di esso e la *superficie-complesso* relativa ad una retta *g*.

Si pone poi una speciale rappresentazione del complesso tetraedrale sullo spazio punteggiato e composto di piani e se ne deducono alcune proprietà già note e si aggiungono alcune considerazioni che si sono credute non prive d'interesse, specialmente riguardanti le quadriche contenenti rigate del complesso.

Avuto riguardo allo scopo principale della pubblicazione sarà scusato certamente l'indole elementare ed antiquata del soggetto, massimamente perchè già trattato da tanti valenti geometri, fra i quali il Reye e lo Sturm in parcolare.

A questa nota farà seguito una seconda che studia, collo stesso metodo, la congruenza di 2° grado generale.

PARTE PRIMA

1. Gli elementi dello spazio siano determinati con un sistema di coordinate omogenee projettive; ed indicati, in generale, con X od (x_1, x_2, x_3, x_4) il punto di coordinate x_r, e con ξ o $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ il piano di coordinate ξ_r: con A_1, A_2, A_3, A_4; α_1, α_2, α_3, α_4 i punti e i piani fondamentali (1, 0, 0, 0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1) e con E, ε il punto e il piano unità, cioè il punto ed il piano (1,1,1,1). Indico inoltre con x_{rs} ($rs = 23, 31, 12, 14, 24, 34$) le *coordinate locali* della retta $x = XY$, quindi:

$$x_{rs} = x_r y_s - x_s y_r,$$

e con ξ_{rs} le *coordinate tangenziali* della retta stessa $x = \xi\eta$, cioè:

$$\xi_{rs} = \xi_r \eta_s - \xi_s \eta_r$$

onde le relazioni:

$$\xi_{rs} = \rho x_{uv}$$

$$(rs = 23, 31, 12, 14, 24, 34;\ uv = 14, 24, 34, 23, 31, 12).$$

Pongo per brevità:

$$(xx) = x_{23}x_{14} + x_{31}x_{24} + x_{12}x_{34}$$

$$(xy) = x_{23}y_{14} + y_{23}x_{14} + \ldots =$$

$$= \sum x_{rs}y_{uv} = \sum \frac{d(xx)}{dx_{rs}} y_{rs} = \sum \frac{d(yy)}{dy_{rs}} x_{rs},$$

ove il simbolo Σ denota l'operazione della somma.

Si avrà quindi identicamente:

$$(xx) = 0 \quad , \quad (\xi\xi) = 0,$$

e le relazioni:

$$(xy) = \Sigma x_{rs} y_{uv} = 0$$

$$(x\eta) = \Sigma x_{rs} \eta_{rs} = 0$$

sono quelle che debbono aver luogo fra le coordinate locali di due rette x, y,

oppure fra le coordinate locali di una retta x e le tangenziali di y, affinchè le due rette si appoggino.

2. Ciò posto denotiamo con:

$$[x(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)] \quad [x(\alpha_2\alpha_3\alpha_1\alpha_4)] \quad [x(\alpha_3\alpha_1\alpha_2\alpha_4)]$$

i birapporti principali di 4 punti in cui la retta x sega le 4 faccie del tetraedro fondamentale che indico con Δ, si avrà:

$$[x(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)] = -\frac{x_{31}\,x_{24}}{x_{23}\,x_{14}} = k$$

$$[x(\alpha_2\alpha_3\alpha_1\alpha_4)] = -\frac{x_{12}\,x_{34}}{x_{31}\,x_{24}} = \frac{k-1}{k}$$

$$[x(\alpha_3\alpha_1\alpha_2\alpha_4)] = -\frac{x_{23}\,x_{14}}{x_{12}\,x_{34}} = \frac{1}{1-k}.$$

Adoperando le notazioni analoghe per i birapporti dei 4 piani che dalla retta x projettano i 4 vertici di Δ, si avrà:

$$[x(A_1A_2A_3A_4)] = -\frac{\xi_{31}\,\xi_{24}}{\xi_{23}\,\xi_{14}} = k$$

$$[x(A_2A_3A_1A_4)] = -\frac{\xi_{12}\,\xi_{34}}{\xi_{31}\,\xi_{24}} = \frac{k-1}{k}$$

$$[x(A_3A_1A_2A_4)] = -\frac{\xi_{23}\,\xi_{14}}{\xi_{12}\,\xi_{34}} = \frac{1}{1-k},$$

onde il noto teorema: il *birapporto dei 4 punti in cui una retta sega le 4 faccie di un tetraedro prese in un certo ordine eguaglia quello dei 4 piani che da quella stessa retta projettano ordinatamente i vertici opposti* (¹).

Segue subito:

a) *Il luogo* T *delle rette dello spazio che tagliano le 4 faccie di un tetraedro* Δ, *prese in un certo ordine, in gruppi di 4 punti aventi un dato birapporto* k, *è anche il luogo delle rette da cui i vertici opposti a quelle faccie vengono projettati con gruppi di 4 piani aventi lo stesso birapporto* k.

Il luogo T è dunque un complesso di 2° grado, poichè le rette del luogo

---

(¹) Vedi Sturm: Geometria della retta, Vol. 1.° n. 48).

che si trovano in un piano arbitrario ξ vi formano un inviluppo $\gamma_\xi^{(2)}$ di 2ª classe a cui appartengono le rette $\xi\alpha_r$; e le rette passanti per un punto Y dello spazio formano un cono quadrico $y^{(2)}$ circoscritto a Δ. Al luogo T appartengono le 4 stelle (A_r) di raggi aventi per centri i vertici di Δ e le 4 faccie α_r di Δ, come piani rigati.

Il complesso T fu chiamato *Complesso tetraedrale*; Δ ne è il *tetraedro principale*; i vertici e le faccie di Δ ne sono i punti e i piani *principali*.

Essendo adunque Δ il tetraedro fondamentale e k il birapporto dei 4 punti in cui una retta corrente x del luogo T taglia ordinatamente le faccie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ di Δ, saranno:

$$(1) \qquad T(x) = x_{31}x_{24} + kx_{23}x_{14} = 0 \qquad T(\xi) = \xi_{31}\xi_{24} + k\xi_{23}\xi_{14} = 0$$

l'equazioni *locale* e *tangenziale* di T, essendo x_{rs}, ξ_{rs} rispettivamente le coordinate locali e tangenziali di una retta del luogo.

All'equazioni stesse si può dare la forma:

$$(2) \qquad \begin{cases} T(x) = ax_{23}x_{14} + bx_{31}x_{24} + cx_{12}x_{34} = 0 \\ T(\xi) = a\xi_{23}\xi_{14} + b\xi_{31}\xi_{24} + c\xi_{12}\xi_{34} = 0, \end{cases}$$

od anche le forme:

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{x_{23}x_{14}}{b-c} = \dfrac{x_{31}x_{24}}{c-a} = \dfrac{x_{12}x_{34}}{a-b} \\ \dfrac{\xi_{23}\xi_{14}}{b-c} = \dfrac{\xi_{31}\xi_{24}}{c-a} = \dfrac{\xi_{12}\xi_{34}}{a-b}, \end{cases}$$

a causa dell'identità:

$$(x\,x) = 0 \qquad (\xi\,\xi) = 0,$$

essendo:

$$k = \frac{a-c}{b-c},$$

cosicchè in infiniti modi si può porre l'equazione di T sotto la forma (2).

Risulta subito:

Un complesso tetraedrale T *è determinato interamente dal suo tetraedro principale* Δ *e dal birapporto* k *in cui una retta di esso deve tagliare ordinatamente le 4 facce* $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ *del tetraedro stesso* Δ; o, ciò che è lo stesso, *è determinato interamente da* Δ *e da una retta che non appartenga nè ad alcun vertice nè ad alcuna faccia di* Δ.

Risulta ancora:

Un complesso tetraedrale T *ha per polare reciproco se stesso rispetto ad ogni quadrica conjugata al suo tetraedro principale.*

3. Siano $P_r (r = 1, 2, 3, 4)$ i punti in cui una retta g di T taglia ordinatamente $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. Da uno spigolo A_1A_2 di Δ projettiamo i punti P_r sullo spigolo opposto A_3A_4 e indichiamo con P'_1, P'_2 le projezioni di P_1, P_2, si avrà:

$$(P'_1\ P'_2\ A_4\ A_3) = k,$$

essendo:

$$[g(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)] = (P_1\ P_2\ P_3\ P_4) = k,$$

onde:

b) *Il complesso* T *è il luogo delle rette che si appoggiano alle coppie di raggi corrispondenti in due fasci projettivi di raggi che hanno i centri in due vertici qualsiansi* $A_1\ A_2$ *del tetraedro principale e per piani le faccie ad essi opposte.*

Questa generazione di T ha dunque luogo per ogni coppia di vertici del suo tetraedro principale. Con essa il complesso tetraedrale si presenta come caso particolare del complesso di 2° grado luogo delle congruenze secondo cui si tagliano le coppie di complessi corrispondenti in due fasci projettivi di complessi di 1° grado. Si ha il complesso tetraedrale quando i due fasci di complessi di 1° grado sono due fasci di complessi speciali.

4. Le omografie dello spazio che hanno un dato tetraedro Δ di elementi uniti, formano un sistema lineare ∞^3.

Assumendo Δ per tetraedro fondamentale, una qualunque Ω di tali omografie è rappresentata dalla sostituzione lineare:

$$\rho x_r = a_{rr} x'_r \qquad (r = 1, 2, 3, 4).$$

Risulta subito che il luogo delle rette che congiungono le coppie di punti χ, χ', *corrispondenti* in Ω, è quello definito da una qualunque dell' equazioni:

$$\frac{x_{23}\, x_{14}}{(a_{22} - a_{33})(a_{11} - a_{44})} = \frac{x_{31}\, x_{24}}{(a_{33} - a_{11})(a_{22} - a_{44})} = \frac{x_{12}\, x_{34}}{(a_{11} - a_{22})(a_{33} - a_{44})}.$$

Dunque il luogo nominato è un complesso tetraedrale, il cui tetraedro principale è il tetraedro degli elementi uniti dell' omografia Ω, ed è:

$$k_1 = \frac{(a_{11} - a_{33})(a_{22} - a_{44})}{(a_{22} - a_{33})(a_{11} - a_{44})}$$

il birapporto dei 4 punti in cui una retta del complesso taglia costantemente le faccie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ di Δ.

Il complesso stesso è poi anche il luogo delle rette in cui si tagliano le cop-

pie di piani corrispondenti nell' omografia Ω, od anche il luogo delle rette dello spazio le cui corrispondenti in Ω e nella sua inversa Ω^{-1} si tagliano.

Un' omografia dello spazio, con un dato tetraedro di elementi uniti, è determinata data inoltre una coppia di punti corrispondenti, e quindi:

c) *Per ogni complesso tetraedrale* T, *dato pel suo tetraedro principale e per una retta* g, *resta determinata, per ogni coppia di punti* $\chi\chi'$ *corrispondenti presi sulla retta* g, *un' omografia* Ω *per cui* T *è il luogo delle rette dello spazio che congiungono le coppie di punti corrispondenti di* Ω.

Questa generazione di T si fa quindi in infinite maniere, vale a dire esistono infinite omografie che danno lo stesso complesso tetraedrale, e risulta subito che, in ognuna di tali omografie Ω, T ha per corrispondente se stesso.

5. A questa generazione di T, assunta dal Reye per dedurne le principali proprietà del complesso stesso, si può dare un altro aspetto. Due quadriche $S_1^{(2)}$, $S_2^{(2)}$ dello spazio hanno in generale un tetraedro conjugato comune. Se questo si assume per tetraedro fondamentale Δ l' equazioni delle quadriche si pongono sotto le forme:

$$f(x) = \Sigma\, l_r x_r^2 = 0 \quad , \quad \varphi(x) = \Sigma\, m_r x_r^2 = 0$$

$$(r = 1\,,\,2\,,\,3\,,\,4).$$

Esse determinano un fascio F di quadriche a cui appartengono, ed è:

$$F_\lambda(x) = \Sigma\,(l_r + \lambda\, m_r) x_r^2 = 0\,,$$

per ogni valore di λ, l'equazione di una quadrica $S_\lambda^{(2)}$ del fascio F. I piani polari di un punto Y rispetto a tutte le quadriche del fascio F, passano per una stessa retta y, che, brevemente, diremo la *retta polare* di Y rispetto alla quartica $C^{(4)}$ *base* del fascio.

Posto:

$$\mu_{rs} = l_r\, m_s - l_s\, m_r\,,$$

le μ_{rs} non sono altro che le coordinate tangenziali della retta polare del punto unità E rispetto a $C^{(4)}$ e le formole:

$$4) \qquad \eta_{rs} = \mu_{rs}\, y_r\, y_s \quad , \quad y_{rs} = \mu_{uv}\, y_u\, y_v$$

$$(rs = 23\,,\,31\,,\,12\,,\,14\,,\,24\,,\,34 \quad ; \quad uv = 14\,,\,24\,,\,34\,,\,23\,,\,31\,,\,12)$$

danno le coordinate tangenziali e locali della retta y espresse per quelle del suo polo Y, ed y determina, in generale, in modo unico il suo polo Y; giac-

chè y è l' intersezione delle rette polari di Y rispetto ad $S_1^{(2)}$, $S_2^{(2)}$. Risulta quindi:

d) *Il luogo delle rette polari dei punti dello spazio rispetto alla quartica* $C^{(4)}$, *intersezione di due quadriche* $S_1^{(2)}$, $S_2^{(2)}$ *non è altro che un complesso tetraedrale, avente per tetraedro principale il tetraedro* Δ *conjugato comune alle due quadriche*:

E difatti il luogo nominato è rappresentato da una qualunque delle equazioni:

$$\frac{x_{23}\, x_{14}}{\mu_{23}\, \mu_{14}} = \frac{x_{31}\, x_{24}}{\mu_{31}\, \mu_{24}} = \frac{x_{12}\, x_{34}}{\mu_{12}\, \mu_{34}},$$

od anche, posto per brevità:

$$l_r\, m_s + l_s\, m_r = [l_r\, m_s],$$

dalla:

$$[l_2\, m_3]\,[l_1\, m_4]\, x_{23}\, x_{14} + [l_3\, m_1]\,[l_2\, m_4]\, x_{31}\, x_{24} + [l_1\, m_2]\,[l_3\, m_4]\, x_{12}\, x_{34} = 0.$$

Il complesso coincide con T se le due quadriche $S_1^{(2)}$, $S_2^{(2)}$, ossia le loro polarità, siano determinate in modo che, avendo per tetraedro polare Δ, i piani polari di un punto E passano per una retta di T.

6. Del resto la generazione ora data di T equivale alla precedente cioè a considerare T come luogo delle rette che congiungono le coppie di punti corrispondenti in una determinata omografia Ω dello spazio, che è precisamente quella Ω in cui sono corrispondenti i poli di uno stesso piano rispetto ad $S_1^{(2)}$, $S_2^{(2)}$ ed i piani polari di uno stesso punto rispetto a quelle quadriche. Il complesso T può quindi anche definirsi:

Il luogo delle rette dello spazio le cui polari rispetto a due quadriche $S_1^{(2)}$, $S_2^{(2)}$ *si tagliano.*

Una retta y di T non è altro che la congiungente i poli di un piano rispetto ad $S_1^{(2)}$, $S_2^{(2)}$. Diciamo ora, correlativamente, retta y *polare* di un piano η rispetto al fascio $\gamma^{(4)}$ *base* di un fascio Φ di inviluppi di 2ª classe, il luogo dei poli di un piano η rispetto a tutti gli inviluppi del fascio.

Essendo:

$$\varphi_1(x) = \sum \frac{1}{l_r}\, \xi_r^2 = 0 \quad , \quad \varphi_2(x) = \sum \frac{1}{m_r}\, \xi_r^2 = 0,$$

l'equazioni degli inviluppi $\Sigma_1^{(2)}$, $\Sigma_2^{(2)}$ dei piani tangenti di $S_1^{(2)}$ $S_2^{(2)}$, essi determinano un fascio Φ di inviluppi di 2ª classe a cui appartengono; e T è *il luogo delle rette polari dei piani dello spazio rispetto al fascio* $\gamma^{(4)}$ *di piani base del fascio* Φ *di inviluppi.*

Essendo m_{rs} le coordinate della retta polare del piano unità rispetto a $\Sigma_1^{(2)}$, $\Sigma_2^{(2)}$, ossia:

$$m_{rs} = \frac{1}{l_r m_s} - \frac{1}{m_r l_s},$$

sono:

$$y_{rs} = m_{rs}\,\eta_r\,\eta_s \qquad \eta_{rs} = m_{uv}\,\eta_u\,\eta_v$$

l'espressioni delle cordinate locali e tangenziali della retta y polare del piano η rispetto a $\gamma^{(4)}$, e viceversa y determina il suo *piano* polare η, poichè η è il piano delle rette polari di y rispetto ad $S_1^{(2)}$, $S_2^{(2)}$.

Per equazione di T si può quindi assumere una qualunque delle:

$$\frac{x_{23}\,x_{14}}{m_{23}\,m_{14}} = \frac{x_{31}\,x_{24}}{m_{31}\,m_{24}} = \frac{x_{12}\,x_{34}}{m_{12}\,m_{34}},$$

ossia posto:

$$\frac{1}{l_r} = l'_r \qquad \frac{1}{m_r} = m'_r \qquad l'_r\,m'_s + m'_s\,l'_r = [l'_r\,m'_s],$$

per equazione di T si può assumere la:

$$[l'_2\,m'_3]\,[l'_1\,m'_4]\,x_{23}\,x_{14} + [l'_3\,m'_1]\,[l'_2\,m'_4]\,x_{31}\,x_{24} + [l'_1\,m'_2]\,[l'_3\,m_4']\,x_{12}\,x_{34} = 0.$$

7. Ma ha luogo un altra generazione di T che è notevole. Consideriamo un piano α_4 ed una stella (A_4) riferiti fra loro projettivamente. Essendo appunto A_1, A_2, A_3 i punti del piano α_4 per cui passano i corrispondenti raggi della stella (A_4), saranno:

$$\rho\,x_1 = l\,x'_1 \qquad \rho\,x_2 = m\,x'_2 \qquad \rho\,x_3 = n\,x'_3$$

le formole che servono a rappresentare l'omografia richiesta; e:

$$\begin{matrix} l\,x'_1 & m\,x'_2 & n\,x'_3 & 0 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 & \mu, \end{matrix}$$

per ogni valore di μ, le coordinate di un punto χ del piano α_4 e di un punto χ_1 del raggio x' corrispondente di χ; e quindi:

$$\rho'\,x'_{23} = (m-n)\,x'_2\,x'_3 \qquad \rho'\,x_{14} = l\,x'_1\,\mu;$$

$$\rho'\,x_{31} = (n-l)\,x'_3\,x'_1 \qquad \rho'\,x_{24} = m\,x'_2\,\mu$$

$$\rho'\,x_{12} = (l-m)\,x'_1\,x'_2 \qquad \rho'\,x_{34} = n\,x'_3\,\mu$$

sono le coordinate locali della retta x che unisce un punto $\chi = (x'_1 l \; x'_2 m \; x'_3 n \; 0)$ del piano α_4 con un punto qualunque χ_1 del raggio x', corrispondente di χ nella omografia posta fra il piano α_4 e la stella (A_4). *Il luogo quindi delle rette che dai punti di un piano α_4 projettano i corrispondenti raggi di una stella (A_4), riferita projettivamente al piano, è un complesso tetraedrale definito da una qualunque dell' equazioni:*

$$\frac{x_{23}\, x_{14}}{l(m-n)} = \frac{x_{31}\, x_{24}}{m(n-l)} = \frac{x_{12}\, x_{34}}{n(l-m)};$$

che coincide con T se siano:

$$a x_1 : b x_2 : c x_3 = x'_1 : x'_2 : x'_3$$

le formole che servono a rappresentare l'omografia fra il piano α_4 e la stella (A_4); onde la generazione di T ora data si può ottenere in infiniti modi per ogni faccia α_r del suo tetraedro principale e per la stella (A_r) che ha il centro nel vertice A_r opposto a quella faccia.

I diversi modi di generazione di un complesso tetraedrale possono servire a darne tutte le principali proprietà.

Intanto l'equazioni:

$$T(x) = (b-c)(y_1 y_4 x_2 x_3 + y_2 y_3 x_1 x_4) + (c-a)(y_2 y_4 x_3 x_1 + y_3 y_1 x_2 x_4) +$$

$$+ (a-b)(y_3 y_4 x_1 x_2 + y_1 y_2 x_3 x_4) = 0$$

$$T'(\xi) = (b-c)(\eta_1 \eta_4 \xi_2 \xi_3 + \eta_2 \eta_3 \xi_1 \xi_4) + (c-a)(\eta_2 \eta_4 \xi_3 \xi_1 + \eta_3 \eta_1 \xi_2 \xi_4) +$$

$$+ (a-b)(\eta_3 \eta_4 \xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 \xi_3 \xi_4) = 0$$

rappresentano rispettivamente il cono $y^{(2)}$ del complesso di vertice Y e l'inviluppo $\eta^{(2)}$ del complesso di piano η. Il cono $y^{(2)}$ e l' inviluppo $\eta^{(2)}$ sono degeneri soltanto quando il vertice Y del cono sia un punto di una faccia di Δ e il piano η dell'inviluppo sia un piano passante per un vertice di Δ.

In altri termini: *i punti singolari di* T *sono i punti delle faccie di* Δ ed i *piani singolari del complesso stesso sono i piani delle stelle che hanno i centri nei vertici di* Δ.

Od anche: *le faccie di* Δ *costituiscono la superficie di* 4° *ordine* SINGOLARE *del complesso e i vertici di* Δ, *essenzialmente pensati come centri di stelle di piani, costituiscono l'inviluppo di* 4ª *classe* SINGOLARE *di* T.

Considerando una faccia di Δ per es. α_4 ed il suo vertice opposto A_4, il cono di T corrispondente al punto $Y = (y_1 \; y_2 \; y_3 \; 0)$ di α_4, si scinde in un fascio di raggi di centro Y del piano α_4 e nel fascio di raggi che, avendo il centro nel punto Y, è situato nel piano η della stella (A_4) definito dall'equazione:

$$(b-c) y_2 y_3 x_1 + (c-a) y_3 y_1 x_2 + (a-b) y_1 y_2 x_3 = 0.$$

Per brevità il secondo fascio di raggi di T uscenti da Y e giacenti nel piano η lo diremo il fascio f_y *corrispondente* al punto Y di α_4 od anche il fascio f_η *corrispondente* al piano η della stella (A_4).

Quindi le formole

$$\eta_1 : \eta_2 : \eta_3 = (b-c)y_2y_3 : (c-a)y_3y_1 : (a-b)y_1y_2 ,$$

da cui

$$y_1 : y_2 : y_3 = \frac{\eta_2\eta_3}{(c-a)(a-b)} : \frac{\eta_3\eta_1}{(a-b)(b-c)} : \frac{\eta_1\eta_2}{(b-c)(c-a)} ,$$

definiscono una corrispondenza birazionale quadratica Γ_4, nella quale ad un punto Y del piano α_4 corrisponde il piano η della stella (A_4) del fascio f_η di raggi di T *corrispondente* al punto Y.

I punti A_1, A_2, A_3 ed i piani α_1, α_2, α_3 sono i punti e i piani *fondamentali* della corrispondenza quadratica. Al punto A_r di α_4 corrispondono tutti i piani passanti per A_rA_4, ed al piano α_r di (A_4) corrispondono tutti i punti della retta $\alpha_r\alpha_4$.

Ed in generale risulta:

Ai punti di una retta p *del piano* α_4 *corrispondono in* Γ_4 *i piani* η *della stella* (A_4) *che inviluppano un cono quadrico a cui sono tangenti i piani* α_1, α_2, α_3, pA_4; *ed ai piani* η *di un fascio* (g) *della stella* (A_4) *corrispondono in* α_4 *i punti di una conica che passa per i punti* A_1, A_2, A_3, $g\alpha_4$.

In particolare al punto $E_4 = (1, 1, 1, 0)$ del piano α_4 proiezione del punto E dal vertice A_4, corrisponde il piano ξ_4:

$$(b-c)x_1 + (c-a)x_2 + (a-b)x_3 = 0$$

che coi tre piani

$$A_4A_1E \ , \ A_4A_2E \ , \ A_4A_3E$$

forma un fascio di piani il cui birapporto è k. Dato quindi T per il suo tetraedro principale e per la costante k, da cui allora solo dipende, resta determinata la corrispondenza quadratica Γ_r che ha luogo fra i centri ed i piani dei fasci di raggi di T *corrispondenti* ai punti di una faccia α_r di Δ, poichè di tale corrispondenza ne sono dati gli elementi fondamentali ed una coppia di elementi corrispondenti; ed allora:

Il complesso T *è il luogo delle rette dello spazio che, passando per ogni punto* Y *di una faccia* α_r *del tetraedro* Δ *principale, sono situate nei corrispondenti piani dell'ora nominata corrispondenza quadratica* Γ_r *fra gli elementi del piano* α_r *e della stella* (A_r).

I caratteri della corrispondenza quadratica Γ_r si sarebbero potuti dedurre facilmente dall'ultima generazione data di T, o dalla seconda, colla pura geometria.

9. Senza nessuna difficoltà risultano subito di un complesso tetraedrale, T, ancora le seguenti proprietà:

In ogni polarità nulla Θ *di spazio, in cui siano rette polari reciproche due spigoli opposti del tetraedro principale* Δ, *il complesso tetraedrale ha per polare reciproco se stesso.*

Il complesso ha per polare reciproco se stesso in tutte le polarità rispetto a quadriche che contengono un quadrilatero gobbo semplice del suo tetraedro prinpale; ed ha pure per corrispondente se stesso in ogni omografia biassiale i cui assi siano una coppia di spigoli opposti del suo tetraedro principale.

L' equazioni quindi:

$$\theta_1 = \alpha_{23}x_{23} + \alpha_{14}x_{14} = 0 \qquad \theta_3 = \alpha_{31}x_{31} + \alpha_{24}x_{24} = 0 \qquad \theta_5 = \alpha_{12}x_{12} + \alpha_{34}x_{34} = 0$$

$$\theta_2 = \alpha_{23}x_{23} - \alpha_{14}x_{14} = 0 \qquad \theta_4 = \alpha_{31}x_{31} - \alpha_{24}x_{24} = 0 \qquad \theta_6 = \alpha_{12}x_{12} - \alpha_{34}x_{34} = 0$$

sono quelle di sei complessi θ_r di 1° grado, a due a due in involuzione, le cui polarità nulle trasformano in se stesso il complesso tetraedrale T, e lo stesso è a dirsi delle 10 polarità rispetto alle 10 quadriche a cui appartengono le 20 rigate intersezioni dei sei complessi a tre a tre e alle omografie rigate involutorie aventi per rette doppie due spigoli del tetraedro principale Δ.

Si ha dunque, intanto, coll'identità, un gruppo di 20 corrispondenze lineari di spazio, *involutorie*, a due a due *permutabili* che trasformano in se stesso ogni complesso tetraedrale T avente per tetraedro principale Δ il tetraedro che serve a determinare, nel modo noto, le 20 corrispondenze. Anche le omologie armoniche che hanno per centri i vertici di Δ e per piani le faccie opposte trasformano in se stesso il complesso T etc.

10. Siano y, z due rette che si appoggiano, di coordinate locali y_{rs}, z_{rs} allora le formole

$$\rho x_{rs} = y_{rs} + \lambda z_{rs}$$

$$(rs = 23\,,\,31\,,\,12\,,\,14\,,\,24\,,\,34)$$

per ogni valore di λ, danno le coordinate x_{rs} di un raggio x del fascio yz a cui appartengono y, z, avendosi:

$$(yz) = \Sigma y_{rs}\, z_{uv} = 0.$$

Posto in generale:

$$\mathrm{T}(x) = ax_{23}x_{14} + bx_{31}x_{24} + cx_{12}x_{34}\,,$$

$$\mathrm{T}(uv) = \Sigma \frac{d\mathrm{T}(u)}{du_{rs}}\, v_{rs} = \Sigma \frac{d\mathrm{T}(v)}{dv_{rs}}\, u_{rs}$$

l'equazione quadratica in λ:

$$\lambda^2 T(z) + \lambda T(yz) + T(y) = 0 \tag{4}$$

ha per radici i parametri (lineari) λ_1, λ_2 dei raggi di T situati nel fascio yz. I due raggi y, z dividono armonicamente la coppia di raggi (λ_1), (λ_2) se sia quindi:

$$T(yz) = 0.$$

Dunque l' equazioni:

$$(yx) = 0 \ , \ \theta_y = \Sigma \frac{dT(y)}{dy_{rs}} x_{rs} = 0 \ ,$$

ove y_{rs} sono le coordinate di una retta fissa y, rappresentano una congruenza Δ_y di primo grado luogo delle rette che tagliando la y sono situate nei piani polari di y rispetto a tutti i coni di T che hanno i vertici su y. Cangiando le coordinate locali in tangenziali le stesse equazioni dicono che la congruenza Δ_y è anche il luogo *delle rette dello spazio che appoggiandosi ad* y *passano per i poli di* y *rispetto agli inviluppi del complesso* T *situati in piani di* y.

Questa congruenza Δ_y, interamente determinata dalla retta y, è detta *la congruenza polare* di y rispetto a T e risulta subito:

Se x *è una retta della congruenza* Δ_y *polare di* y, *viceversa* y *è una retta della congruenza* Δ_x *polare di* x.

Le direttrici della congruenza sono la retta y e la retta y' polare di y rispetto al complesso $\theta_y = 0$, che si dice anche il *complesso polare* di y relativo alla equazione adottata di T.

La retta y' è anche la polare di y rispetto ad uno qualunque dei complessi

$$\theta_x = \sum \left(y_{uv} + \lambda \frac{dT(y)}{dy_{rs}} \right) x_{rs} = 0$$

del fascio determinato da Δ_y.

In particolare, posto:

$$T'(y) = a^2 y_{23} y_{14} + b^2 y_{31} y_{24} + c^2 y_{12} y_{34} \ ,$$

sarà

$$2T(y) + \lambda T'(y) = 0$$

l'equazione che dà il parametro λ dell'altro complesso speciale θ'_y passante per Δ_y; onde saranno

$$\rho y'_{rs} = y_{rs} T'(y) - 2 T(y) \frac{dT(y)}{dy_{uv}}$$

$$(rs = 23 \ , 31 \ , \ldots \ ; \quad uv = 14 \ , 24 \ , \ldots)$$

l'espressioni delle coordinate y'_{rs} locali della retta y', altra direttrice della congruenza Δ_y. Questa retta y' dicesi anche la *conjugata* di y rispetto a T; ed è dunque l'inviluppo dei piani polari di y rispetto a tutti i coni di T che hanno i vertici su y; o il luogo dei poli di y rispetto a tutti gl'inviluppi di T situati in piani per y. La costruzione di tale retta è subito fatta.

11. Se la retta y appartiene a T, essa appartiene anche al complesso θ_y polare di y: la congruenza quindi Δ_y ha per direttrice doppia la retta y ed è il luogo delle rette che appoggiandosi ad y sono situate nei piani tangenti lungo y ai coni di T aventi i vertici su y; oppure il luogo delle rette che appoggiandosi ad y passano per i punti di contatto di y relativi agli inviluppi di T situati in piani per y.

La congruenza Δ_y dicesi allora *tangente* in y a T. Ogni retta y dello spazio ha la sua conjugata y' rispetto a T che coincide con y se y è una retta di T.

Ma come ad una retta y presa arbitrariamente corrisponde una sola conjugata y'; viceversa y' non è in generale conjugata ad una sola retta y.

Perciò osserviamo che la rigata $r_y^{(2)}$, intersezione dei tre complessi:

$$\Omega_y = y_{14}x_{23} - y_{23}x_{14} = 0 \quad , \quad \Omega'_y = y_{24}x_{31} - y_{31}x_{24} = 0 \quad , \quad \Omega''_y = y_{34}x_{12} - y_{12}x_{34} = 0,$$

è contenuta in una quadrica $S_y^{(2)}$ conjugata a Δ, e la quadrica contiene pure la rigata $r'_y{}^{(2)}$ intersezione dei tre complessi

$$C_y = y_{14}x_{23} + y_{23}x_{14} = 0 \quad , \quad C'_y = y_{24}x_{31} + y_{31}x_{24} = 0 \quad C''_y = y_{34}x_{12} + y_{12}x_{34} = 0.$$

Le rigate $r_y^{(2)}$, $r'_y{}^{(2)}$ costituiscono i due sistemi di generatrici di $S_y^{(2)}$. Ora $r_y^{(2)}$ contiene y e quindi $r'_y{}^{(2)}$ è formata di rette della congruenza Δ_y polare di y: dunque y' giace in $r_y^{(2)}$.

Se la retta y si move in $r_y^{(2)}$ anche y' si move in $r_y^{(2)}$; poichè una quadrica è interamente determinata da una retta che debba contenervi e dall'essere conjugata ad un dato tetraedro Δ.

Inoltre si osservi che per costruire y' data y basta costruire il piano η_r della stella (A_r) che contiene il fascio di T *corrispondente* al punto $Y_r = y\alpha_r$. La retta $\eta_r\alpha_r$ e la retta y determinano un piano del fascio $(\eta_r\alpha_r)$: il conjugato armonico di questo piano rispetto ai piani η_r, α_r contiene y'.

Di qui segue subito che, come una retta y ha in generale una sola conjugata y', invece y' è in generale conjugata a tre rette y, y_1, y_2.

Infatti se siano Y_r, Y'_r i punti ove le rette y, y' segano la faccia α_r di Δ, quando il piano della stella (A_r) descrive il fascio $(A_rY'_r)$, il punto Y_r descrive su α_r la conica luogo dei centri dei fasci di T *corrispondenti* ai piani del fascio. D'altra parte il piano α_r taglia la quadrica $S_y^{(2)}$ che contiene $r_y^{(2)}$ in una conica che oltre di Y'_r avrà in comune colla conica dianzi nominata altri tre punti Y'_r, Y''_r, Y_r, per ciascuno dei quali passa rispettivamente una retta y_1, y_2, y di $r_y^{(2)}$, che ha per conjugata y'.

12. Dobbiamo considerare alcuni casi particolari.

Se y è una retta del complesso tetraedrale T′, definito dall'equazione

$$T'(x) = a^2 x_{23} x_{14} + b^2 x_{31} x_{24} + c^2 x_{12} x_{34} = 0 ,$$

allora come y ha per conjugata una sola retta y', viceversa y' è conjugata alla sola y, la retta y appartenendo a T′ e non a T.

Supponiamo ora che y appartenga a T ed a T′, allora i parametri della retta y' conjugata di y si presentano sotto forma indeterminata. Intanto osserviamo che le rette comuni a T e T′ costituiscono la congruenza speciale $\Delta^{(4)}$ di quarto grado formata dai quattro piani rigati di Δ, e dalle 4 stelle di raggi aventi per centri i vertici di Δ.

Il complesso polare di y rispetto a T, essendo speciale, il suo asse y' sega y; la congruenza tangente in y a T è una congruenza *degenere* che si scinde cioè in una stella di raggi, avente il centro nel punto yy', e in un piano rigato (yy'). Le rette di $\Delta^{(4)}$ diconsi perciò le *rette singolari* di T. Se consideriamo ad esempio un raggio y della stella (A_4), che sega il piano α_4 nel punto $(y_1\, y_2\, y_3\, 0)$, l'equazione del piano tangente lungo y al cono di T avente il vertice nel punto qualunque $(y_1\, y_2\, y_3\, \lambda)$ di y è rappresentato dall'equazione

$$(b-c)(y_1 y_2 x_3 + y_3 y_1 x_2) + (c-a)(y_2 y_3 x_1 + y_1 y_2 x_3) + (a-b)(y_3 y_1 x_2 + y_2 y_3 x_1) = 0 ,$$

ossia

$$(b-c) y_2 y_3 x_1 + (c-a) y_3 y_1 x_2 + (a-b) y_1 y_2 x_3 = 0 ,$$

il che vuol dire appunto:

I coni di T *aventi i vertici in una retta* y *della stella* A_4 *hanno lungo essa lo stesso piano tangente che è il piano del fascio corrispondente al punto* Y_4 *ove* y *sega* α_4.

E così poi per le rette singolari di T appartenenti agli altri vertici di Δ.

Correlativamente:

Le coniche inviluppate dalle rette di T *situate in piani passanti per una stessa retta singolare* y, *appartenente ad una faccia* α_r *di* Δ, *sono toccate da* y *nel centro del fascio di raggi di* T *corrispondente al piano* yA_r *della stella* A_r.

13. Se nell'equazione (4) del numero 10 sia

$$y_{rs} = x_r y_s - x_s y_r \quad , \quad z_{rs} = x_r z_s - x_s y_r ,$$

e in essa riguardiamo le x_r come coordinate di un punto variabile, allora l'equazione stessa rappresenta per ogni valore di λ il cono di T che ha il vertice nel punto $(y_r + \lambda z_r)$ della retta $g = YZ$: quindi l'equazione:

$$(s)\varphi(x) = \overline{T(yz)}^2 - 4\, T(y)\, T(z) = 0$$

del 4° grado nelle x_r definisce una superficie $S_g^{(4)}$ del 4° ordine inviluppata dai coni di T che *hanno i vertici su* g.

Ora la stessa equazione (4) in cui si riguardano fisse le x_r, ha per radici i parametri λ_1, λ_2 dei punti ove la retta YZ sega il cono di T di vertice X, quindi l'equazione ultima è quella di condizione affinchè la retta g sia tangente al cono di vertice X; dunque:

$S_g^{(4)}$ *è il luogo dei vertici dei coni di* T *toccati dalla retta* g *e quindi è anche il luogo delle coniche inviluppate dalle rette di* T *situate in piani passanti per* g.

La superficie $S_g^{(4)}$ si dice la *superficie complessa* di T *di asse* g.

Se siano η, ζ due piani di g e sia:

$$\eta_{rs} = \xi_r \eta_s - \xi_s \eta_s \quad \zeta_{rs} = \xi_s \zeta_r - \xi_s \zeta_r ,$$

sarà senz'altro

$$\psi(\xi) = \overline{T(\eta)^2} - 4\, T(\eta)\, T(\zeta) = 0$$

l'equazione, del 4° grado nelle ζ_r, che rappresenta l'inviluppo $\Sigma^{(4)}$ dei piani tangenti di $S_g^{(4)}$. Infatti l'equazione quadratica in λ

$$T(\eta) + \lambda\, T(\eta\zeta) + \lambda^2\, T(\zeta) = 0$$

dà i parametri λ dei piani tangenti condotti per g alla conica inviluppata dalle rette di T che si trovano nel piano ξ di coordinate ξ_r: e quindi l'equazione scritta è quella dell'inviluppo dei piani ξ che contengono inviluppi di T di cui sono punti di contatto i punti della retta g; cioè i piani stessi ξ non sono altro che i piani tangenti ai coni di T che hanno i vertici su g.

Dunque la superficie $S^{(4)}_g$ è della 4ª classe e la retta g è retta doppia della superficie e dell'inviluppo $\Sigma^{(4)}_g$ dei suoi piani tangenti.

14. Posto in generale

$$(y_{rs}\, z_{uv}) = y_{rs}\, z_{uv} - y_{uv}\, z_{rs} ,$$

l'equazione di $S^{(4)}_g$ si scrive sotto la forma

$$\begin{aligned}\Phi(x) = {} & a^2(y_{23}\, z_{14})^2 + b^2(y_{31}\, z_{24})^2 + c^2(y_{12}\, z_{34})^2 \\ & + 2bc[(y_{31}\, z_{34})(y_{12}\, z_{24}) - (y_{24}\, z_{34})(y_{31}\, z_{12})] + \\ & + 2ca[(y_{12}\, z_{14})(y_{23}\, z_{34}) - (y_{34}\, z_{14})(y_{12}\, z_{23})] + \\ & + 2ab[(y_{23}\, z_{24})(y_{31}\, z_{14}) - (y_{14}\, z_{24})(y_{23}\, z_{31})] = 0.\end{aligned}$$

Siano g_{rs} le coordinate locali della retta $g = YZ$, allora per le coordinate ζ_r del piano ξ, determinato dalla retta YZ e dal punto X, si ha:

$$\frac{\xi_1}{g_{34}x_2 - y_{24}x_3 + g_{23}x_4} = \frac{\xi_2}{g_{14}x_3 - g_{34}x_1 + g_{31}x_4} =$$

$$\frac{\xi_3}{g_{24}x_1 - g_{14}x_2 + g_{12}x_4} = \frac{\xi_4}{-g_{23}x_1 - g_{31}x_2 - g_{12}x_3} .$$

Il piano ξ è il piano del fascio determinato dai raggi XY, XZ e quindi, a meno di un fattore di proporzionalità, si hanno le seguenti relazioni dovute a Battaglini:

$$(y_{23}\, z_{14}) = \xi_1\, x_1 + \xi_4\, x_4 = -\,[\xi_2\, x_2 + \xi_3\, x_3]$$

$$(y_{31}\, z_{24}) = \xi_2\, x_2 + \xi_4\, x_4 = -\,[\xi_3\, x_3 + \xi_1\, x_1]$$

$$(y_{12}\, z_{34}) = \xi_3\, x_3 + \xi_4\, x_4 = -\,[\xi_1\, x_1 + \xi_2\, x_2]$$

$$(y_{34}\, z_{34}) = x_3\, \xi_2 (y_{12}\, z_{24}) = x_2\, \xi_3 (y_{24}\, z_{34}) = x_4\, \xi_1$$

$$(y_{31}\, z_{12}) = -\, x_1\, \xi_4 (y_{12}\, z_{14}) = x_1\, \xi_3 (y_{23}\, z_{34}) = x_3\, \xi_1$$

$$(y_{34}\, z_{14}) = x_4\, \xi_2 (y_{12}\, z_{23}) = -\, x_2\, \xi_4 (y_{23}\, z_{24}) = x_2\, \xi_1$$

$$(y_{31}\, z_{14}) = x_1\, \xi_2 (y_{14}\, z_{24}) = x_4\, \xi_3 (y_{23}\, z_{31}) = -\, x_3\, \xi_4 .$$

Con queste relazioni risulta subito che l' equazione di $S^{(4)}_g$ si pone sotto la forma

$$\Phi(x) = (b-c)^2[\xi_2\, \xi_3\, x_2\, x_3 + \xi_1\, \xi_4\, x_1\, x_4] +$$

$$(c-a)^2[\xi_3\, \xi_1\, x_3\, x_1 + \xi_2\, \xi_4\, x_2\, x_4] +$$

$$(a-b)^2[\xi_1\, \xi_2\, x_1\, x_2 + \xi_3\, \xi_4\, x_3\, x_4] = 0\,,$$

ove le ξ_r hanno le date espressioni per le coordinate g_{rs} della retta YZ e le coordinate x_r del punto X.

Si vede quindi che la superficie $S^{(4)}_g$ ha nei vertici di Δ quattro punti doppi. — Di più se nell'equazione di essa riguardiamo le ξ_r come coordinate di un piano fisso essa rappresenta una quadrica circoscritta a Δ che è tagliata dal piano ξ passante per g nella conica secondo cui quel piano taglia $S^{(4)}_g$, cioè la conica inviluppata dalle rette di T che si trovano in quel piano ξ.

Essendo γ_{rs} le coordinate tangenziali della retta g, per le coordinate x_r del punto X ove la retta g sega il piano ξ si avrà

$$\frac{x_1}{\xi_2\, \gamma_{34} - \xi_3\, \gamma_{24} + \xi_4\, \gamma_{23}} = \frac{x_2}{\xi_3\, \gamma_{14} - \xi_1\, \gamma_{34} + \xi_4\, \gamma_{31}} =$$

$$\frac{x_3}{\xi_1\, \gamma_{24} - \xi_2\, \gamma_{14} + \xi_4\, \gamma_{12}} = \frac{x_4}{-\,\xi_1\, \gamma_{23} - \xi_2\, \gamma_{31} - \xi_3\, \gamma_{12}} .$$

Se nell'equazione di $S^{(4)}_g$ s'immaginano poste l'espressioni ora scritte delle z_r e riguardiamo in essa variabili le ξ_r l'equazione stessa

$$\Phi(\xi) = 0$$

diventa l'*equazione tangenziale* di $S^{(4)}_g$, ossia l'equazione dello inviluppo $\Sigma^{(4)}_g$ dei piani tangenti di $S^{(4)}_g$. Se nell'equazione stessa riguardiamo le x_r come coordinate di un punto X della retta g, l'equazione quadratica nella ξ_r rappresenta un inviluppo $\Sigma^{(2)}_i$ di 2ª classe circoscritto a Δ a cui appartengono i piani tangenti del cono di T di vertice X.

La superficie $S^{(4)}_g$ ha adunque quattro piani tangenti doppi nella faccia di Δ.

Le superficie-complesso di uno stesso complesso tetraedrale T formano quindi un sistema algebrico ∞^4 di superficie del 4° ordine aventi 4 punti doppi nei vertici del tetraedro principale di T e 4 piani tangenti doppi nelle facce del tetraedro stesso.

15. Il complesso T si consideri come luogo delle rette y polari dei punti Y dello spazio rispetto alla quartica $C^{(4)}$ intersezione di due quadriche $S^{(2)}_1$, $S^{(2)}_2$; oppure correlativamente: come luogo delle rette y_1 polari dei piani η dello spazio rispetto al *fascio* $\gamma^{(4)}$ dei piani tangenti della sviluppabile di 4ª classe circoscritta ad $S^{(2)}_1$, $S^{(2)}_2$, ossia al fascio dei piani comuni degli inviluppi $\Sigma^{(2)}_1$, $\Sigma^{(2)}_2$ di 2ª classe formati dai piani tangenti di $S^{(2)}_1$, $S^{(2)}_2$. Questa generazione del complesso tetraedrale T ci dà subito la rappresentazione di T sullo spazio punteggiato (S) e sullo spazio (σ) composto di piani. Ogni punto Y di (S) è l'*immagine* della retta polare di esso rispetto a $C^{(4)}$ ed ogni piano η è l'*immagine* su (σ) della retta y_1 polare di η rispetto a $\gamma^{(4)}$. Nella rappresentazione lo spazio T è semplice cioè la corrispondenza fra gli spazi (S), (T); (σ), T è biunivoca.

Nella rappresentazione di T su (S) i soli punti eccezionali sono i vertici A_r di Δ, ciascun vertice A_r essendo l'immagine di tutte le rette della faccia opposta.

I soli piani eccezionali della rappresentazione di T su (σ) sono le faccie α_r di Δ: ciascuna faccia α_r essendo l'immagine di tutti i raggi della stella (A_r). Uno spigolo di Δ ha per immagini i punti ad i piani dello spigolo opposto.

16. Delle due rappresentazioni l'una è la trasformata dell'altra nella polarità di una quadrica conjugata a Δ; basterà quindi considerarne una, p. e. quella di T su (S).

Risulta subito senza difficoltà:

I punti di una faccia α_r di Δ sono immagini dei raggi della stella (A_r): *un punto* Y_r *di* α_r *essendo l'immagine del raggio* y_r *che projetta da* A_r *il polo armonico* Y'_r *di* Y_r *rispetto al fascio* f_{α_r} *di coniche secondo cui* α_r *taglia il fascio* F *di quadriche a cui appartengonv* $S^{(2)}_1$, $S^{(2)}_2$.

Una retta g *arbitraria non appartenente, a* T, *è l'immagine di una rigata* $\gamma^{(2)}_g$ *contenuta in una quadrica* $S^{(2)}_g$ *circoscritta a* Δ. *L'altro sistema di generatrici è il luogo delle retle polari reciproche di* g *rispetto alle quadriche del fascio* F.

Se la retta g *è una retta non singolare di* T *essa è immagine del cono di* T *che ha il vertice nel punto* G *immagine di* g.

Se g_r *è un raggio della stella* (A_r) *essa è l'effettiva immagine del fascio di raggi di* T *corrispondente al punto* Y'_r, *polo armonico del punto* Y_r *ove la retta* g_r

sega il piano α_r; *perchè il fascio di* T *che giace in* α_r *e che completa col primo fascio il cono di* T *di vertice* Y'_r *ha per immagine il solo punto* A_r.

Possiamo quindi dire che nella *direzione* g_r il punto A_r è l'immagine del raggio g'_r comune ai due fasci di raggi di T. La corrispondenza fra i raggi g_r, g'_r della stella A_r e del piano α_r è lineare. Basta, p. es., osservare che fra le coordinate η_r del piano del fascio di T che ha per immagine il raggio y della stella (A_4) e quella y_r del raggio stesso y, hanno luogo le relazioni:

$$\eta_1 : \eta_2 : \eta_3 = (b-c)\mu_{31}\mu_{12}y_1 : (c-a)\mu_{12}\mu_{23}y_2 : (a-b)\mu_{23}\mu_{31}y_3$$

le quali dimostrano che: *la corrispondenza fra i raggi* y *della stella* (A_4) *e i piani* η *della stessa stella che contengono i fasci di* T *aventi per immagini quei raggi, è una corrispondenza* LINEARE, *anzi una polarità della stella* (A_4), *in cui il triedro* $A_4(A_1A_2A_3)$ *è un triedro polare, e il raggio* A_4E *ha per piano polare il piano che projetta da* A_4 *la retta di* T *che ha per immagine il punto* E.

Se finalmente g *è una retta appartenente ad una faccia* α_r *di* Δ *essa è immagine di un cono quadrico della stella* (A_r) *circoscritta al triedro di* Δ *di vertice* A_r.

17. Segue ancora immediatamente:

Un piano ξ *arbitrario di* (S) *è l'immagine della congruenza* Δ_ξ *delle corde della cubica gobba* $C^{(3)}_\xi$ *circoscritta a* Δ *luogo delle immagini delle rette di* T *che giacciono nel piano* ξ; *e la conica* $C^{(2)}_\xi$ *inviluppata dalle dette rette di* ξ *è l'immagine della rigata* $S^{(4)}_\xi$ *del* 4° *ordine delle tangenti della cubica* $C^{(3)}_\xi$; *la quale è anche il luogo dei poli del piano* ξ *rispetto alle quadriche del fascio* F.

Ora due rette h, k prese arbitrariamente in T determinano una rigata di 2° ordine di rette di T a cui esse rette h, k appartengono poichè si ha

$$[h(A_1A_2A_3A_4)] = [k(A_1A_2A_3A_4)],$$

avuto riguardo a notazioni già usate.

D'altra parte le rette h, k hanno per immagini due punti H, K che determinano la retta HK, *immagine delle rigate di* 2° *ordine determinate dalle rette* h, k, dunque:

Le quadriche circoscritte a Δ *contenenti rigate di* T *formano un sistema algebrico* Δ_4, ∞^4 *di* 2° *ordine come il sistema delle rette dello spazio.*

Per ogni quaterna A, B, C, D di punti di (S) passono al più due quadriche di Σ_4, quelle che contengono le rigate che hanno per immagini le 2 rette che tagliano le 4 rette di T aventi per immagini i punti A, B, C, D. Similmente tre rette h, k, l di T non appartenenti ad una stessa rigata di 2° ordine sono corde di una determinata cubica gobba circoscritta a Δ, poichè si ha:

$$[h(A_1A_2A_3A_4)] = [k(A_1A_2A_3A_4)] = [l(A_1A_2A_3A_4)].$$

D'altra parte le tre rette h, k, l hanno per immagini tre punti H, K, L che de-

terminano un piano $\xi = HKL$ immagine del sistema delle corde della cubica; dunque:

Le cubiche gobbe circoscritte a Δ *e di cui le congruenze delle corde sono formate di rette di* T, *formano il sistema* ∞^3 *di cubiche immagini degli inviluppi di* T.

Per ognuna di tali cubiche avremo una rete di quadriche del sistema Σ_4: *quella formata dalle quadriche circoscritte alla cubica.*

Tali reti formeranno quindi un sistema ∞^3: due reti del sistema hanno una quadrica in comune.

18. Un altro sistema ∞^3 di reti di Σ_4 si ha osservando che le quadriche di Σ_4 contenenti una stessa retta g di T formano appunto una rete $(g)_2$.

Le rigate di T contenute in dette quadriche sono infatti quelle che hanno per immagini i raggi della stella (G) che ha il centro nel punto G immagine del raggio g. Inoltre due quadriche del sistema si tagliano ulteriormente nella cubica gobba che è il luogo delle immagini delle rette di T che si trovano nel piano della stella (G), determinato dai raggi che sono le immagini delle rigate di T contenute nelle due quadriche.

Con questa rete $(g)_2$ di quadriche di Σ_4 abbiamo un sistema ∞^2 di cubiche circoscritte a Δ che, colla retta g, formano le quartiche basi degli ∞^2 fasci di raggi di quadriche contenute nella rete $(g)_2$.

Il complesso T *è il luogo delle tangenti alle* ∞^2 *cubiche della rete.*

In Σ_4 abbiamo così un altro sistema ∞^3 di reti $(g)_2$, due reti del sistema hanno una quadrica in comune. — Tre cubiche circoscritte a Δ di cui le corde siano rette di T determinano una delle dette reti; quella determinata dalla corda comune alle tre cubiche.

19, Dalle proprietà ora date dalla rappresentazione di T su (S) risulta ancora immediatamente:

La quadrica $S^{(2)}_g$ *circoscritta a* Δ, *che contiene la rigata di* T *che ha per immagine una retta arbitraria* g, *è l' immagine in* (S) *della congruenza* $\Delta^{(2)}_g$ *di* 2° *grado luogo delle rette di* T *che si appoggiano a* g.

Segue quindi che se indichiamo con g_{rs} le coordinate locali della retta g, avuto riguardo alla espressione delle coordinate locali di una retta x di T per mezzo di quelle x_r del punto immagine, l'equazione

$$f_g(x) = \Sigma g_{rs}\, \mu_{rs}\, x_r\, x_s = 0$$

$$(rs = 23,\ 31,\ 12,\ 14,\ 24,\ 34)$$

rappresenta la quadrica $S^{(2)}_g$, e l'equazione stessa diventa appunto quella del cono di T che ha il vertice nel punto G immagine della retta g, essendo dunque g' una retta di T.

Essendo in generale

$$f_a(x) = \Sigma a_{rs}\, x_r\, x_s = 0$$

$$(rs = 23,\ 31\ \ldots\ \ldots)$$

l'equazione di una quadrica qualunque $S^{(2)}_a$ circoscritta a Δ, essa appartiene al sistema Σ_4 delle quadriche circoscritte a Δ e contenenti rigate di T se sia:

$$\Omega(a) = \frac{a_{23}\, a_{14}}{\mu_{23}\, \mu_{14}} + \frac{a_{31}\, a_{24}}{\mu_{31}\, \mu_{24}} + \frac{a_{12}\, a_{34}}{\mu_{12}\, \mu_{34}} = 0.$$

L'equazione scritta al variare delle a_{rs} che le soddisfano rappresenta il sistema Σ_4 stesso. Per essere

$$\frac{\mu_{31}\, \mu_{24}}{\mu_{23}\, \mu_{14}} = -k \quad \frac{\mu_{12}\, \mu_{34}}{\mu_{23}\, \mu_{14}} = -(1-k),$$

l'equazione ultima diventa:

$$a_{23}\, a_{14}\, k^2 + (a_{12}\, a_{34} - a_{31}\, a_{24} - a_{23}\, a_{14})k + a_{31}\, a_{24} = 0,$$

onde si vede che:

Ogni quadrica $S^{(2)}_a$ *circoscritta a* Δ *determina due complessi tetraedrali di tetraedro principale* Δ *corrispondenti ai due sistemi di generatrici della quadrica che sono formati di rette dei due complessi*; ciò che doveva risultare senz'altro, osservando che le 4 generatrici dell'un sistema passanti per i vertici di Δ sono projettate da una generatrice qualunque dell'altro sistema con un fascio di 4 piani il cui birapporto è costante.

L'equazione ultima quadratica in k ha per radici k_1, k_2, i birapporti corrispondenti ai due sistemi di generatrici della stessa quadrica. Questi birapporti k_1, k_2 determinano due complessi tetraedrali che diremo fra loro *conjugati* rispetto alla quadrica stessa $S^{(2)}_a$.

L'equazione avrà le radici k_1, k_2 reali distinte oppure immaginarie conjugate oppure coincidenti secondo che sia

$$A = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{31} & a_{14} \\ a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{23} & 0 & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & 0 \end{vmatrix} \gtreqless 0,$$

essendo A il discriminante dell'equazione della quadrica $S^{(2)}_a$.

Le quadriche circoscritte ad uno stesso tetraedro Δ formano un sistema lineare ∞^5. Quando la quadrica è un cono, ossia è $A = 0$, essa appartiene essenzialmente ad un unico determinato complesso tetraedrale di tetraedro principale Δ.

I complessi tetraedrali aventi lo stesso tetraedro principale Δ, formano un fascio φ di complessi corrispondenti ai valori da $-\infty$ a $+\infty$ di k. Al fascio φ di complessi appartengono i tre complessi degeneri corrispondenti ai valori ∞, 0, 1 di k: ciascuno di tali complessi T_∞, T_0, T_1 si compone di due complessi speciali di 1° grado aventi per essi le coppie

$$A_2A_3\ ,\ A_1A_n\ ;\ A_3A_1\ ,\ A_2A_n\ ;\ A_1A_2\ ,\ A_3A_n$$

di spigoli opposti di Δ.

Il sistema $S^{(4)}_4$, ∞^4 delle quadriche specializzate circoscritte ad uno stesso tetraedro Δ, non è altro che il sistema di tutti i coni dei complessi tetraedrali che hanno per tetraedro principale Δ.

I coni di $S^{(4)}_4$ si distribuiscono negli ∞^3 fasci di coni, corrispondenti ai punti dello spazio nei complessi del fascio φ.

Tutte poi le quadriche circoscritte ad uno stesso tetraedro Δ si distribuiscono adunque negli ∞^1 sistemi Σ_4, ∞^4 di quadriche contenenti rigate dei complessi tetraedrali del fascio φ.

20. In generale è subito visto che una superficie $S^{(m)}$ di ordine m, è la immagine di una congruenza $[m, 3m]$ di *ordine* m e di classe $3m$ del complesso T; la superficie $S^{(m)}$ non contenendo alcun vertice di Δ. La congruenza ha quattro *punti singolari* di *ordine* 2m nei vertici di Δ, poichè il punto A_r è vertice del cono di ordine $2m$ luogo delle rette di T che hanno per immagini i punti della curva secondo la quale la faccia α_r di Δ taglia $S^{(m)}$.

Il cono ha tre rette m–ple negli spigoli di Δ uscenti da A_r e non ha altra singolarità, se supponiamo che $S^{(m)}$ non abbia alcuna posizione speciale rispetto a Δ e sia generale del suo ordine m.

Risulta quindi che gli spigoli di Δ sono rette m–ple della congruenza.

La quadrica $S^{(2)}_g$ che contiene la rigata di T che ha per immagine la retta g di (S) taglia la superficie $S^{(m)}$ in una curva $C^{(2m)}$ di ordine $2m$ che è l'immagine della rigata $R^{(4m)}_g$ luogo delle rette della congruenza che tagliano la retta g. La rigata appartiene ad una superficie gobba $S^{(4m)}_g$ di grado $4m$.

Infatti se h è una retta arbitraria dello spazio, la quadrica $S^{(2)}_h$ che contiene la rigata di T che ha per immagine la retta h sega $C^{(2m)}$ in $4m$ punti; quindi sono $4m$ le generatrici di $S^{(4m)}_g$ incontrate da una retta arbitraria h. Il genere di $S^{(4m)}_g$ ossia di una sezione piana qualunque di $S^{(4m)}_g$ è quello stesso p di $C^{(2m)}$. Essendo $C^{(2m)}$ la curva intersezione di $S^{(2)}_g$ con una superficie $S^{(m)}$ generale del suo ordine, e presa arbitrariamente in (S), tutte le caratteristiche di $C^{(2m)}$ e della sua sviluppabile osculatrice sono subito calcolate. In particolare il genere di $C^{(2m)}$ è:

$$p = \frac{(2m-1)(2m-2)}{2} - \frac{2m(m-1)}{2} = (m-1)^2;$$

il genere della superficie $S^{(4m)}_g$ è dunque $(m-1)^2$. Dicendo r il *rango* della congruenza considerata, avremo la relazione:

$$r + (m-1)^2 = \frac{(4m-1)(4m-2)}{2} - \frac{m(m-1)}{2} - \frac{3m(3m-1)}{2},$$

da cui

$$r = 2m(m-1).$$

Calcolato così il rango della congruenza si ha subito l'ordine μ della sua superficie focale ed è:

$$\mu = 2m(m-1).$$

La classe ν della superficie focale è

$$\nu = 2m(m+1).$$

21. Vediamo ora come si può di nuovo trovare l'ordine e la costruzione e l'equazione della superficie focale. La superficie $S^{(m)}$ essendo generale del suo ordine m, il complesso $\theta^{m(m-1)}$ delle sue tangenti sarà del grado $m(m-1)$: onde sarà tagliato dal complesso tetraedrale T in una congruenza $[2m(m-1)]$ del grado $2m(m-1)$. D'altra parte una rigata di 2° ordine di T ha in comune con $\theta^{m(m-1)}$ $2m(m-1)$ rette, segue immediatamente che

L'immagine in (S) *della congruenza* $[2m(m-1)]$ *è una superficie* $S^{2m(m-1)}$ *dell'ordine* $2m(m-1)$.

Dico *che* $S^{2m(m-1)}$ *è la superficie focale della congruenza data* $[m, 3m]$ *per la sua immagine* $S^{(m)}$.

Infatti la congruenza $[2m(m-1)]$ è il luogo delle coppie di rette di T che uscendo dai punti di $S^{(m)}$ giacciono nei piani tangenti ad $S^{(m)}$ nei punti stessi. Epperò ogni punto di $S^{(m)}$ è l'immagine di una retta p di $[m, 3m]$ incontrata dalle due di essa congruenza aventi per immagini i punti di $S^{(m)}$, infinitamente vicini a P sulle rette di T uscenti da P, le cui immagini sono perciò i due fuochi F_1, F_2 della congruenza relativi alla retta p. Quindi $S^{2m(m-1)}$ è la superficie focale della congruenza. Essa è appunto dell'ordine $2m(m-1)$ e la sua equazione è subito ottenuta: poichè basta nell'equazione locale del complesso $\theta^{m(m-1)}$ porre in luogo delle coordinate locali x_{rs} di una retta le loro espressioni per mezzo delle coordinate del punto immagine appartenendo quella retta considerata al complesso tetraedrale T.

La superficie $S^{2m(m-1)}$ ha nei vertici di Δ punti multipli secondo $m(m-1)$.

La superficie $S^{(m)}$ è tagliata dal piano α_r in una curva dell'ordine m e della classe $m(m-1)$. All'inviluppo quindi delle tangenti corrisponde, nella ricordata corrispondenza lineare fra α_r ed (A_r), un cono di ordine $m(m-1)$ che è il cono tangente in A_r alla superficie.

Se $m=2$, cioè se la superficie immagine è una quadrica $S^{(2)}$ che ha rispetto a Δ una posizione qualunque, rappresentata cioè da un'equazione completa di 2° grado nelle x_r, la congruenza $[2, 6]$, immagine di $S^{(2)}$, è del 2° ordine, della 6ª classe e di rango 4. La superficie focale di essa è del 4° ordine e della 12ª classe. La congruenza è già nota (Vedi Kummmer — *Sui sistemi di rette.* Acc. di Berlino 1866).

Consideriamo ora una curva gobba $C^{(m)}$ che abbia rispetto a Δ una posizione qualunque; in particolare non passi per alcun vertice di Δ. La curva sia dell'ordine m e senza punti singolari nè di inflessione; p. es. la completa intersezione di due superficie degli ordini μ, ν prese arbitrariamente e generali dei loro ordini. Sia h l'ordine della congruenza delle corde, sarà $\frac{m(m-1)}{2}$ la classe della congruenza stessa. La curva $C^{(m)}$ sarà immagine di una rigata appartenente ad una superficie gobba $S^{(2m)}$ di grado $2m$. Il genere di $S^{(2m)}$ è quello p di $C^{(m)}$, e si ha

quindi:

$$p = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - h.$$

Per l'ipotesi fatta la superficie gobba $S^{(2m)}$ non avrà generatrici singolari, e doppie in particolare. Avrà soltanto 4 punti multipli secondo m nei vertici di Δ, giacchè la curva $C^{(m)}$ sega la faccia α_r in m punti che hanno per immagini m generatrici di $S^{(2m)}$ uscenti da A_r. Una sezione di $S^{(2m)}$ con un piano arbitrario ξ sarà una curva di ordine $2m$ e di genere p con un certo numero d di punti doppi, eguale all'ordine della curva doppia di $S^{(2m)}$. Ora osserviamo che ogni retta p di T che sia una corda di $C^{(m)}$ ha per immagine un punto della curva doppia di $S^{(2m)}$. Dunque la curva doppia è l'immagine della rigata secondo cui T taglia la congruenza delle corde di $C^{(m)}$. Ora tale rigata è dell'ordine

$$N = 2h + m(m-1).$$

È subito calcolato l'ordine della curva immagine di tale rigata, poichè quest'ordine eguaglia il numero delle rette comuni alla congruenza $\left[h, \frac{m(m-1)}{2}\right]$ delle corde di $C^{(m)}$ ed alla congruenza $[1, 3]$ delle rette di T che ha per immagine un piano arbitrario ξ dello spazio; onde sarà

$$k = h + \frac{3m(m-1)}{2}$$

l'ordine della curva doppia di $S^{(2m)}$.

Essendo p il genere della sezione piana di $S^{(2m)}$ e $2m$ l'ordine di essa, non avendo cuspidi, la classe k della sezione è data da

$$2p - 2 = (m-1)(m-2) - 2h - 2 = k - 4m$$

onde

$$k = m(m+1) - 2h.$$

E lo stesso risultato si ottiene osservando che essendo $h + \frac{3m(m-1)}{2}$ il numero dei punti doppi della sezione stessa la classe è data da

$$k = 2m(2m-1) - 2h - 3m(m-1) = m(m+1) - 2h.$$

Dunque k è il *rango* della superficie $S^{(2m)}$, cioè il grado del complesso formato dalle tangenti di essa. Così tutte le caratteristiche della superficie gobba $S^{(2m)}$ sono determinate.

Tralasciamo di considerare i vari casi particolari per la ricerca delle caratteristiche delle forme geometriche di T date per le loro immagini. Come pure tralasciamo di discutere le caratteristiche delle immagini date le forme geometriche di T come intersezioni di T con un complesso o con una congruenza data.

23. Abbiamo pure detto di tralasciare lo studio del complesso di T colla sua rappresentazione sullo spazio (σ) composto di piani.

Solt anto ci pare non privo d'interesse il dare i caratteri della corrispondenza birazionale *nulla* Γ che nasce dall' essere corrispondenti un punto Y ed un piano η che sono immagini in (S) ed in (σ) di una stessa retta y di T.

Perciò risulta subito ovviamente:

Ai punti di una retta g corrispondono in Γ *i piani del fascio* $\gamma^{(3)}_g$ *dei piani tangenti di un sviluppabile di 3ª classe inscritta a* Δ.

Ai piani invece passanti per una retta g cioè brevemente ad un asse g *corrispondono i punti di una cubica gobba circoscritta a* Δ.

Quindi:

Ai punti di un piano ξ *corrispondono i piani di un inviluppo* $\Sigma^{(3)}_\xi$ *di 3ª classe che ha nei quattro piani di* Δ *quattro piani multipli secondo 2, che contiene i 6 spigoli di* Δ *(come assi) ed il piano* ξ.

Ai piani di una stella (y) *corrispondono in* Γ *i punti di una superficie del 3º ordine* $S^{(3)}_y$ *che passa per* y, *che ha nei vertici di* Δ *quattro punti doppi e contiene i 6 spigoli del tetraedro stesso.*

Le formole della corrispondenza Γ sono subito trovate. Ricordando, e tenuto ora conto delle notazioni e formole precedenti; si ponga

$$\frac{1}{l_r} = l'_r \qquad \frac{1}{m_r} = m'_r \qquad (r = 1,\ 2,\ 3 \text{ e } 4)$$
$$H_{rs} = l_r m_s l'_s m'_r - l'_r m'_s l_s m_r\ .$$

Si vede intanto che l'equazione del piano η corrispondente al punto Y è

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ l_1 m'_1 y_1 & l_2 m'_2 y_2 & l_3 m'_3 y_3 & l_4 m'_4 y_4 \\ l'_1 m_1 y_1 & l'_2 m_2 y_2 & l'_3 m_3 y_3 & l'_4 m_4 y_4 \end{vmatrix} = 0\,,$$

e ponendo

$$H_{34} - H_{24} + H_{23} = \xi_1 \qquad H_{14} - H_{34} + H_{31} = \xi_2$$
$$H_{24} - H_{14} + H_{12} = \xi_3 \qquad -H_{23} - H_{31} - H_{12} = \xi_4\,,$$

sono quindi:

$$\eta_1 : \eta_2 : \eta_3 : \eta_4 = \xi_1 y_2 y_3 y_4 : \xi_2 y_3 y_1 y_4 : \xi_3 y_1 y_2 y_4 : \xi_4 y_1 y_2 y_3$$

le formole della corrispondenza Γ, le quali si possono anche scrivere

$$\eta_1 : \eta_2 : \eta_3 : \eta_4 = \frac{\xi_1}{y_1} : \frac{\xi_2}{y_2} : \frac{\xi_3}{y_3} : \frac{\xi_4}{y_4}\,,$$

od anche

$$\rho x_r \eta_r = \xi_r \qquad (r = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

(ρ costante di proporzionalità). Si ha appunto identicamente

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = 0\,,$$

che dà la proprietà di Γ di essere una *reciprocità nulla* cioè il piano corrispondente ad un punto passa pel punto. È chiaro che i vertici di Δ come centri di stelle di piani e i piani di Δ come piani punteggiati sono gli spazi fondamentali di Γ, ecc.

Pavia li 2 Agosto 1903.

SULLA RAZIONALITÀ DEI PIANI MULTIPLI

$$\left\{ x\,,\, y\,,\, \sqrt[n]{F(x\,,y)} \right\}$$

NOTA

DEL

Dott. AMERIGO BOTTARI in Assisi.

Introduzione.

1. In una NOTA, inserita tre anni or sono negli *Annali di Matematica* (1), mi sono occupato della questione di *determinare i tipi, a cui possono ricondursi mediante una trasformazione birazionale del piano* (x, y) *i polinomi* F(x, y) *tali che* x, y, $\sqrt[n]{F(x\,,y)}$ *si possano esprimere come funzioni razionali di due parametri*; ossia « geometricamente » *di determinare le condizioni di razionalità delle superfice*

$$z^n = F(x\,,y)\,,$$

le quali proiettate dal punto all' infinito dell' asse delle z *sul piano* $z = 0$, *dànno luogo ad un piano* n − *plo ciclico, avente per curva di diramazione la*

$$F(x\,,y) = 0$$

cui, eventualmente, può essere aggiunta la retta all' infinito del piano.

Però nel risolvere questa questione, ho poste due restrizioni, l' una, la quale non è essenziale e che manterrò tuttora, vale a dire che in $F(x\,,y)$ non compariscano dei fattori, che sieno potenze n^{esime} d' un certo polinomio, l' altra che il numero n sia primo.

Nel presente lavoro mi propongo di trattare la stessa questione per n qualunque. Anche qui mi fondo sulla considerazione già utilizzata dal Bertini

(1) Serie III, Tomo II, pag. 277 e segg.

per il caso di $n = 2$; vale a dire che ad ogni piano n — plo ciclico razionale corrisponde una trasformazione piana $[1, n]$, la quale si può ottenere rappresentando quel piano multiplo sul piano semplice. In una tale trasformazione i punti del piano multiplo corrispondono a gruppi di n punti nel piano semplice, i quali costituiscono i cicli di una trasformazione birazionale ciclica dell' indice n.

Quindi partendo dai tipi delle trasformazioni birazionali cicliche, tipi determinati per la prima volta da Kantor (1) e poi da Wiman (2) rappresento su un piano i gruppi dell' involuzione ciclica corrispondente e determino su questo la curva di diramazione, la quale come si sa, corrisponde alle coincidenze dell' involuzione. Nel § 1 dimostro che questa rappresentazione, invece di effettuarla direttamente, si può ottenere eseguendo successivamente più trasformazioni multiple convenienti di indice primo. Cosicchè il problema proposto viene ricondotto ad un problema già risoluto.

Quanto alle coincidenze delle involuzioni cicliche è opportuno sin d'ora notare: che, mentre nel caso di n primo una coincidenza è data necessariamente dalla riunione di tutti gli n punti di un ciclo (coincidenza $(n-1)$—pla), trattandosi invece di n non primo, vi possono essere nella data involuzione ciclica, oltre a coincidenze $(n-1)$ — ple, coincidenze costituite da un numero finito od infinito di cicli di p punti, essendo p un qualsiasi divisore di n; ogni punto di questi cicli é allora una coincidenza $\left(\frac{n}{p} - 1\right)$ — pla. Pertanto in un piano n — plo vi potranno essere dei punti p — pli od anche delle curve p-ple di diramazione, cioè da contarsi p volte come enti di diramazione.

Una volta determinate le proprietà della curva di diramazione di un certo tipo di piano n - plo razionale, occorre dimostrare che esse lo caratterizzano *o*, in altre parole, che una curva, dotata di quelle certe proprietà, può sempre essere assunta come una curva totale di diramazione di un piano n - plo ciclico, il quale risulta razionale. Ora il metodo stesso indicato nel § 1° per rappresentare i piani n — pli ciclici razionali, di indice n non primo, prova che le curve di diramazione che si ottengono caratterizzano dei piani multipli ciclici razionali.

Nel corso di questa mia Nota ammetterò nel lettore la conoscenza dei tipi di trasformazioni cicliche per n primo (tipi del Bertini per $n = 2$ e del Kantor per $n > 2$) ed inoltre la conoscenza dei tipi di piani n — pli ciclici corrispondenti (tipi di Clebsch e Nöther per $n = 2$).

2. I risultati cui giungo in questo lavoro sono i seguenti:

Esiste un tipo di piano n — *plo ciclico razionale* (*con* n *qualunque*) *avente per curva di diramazione totale un sistema di* $\mu n + 2$ $(\mu \geq 0)$ *rette, delle quali* μn *concorrenti in un punto* O.

Per valori particolari di n esistono altri tipi di piani n — pli oltre a questo.

Così per $n = 4$ esistono i due tipi seguenti di piani 4 - pli ciclici razionali:

---

(1) Kantor, Acta Math.ª Bd 19: *Neue theorie.....*

(2) Wiman, Math.ᵉ Ann. Bd 48: *Theorie d. endl. Gruppen.*

1°) *l'uno avente come curva di diramazione una quartica con un tacnodo;*

2°) *l'altro avente come curva totale di diramazione una curva composta*

α) *di una quintica doppia con un punto triplo* O *ed infinitamente vicino un punto doppio* O_1, *un ramo per* O *di questa quintica ha per tangente in questo punto una retta in generale diversa dallo* OO_1,

β) *di una conica semplice passante per* O, O_1 *ed avente inoltre colla quintica doppia un contatto quadripunto in un punto* P *distinto da* O.

Per $n = 6$

esistono dieci altri tipi di piani multipli ciclici razionali aventi le seguenti curve di diramazione:

1°) *Una curva composta*

α) *di una cubica doppia con un punto doppio* O (*nodo*),

β) *di una conica tripla passante per* O *ed avente quivi un contatto con uno dei due rami della cubica.*

2°) *Una curva composta*

α) *di tre rette* ρ_1, ρ_2, ρ_3 *segantisi due a due in tre punti* O_1, O_2, O_3: *due di esse sono doppie, la terza è semplice*,

β) *di una cubica ellittica tripla passante per i nominati punti* O_1, O_2, O_3, *i quali costituiscono per essa la configurazione detta del triplo tangenziale.*

3°) *Una curva composta*

α) *di una retta semplice* r_1,

β) *di due rette doppie* r_2 *ed* r_3,

γ) *di una cubica ellittica tripla passante pel punto* (r_1, r_2) *toccando quivi la retta* r_1, *e passante pel punto* (r_2, r_3) *toccando la retta* r_2 *ed infine pel punto* (r_1, r_3).

4°) *Una curva composta*

α) *di una cubica doppia con un punto doppio* O *a tangenti distinte* t_1 *e* t_2,

β) *di una quartica tripla col punto triplo* O *a tangenti distinte*

$$t'_1 \equiv t_1 \quad t'_2 \equiv t_2 \quad e \quad t_3.$$

5°) *Una curva composta*

α) *di una conica tripla*,

β) *di una quartica doppia avente due punti doppi infinitamente vicini* O_1, O_2, *giacenti sulla conica ed inoltre avente in un altro punto distinto* M *un contatto quadripunto colla conica*,

γ) *di una retta doppia* (*da riguardarsi come due rette doppie sovrapposte*) *passante per* O_1 *ed* M.

6°) *Una curva composta*

α) *di una cubica doppia con un punto doppio* O *a tangenti separate* t_1 *e* t_2;

β) *di una sestica tripla col punto* O *5—plo, nel quale vi sono due tangenti distinte* t_1 *e* t_2 *e le altre tre tangenti sono riunite in una unica tangente* t_3, *in generale distinta da* t_1 *e* t_2.

7°) *Una curva composta*

α) *di una sestica tripla con un punto 4—plo* O *e due punti doppi* O_1 *ed* O_2 *infinitamente vicini, ma lungo direzioni distinte per* O.

β) di una cubica doppia col punto doppio O, *passante semplicemente pei punti* O_1 *ed* O_2 *ed avente ancora un contatto* 6*–plo colla sestica nominata in un punto generico* P.

8°) *Una curva composta*

α) di una sestica tripla con un punto 4*–plo* O *e due punti doppi* O_1 *ed* O_2 *a questo infinitamente vicini, ma lungo direzioni distinte per* O *ed inoltre avente una cuspide in un punto* P,

β) di una cubica doppia, col punto O *doppio, passante per* O_1 *ed* O_2, P *e toccando in quest' ultimo punto la (tangente cuspidale della) sestica.*

9°) *Una curva composta*

α) di una cubica ellittica doppia,

β) di una retta r_1 *tripla, tangente di flesso della cubica,*

γ) di un' altra retta r_2 *tripla passante per* O.

10°) *Una curva composta*

α) di una cubica ellittica semplice,

β) di una sua tangente di flesso tripla.

Per n = 8

esiste ancora un piano 8*–plo (ciclico razionale) avente come curva totale di diramazione*

α) due rette r_1 *ed* r_2 *semplici,*

β) una retta r_3 *doppia,*

γ) una cubica ellittica 4*–pla passante pei punti* (r_1, r_3), *dove le rette* r_2 *ed* r_3 *sono tangenti di flesso.*

Per n = 9

esiste un piano 9*–plo (cicl. raz.), la cui curva totale di diramazione è costituita*

α) da tre rette semplici,

β) da una retta tripla.

Per n = 10

esiste ancora un piano 10*–plo (cicl. raz.) avente come curva totale di diramazione una curva composta*

α) di una quintica doppia, avente un punto 4*–plo* O *a tangenti in generale distinte,*

β) di una quintica 5*–pla, avente lo stesso punto* 4*–plo* O *colle stesse tangenti ed avente di più un contatto semplice colla quintica precedente in un punto generico* P,

γ) della retta OP 5*–pla.*

Per $n = 12$

esistono tre altri tipi di piani n–pli ciclici razionali, le cui curve di diramazione sono le seguenti:

1.° *Una curva composta*

α) di due rette semplici,

β) *di una retta quadrupla,*

γ) *di una retta* 6*—pla.*

2.° *Una curva composta*

α) *di una retta* r_1 *tripla,*

β) *di una retta* r_2 *semplice,*

γ) *di una conica quadrupla tangente alla* r_2 *in un punto generico.*

3.° *Una curva composta*

α) *di due rette semplici,*

β) *di una retta* 4*-pla,*

γ) *di una conica* 6*-pla.*

Per n = 14, 15, 18, 20, 24 e 30

si ha ancora un solo tipo di piano multiplo ciclico razionale, le cui curve di diramazione sono le seguenti.

Per n = 14

α) *tre rette semplici,*

β) *una retta* 7*—pla.*

Per n = 15

α) *una cubica* 5*—pla con un punto doppio* O *a tangenti distinte* t_1 *e* t_2,

β) *una cubica tripla collo stesso punto doppio e le stesse tangenti* t_1 *e* t_2

γ) *una retta tripla congiungente il punto* O *ad un altro punto* O_1 *comune alle due cubiche.*

Per n = 18

α) *una retta semplice,*

β) *una retta doppia,*

γ) *una retta* 6*—pla,*

δ) *una retta* 9*—pla.*

Per n = 20

α) *una quintica quadrupla con un punto* O 4*—plo a tangenti distinte,*

β) *un' altra quintica* 10*—pla collo stesso punto* 4*—plo* O *e colle stesse tangenti ed avente inoltre colla quintica precedente un contatto tripunto in un punto* M *distinto da* O,

γ) *due rette* 5*—ple passanti pel punto* 4*—plo, delle quali una passante per* M *e l' altra passante per un altro punto comune alle due quintiche.*

Per n = 24

α) *due rette semplici,*

β) *una retta* 8*-pla,*

γ) *una retta* 12*—pla.*

Per n = 30

α) *una retta semplice*,
β) *una retta* 15–*pla*,
γ) *una retta* 6–*pla*,
δ) *una retta* 10–*pla*.

Tralascio per brevità di esporre i risultati algebrici corrispondenti, cioè di dare l'elenco dei tipi, cui possono ricondursi mediante una trasformazione cremoniana del piano (x, y) i polinomi $F(x, y)$ tali che $x, y, \sqrt[n]{F(x, y)}$ si possano esprimere razionalmente per due parametri. Nel seguito, trattando dei singoli tipi di piani multipli, mi occupo, (almeno nei casi più importanti) anche di questa determinazione.

§ 1.°

1. Mi propongo dapprima di dimostrare come la determinazione dei tipi di piani n–pli ciclici razionali, per n qualunque, si possa far dipendere direttamente dalla determinazione dei tipi di piani n–pli (cicl. raz.) per n primo.

A tal fine sia T una certa trasformazione birazionale piana ciclica dell'indice n, dove suppongo n uguale al prodotto di due soli fattori primi p e q. Questa trasformazione definisce nel piano una certa involuzione ciclica $I_n^{(2)}$ di grado n: per eseguire la trasformazione multipla $[n, 1]$ corrispondente, ossia per rappresentare i cicli di questa involuzione sui punti di un piano, si può procedere nel seguente modo.

Si consideri la trasformazione T^q: essa è evidentemente ciclica dell'indice p, cioè definisce sul piano una involuzione, ciclica $I_p^{(2)}$. Questa involuzione, essendo p primo, rientrerà in uno dei tipi già noti di Bertini per $p = 2$ e di Kantor per $p > 2$. Ora le trasformazioni multiple cicliche di indice primo sono già note. Pertanto, supposto di avere eseguita la trasformazione $[p, 1]$ corrispondente all'involuzione $I_p^{(2)}$, ottengo un piano π p–plo, i cui punti sono imagini dei cicli dell'involuzione $I_p^{(2)}$. La curva X di diramazione di un tale piano rientrerà in uno dei tipi di Clebsch e Nöther se è $p = 2$, oppure in uno dei tipi determinati nella mia *Nota* citata, se è $p > 2$.

La trasformazione T del piano semplice, la quale è ciclica dell'indice n, viene a subordinare sul piano π una certa trasformazione birazionale T', per la quale la X rimane invariata. È facile vedere che la T' è ciclica dell'indice q: quindi si può anche dire che la involuzione ciclica $I_n^{(2)}$ del piano semplice subordina sul piano multiplo π una involuzione ciclica $I_q^{(2)}$. La questione è allora di determinare questa trasformazione T', la quale è la trasformata della T mediante la trasformazione multipla $[p, 1]$: questa determinazione, come apparirà in seguito nella discussione dei singoli tipi, si effettua abbastanza semplicemente. Una volta trovata la T', ossia l'involuzione $I_q^{(2)}$, si operi una nuova trasformazione multipla $[q, 1]$, cioè si rappresentino i cicli della $I_q^{(2)}$ sui punti di un nuovo piano: sia questo π'. Il piano π' risulta un piano (cicl. raz.) q–plo: sia Y la sua

curva di diramazione. In realtà poi π' provenendo dal piano π, il quale è p—plo, è un piano n—plo, cioè ogni foglio di π' si deve a sua volta riguardare come p—plo. Si determini su π' la trasformata della curva di diramazione X del piano π: sia essa X'. La X' avrà colla Y in comune un numero finito od infinito di punti; ciò avverrà a seconda della natura delle coincidenze dell' involuzione $I_n^{(2)}$. Ad ogni modo si potrà porre $X' = X'' + Z$ ed $Y = Y' + Z$: dove a seconda dei casi potrà mancare o la X'' o la Y' o la Z od anche potranno mancare contemporaneamente la X'' e la Y'.

Il piano n—plo π' così costruito, è evidentemente l' imagine dei cicli della involuzione primitiva $I_n^{(2)}$ ed ha, per curva totale di diramazione la curva $(X'')^q + (Y')^p + Z$, poichè la X'' è imagine di cicli di q punti e la Y' è imagine di cicli di p punti: un punto della X'' conta per $q(p-1)$ coincidenze semplici, un punto della Y' conta per $p(q-1)$ coincidenze semplici, ed in un punto della Z sono riunite $n-1$ coincidenze semplici. D' ora in poi, per brevità, dirò che la Z è una curva di diramazione semplice (cioè contata una sola volta), la curva X'' è una curva q—pla di diramazione e la curva Y'' è una curva p—pla di diramazione del piano n—plo.

Il metodo stesso tenuto per arrivare a questo piano n—plo mostra che invece di incominciare ad eseguire la trasformazione $[p, 1]$ e poi la trasformazione $[q, 1]$ si può operare inversamente, effettuando prima una trasformazione $[q, 1]$ e poi una trasformazione $[p, 1]$. E si capisce come, in generale, le due trasformazioni multiple, che si eseguiscono in questo secondo caso, non sono le stesse di quelle che si eseguiscono nel primo caso. Naturalmente questo scambio dei due fattori p e q ha senso nel solo caso che essi siano differenti.

2. Si supponga ora, più in generale, di avere una involuzione $I_n^{(2)}$ definita da una certa trasformazione T birazionale ciclica dell' indice n, dove n è uguale ad un prodotto di più di due fattori primi.

Volendo rappresentare i cicli di questa involuzione sui punti di un nuovo piano, ossia volendo costruire il piano n—plo imagine di quel certo tipo $I_n^{(2)}$ di involuzione, si scorge facilmente, come il metodo dianzi esposto, si possa estendere anche a questo caso più generale. Quindi si può enunciare il seguente risultato:

una trasformazione piana multipla ciclica $[n, 1]$, *dove* n *è uguale al prodotto di più fattori primi* $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$, *è uguale al prodotto di più trasformazioni multiple successive* $[p_1, 1], \ldots [p_\nu, 1]$, *dove è arbitrario l' ordine di questi fattori* $p_1, p_2, \ldots p_\nu$; *ma queste trasformazioni non sono permutabili.*

Cioè simbolicamente si può scrivere

$$[n, 1] = [p_1, 1] \cdot [p_2, 1] \ldots [p_\nu, 1].$$

È ovvio osservare che, qualora lo si trovi conveniente, invece di eseguire tutte queste trasformazioni multiple successive ad indice primo, si può a due od a più qualunque di esse sostituirne il prodotto, quando sia nota la trasformazione prodotto.

Perciò si può anche dire che

Una trasformazione piana ciclica [n , 1], *dove* n *è qualunque*, *è uguale al prodotto di più trasformazioni piane cicliche dell' indice primo; prodotto pel quale vale la legge associativa, ma non la legge commutativa.*

3. Ottenuti così tutti i differenti tipi di piani n-pli ciclici razionali, qualunque sia n, cioè i tipi di piani n-pli irriducibili per trasformazioni birazionali, è facile vedere che le loro curve di diramazione sono caratteristiche per la razionalità dei medesimi; vale a dire che si può ripassare da un tale piano n-plo al tipo di involuzione piana, da cui si è partiti.

Ciò segue senz' altro dal fatto che, come è stato dimostrato, le trasformazioni multiple cicliche $[p, 1]$ con p primo sono invertibili.

Pertanto supposto di avere un piano π n-plo ottenuto come imagine dei cicli di una certa involuzione ciclica $I_n^{(2)}$, eseguendo le trasformazioni cicliche successive $[p_1, 1], [p_2, 1], \ldots [p_\nu, 1]$, dove $p_1, p_2, \ldots p_\nu$ sono i fattori primi di n, si potrà da π ritornare alla involuzione $I_n^{(2)}$ operando le trasformazioni multiple inverse $[1, p_\nu], \ldots [1, p_2], [1, p_1]$, le quali sono note a meno di trasformazioni birazionali.

Dalle cose ora dette segue che « teoricamente » la questione proposta in questo lavoro si può riguardare come risoluta: ed in vero, essa viene sempre ricondotta a quella di eseguire delle trasformazioni multiple cicliche di indice primo, le quali sono già state studiate, e di determinare le trasformate di certe curve.

4. Dopo avere determinata la curva totale C di diramazione di un certo tipo di piano n-plo occorrerebbe cercare, come ho fatto nella mia Nota precedente, quando, essendo $F(x, y) = 0$ l'equazione complessiva della curva C, il piano n-plo $\left\{x, y, \sqrt[n]{F(x, y)}\right\}$ ha per curva totale di diramazione la $F(x, y) = 0$.

Senza entrare in questa discussione, la quale del resto si può con facili considerazioni ricondurre a quella analoga trattata per n primo, dirò brevemente che, ogni qualvolta il grado di $F(x, y)$ è un multiplo di n, allora, ed allora soltanto, esiste un piano multiplo $\left\{x, y, \sqrt[n]{F(x, y)}\right\}$ avente, come curva totale di diramazione la $F(x, y) = 0$: in tutti gli altri casi il piano multiplo $\left\{x, y, \sqrt[n]{F(x, y)}\right\}$ ha per curva di diramazione la $F(x, y) = 0$, sommata alla retta all' infinito del piano, contata un numero opportuno di volte a seconda del valore di n e del grado del polinomio $F(x, y)$.

§ 2.°

5. Premesse queste generalità passo alla effettiva determinazione dei singoli tipi di piani n-pli ciclici razionali corrispondenti ai tipi di involuzioni cicliche determinati da Kantor e Wiman.

Tali tipi di involuzione sono definiti dalle seguenti trasformazioni piane birazionali cicliche:

Per n qualunque

1°) *trasformazioni di* Jonquières, che lasciano invariato un fascio di rette unite o permutantisi fra loro.

2°) *omografie cicliche.* Queste (come nel caso di n primo) si possono ancora comprendere nel gruppo delle trasformazioni di Jonquières, poichè, qualunque sia n, per ogni omografia ciclica esiste sempre *almeno* un fascio unito di rette permutantisi ciclicamente n ad n.

Per particolari valori di n (non primo) oltre le nominate trasformazioni, si hanno altri tipi di trasformazioni.

Ora fu dimostrato da Kantor e Wiman che ogni trasformazione birazionale ciclica, che non sia nè una omografia nè una trasformazione di Jonquières, ammette un sistema invariante di cubiche per 6 o per 7 punti base fondamentali, oppure un sistema invariante di sestiche avente 8 punti base fondamentali doppi. Per brevità conserverò anch'io le notazioni di Wiman chiamando M_6, M_7, ed M_8 le tre classi di trasformazioni aventi rispettivamente sei, sette oppure otto punti fondamentali.

Ciò posto per $n = 4$ si hanno ancora le seguenti trasformazioni cicliche.

3°) *una trasformazione del 5° grado* indicata da Kantor con E_4 ed avente 7 punti fondamentali.

4°) *una trasformazione del 9° grado* J_4 appartenente alla Classe M_8.

Per $n = 6$

5°) *una trasformazione quadratica* B_6 } appartenenti alla Classe M_6.
6°) » » *cubica* Γ_6 }

7°), 8°) *due trasformazioni cubiche* Γ'_6 e Γ''_6 } appartenenti alla Classe M_7.
9°) *una trasformazione biquadratica* Δ_6 }

10°), 11°), 12°) *tre trasformazioni del 5° grado* E_6, E'_6, E''_6 } appartenenti
13°), 14°) *due trasformazioni del 7° grado* H_6 ed H'_6 } alla Classe M_6.

Per $n = 8$

15°) *una trasformazione biquadratica* Δ_8, appartenente alle Classe M_8.

Per $n = 9$

16°) *una trasformazione quadratica* B_9 appartenente alla Classe M_6.

Per $n = 10$

17°) *una trasformazione cubica* Γ_{10} appartenente alla Classe M_8.

Per $n = 12$

18°) *una trasformazione quadratica* B_{12} appartenente alla Classe M_6.

19°) *un' altra trasformazione quadratica* B'_{12} appartenente alla Classe M_7
20°) *una trasformazione cubica* Γ_{12} appartenente alla Classe M_8.

Per $n = 14$

21°) *una trasformazione quadratica* B_{14} appartenente alla Classe M_7.

Per $n = 15$

22°) *una trasformazione quadratica* B_{15} appartenente alla Classe M_8.

Per $n = 18$

23°) *una trasformazione quadratica* B_{18} appartenente alla Classe M_7.

Per $n = 20$

24°) *una trasformazione quadratica* B_{20} appartenente alla Classe M_8.

Per $n = 24$

25°) *una trasformazione quadratica* B_{24} appartenente alla Classe M_8.

Infine per $n = 30$

26°) *una trasformazione quadratica* B_{30} appartenente alla Classe M_8.
Per altri valori di $n > 30$, oppure per quei valori di $n < 30$, ma qui non considerati si hanno i soli tipi generali 1) e 2).

7. Quanto ai tipi particolari 3°), 4°), ... 26°) è utile richiamare alcune proprietà e sono (cfr. Kantor e Wiman l^2, c^1):

α) Un tipo appartenente alla Classe M_6, avente cioè un sistema invariante ∞^3 di cubiche per sei punti fondamentali, subordina un tipo di omografia Ω (ciclica dello stesso indice), la quale muta in sè la superficie del 3° ordine F_3 imagine di quel sistema di cubiche.

β) Un tipo appartenente alla Classe M_7, cioè avente una rete invariante di cubiche per 7 punti (fondamentali) subordina un tipo di omografia Ω' ciclica, la quale muta in sè la quartica di diramazione di un piano doppio, imagine della rete unita di cubiche. (Questa rete definisce il secondo tipo di involuzione di Bertini, tipo indicato da Kantor con Θ_2).

γ) Un tipo appartenente alla Classe M_8, avente cioè un sistema invariante ∞^3 di sestiche con otto punti base (fondamentali), doppi, subordina un tipo di omografia ciclica, la quale muta in sè il cono quadrico doppio K_2 imagine di quel sistema di sestiche, e subordina anche una omografia Ω'' ciclica, che muta in sè la curva di diramazione del piano doppio di Nöther; tale piano si ottiene proiettando il cono K_2 da un suo punto, unito per l'omografia spaziale e distinto dal vertice.

Questo sistema di sestiche definisce, come è noto, il terzo tipo di involuzione del Bertini (tipo designato da Kantor con Σ_2).

Tanto Kantor che Wiman nei loro lavori citati studiarono i tipi irriducibili delle omografie Ω, Ω' ed Ω'' sopra nominate: dai caratteri di questi tipi di omografie si deducono facilmente i caratteri dei tipi di trasformazioni birazionali cicliche corrispondenti, ove si noti che i tipi di omografie Ω' ed Ω'' possono rispettivamente combinarsi anche ai tipi di trasformazione involutoria Θ_2 e Σ_2 del Bertini.

Per ora mi limito ad enunciare solo queste proprietà generali dei tipi di trasformazione ciclica; nel seguito, per non fare inutili ripetizioni, quando mi sarà di bisogno, accanto ad ogni tipo darò quelle altre proprietà che lo caratterizzano.

§ 3.°

7. È facile vedere che i tipi 1) e 2) di trasformazione ciclica del numero 6 si possono rappresentare (come per n primo), qualunque sia n, su un piano n–plo (ciclico razionale) avente per curva totale di diramazione un sistema di $\mu n + 2$ ($\mu \geq 0$) rette, μn delle quali concorrono in unico punto O [1].

Algebricamente si ha: la forma da darsi al polinomio $F(x, y)$ perchè qualunque sia n, il piano n–plo $\left\{x, y, \sqrt[n]{F(x, y)}\right\}$ risulti razionale è la seguente

$$F(x, y) = f_{\mu n}(x, y) \cdot (x - a),$$

dove $f_{\mu n}(x, y)$ è una forma binaria in x, y del grado μn (con $\mu \geq 0$).

§ 4°.

Piani 4–pli ciclici razionali.

8. La trasformazione ciclica del tipo E_4 (cfr. n. 6, comma 3) come si trova in Wiman è caratterizzata dalle seguenti proprietà:

α) esiste una rete invariante di cubiche con 7 punti fondamentali;

β) entro questa rete vi è un fascio di cubiche $|K_3|$ (armoniche) unite;

γ) il luogo delle coincidenze dell'involuzione è fornito dai punti di una cubica C_3 appartenente alla rete α), ma non al fascio $|K_3|$ (coincidenze 3–ple), ed inoltre dai due punti base rimanenti di $|K_3|$, oltre i sette punti fondamentali ed i quali costituiscono una coppia involutiva (coincidenze semplici).

Per ottenere la trasformazione multipla corrispondente [4, 1] si potrebbe,

---

[1] Devo a tal punto riparare alla dimenticanza commessa nella mia precedente Nota nel non citare l'ampia ed approfondita trattazione che il Kantor fece nella sua premiata Memoria pubblicata negli *Atti della Società Reale di Napoli* (1888 e 1891, parte IV § 7) intorno alle trasformazioni di Jonquières.

secondo il metodo spiegato al § 1, eseguire due opportune trasformazioni piane doppie successive. Però, per questo tipo particolare, è molto più semplice eseguire direttamente una trasformazione [4, 1], seguendo il procedimento già da me tenuto, per n primo, nella precedente NOTA.

A tal fine si considerino tutte le sestiche C_6, che passano doppiamente pei 7 punti fondamentali; queste costituiscono un sistema lineare ∞^6 invariante per la trasformazione [ciò per la proprietà α)] e segano sulla cubica C_3 di punti uniti una serie lineare g^3_4, certo completa. Cosicchè riferendo proiettivamente le C_6 del dato sistema ∞^6 agli iperpiani di uno spazio lineare S_6 a 6 dimensioni, si vede che entro a questo vi ha uno spazio S_3 di punti uniti contenente la curva (normale) ellittica C_4 imagine della g^3_4; esiste quindi (correlativamente) entro S_6 anche un sistema lineare Σ_3 di iperpiani uniti.

Dunque, ripassando al piano rappresentativo, esiste un sistema lineare ∞^3 di C_6 tutte unite, le quali perciò due a due si segano secondo due cicli. Quest' ultimo sistema ha allora, come imagine, una superficie del 2° ordine 4–pla, la quale è un cono K_2, perchè contiene un solo fascio di generatrici (rappresentato sul fascio $|K_3|$ di cubiche unite). Tale cono 4–plo contiene la curva normale C_4 di punti uniti sopra nominata ed ogni sua generatrice la sega in due punti variabili: il vertice di K_2 è l' imagine della coppia involutiva di punti del comma γ). Ora proiettando K_2 da un suo punto qualunque distinto dal vertice su un piano, si ottiene come immagine della involuzione ciclica del tipo E_4:

« *Un piano 4–plo*, (*cicl. raz.*) *avente per curva di diramazione totale una quartica con un tacnodo.*

L' equazione di tale curva, riferita ad un sistema di coordinate cartesiane coll' origine nel tacnodo e coll' asse $y=0$ per tangente tacnodale, si può porre sotto la forma

$$\varphi_4(x, y) + y\varphi_2(x, y) + ay^2 = 0, \tag{1}$$

dove con φ_4 e φ_2 si intendono delle forme dei gradi risp. 4 e 2 in x e y.

Si può dimostrare in modo diretto che il piano 4–plo.

$$\left\{ x, y, \sqrt[4]{\varphi_4(x, y) + y\varphi_2(x, y) + ay^2} \right\}$$

avente per curva di diramazione totale la curva (1) è razionale. Basta infatti osservare che è razionale la superficie

$$z^4 = \varphi_4(x, y) + y\varphi_2(x, y) + ay^2$$

poichè è del 4° ordine ed ha nel punto $x=y=z=0$ un tacnodo (piano tacnodale è il piano $y=0$).

9. La trasformazione ciclica del tipo J_4 (n. 6–4°), ha per suo quadrato una trasformazione involutoria appartenente al 3° tipo del Bertini: rappresentando

le coppie di questa involuzione sui punti di un nuovo piano si ottiene un piano doppio di Nöther, la cui curva di diramazione è costituita da una quintica C_5 con un tacnodo e dalla sua tangente tacnodale. La trasformazione J_4 viene poi a subordinare su questo piano doppio una omologia armonica, per la quale la C_5 è unita e della quale l'asse u è la tangente tacnodale ed il centro U giace sulla C_5. Tutto ciò ci è dato direttamente nei lavori di Kantor e Wiman. Allora la trasformazione [4, 1] si ottiene subito, secondo le considerazioni svolte nel § 1, eseguendo la trasformazione doppia corrispondente a detta omologia armonica, trasformazione doppia, la quale è ben nota. Si sa infatti che per questa omologia vi ha un sistema ∞^3 di coniche invarianti senza punti base; l'imagine di questo sistema è un cono quadrico doppio, di cui le generatrici, sono rappresentate dalle rette unite del fascio dell'omologia; una sezione generica costituisce la curva di diramazione (imagine dell'asse u d'omologia). Si vede poi facilmente che alla C_5 (invariante per l'omologia) corrisponde sul cono quadrico pure una quintica (doppia) C'_5 incontrata da ogni generatrice in due punti e passante pel vertice; in corrispondenza al tacnodo della C_5, la C'_5 deve avere colla conica di diramazione un contatto quadripunto in un punto P.

Ora proiettando questo cono da un suo punto generico si ottiene il piano 4–plo, i cui punti corrispondono ai cicli della involuzione ciclica definita dalla trasformazione del tipo J_4.

La curva di diramazione di questo piano 4–plo sarà composta: *in primo luogo* di una conica C_2 contata una sola volta (cioè, di cui ogni punto vale per 3 coincidenze riunite); infatti essa corrisponde all'asse u d'omologia, il quale faceva parte della curva di diramazione di quel particolare piano doppio di Nöther, ottenuto come imagine delle coppie involutive di punti della trasformazione del tipo $(J_4)^2$;

in secondo luogo: di una quintica C_5'' doppia (proiezione della C'_5), la quale ha un punto triplo in un punto O della C_2; ed infinitamente vicino v' ha un punto doppio O_1 pure appartenente a C_2; il terzo ramo della C''_5 per O ha una tangente t generalmente distinta dalla retta OO_1: questa C''_5 ha inoltre in un punto P', imagine di P, un contatto quadripunto colla C_2.

L'equazione complessiva di questa curva di diramazione, (la quale evidentemente si può determinare in modo razionale) preso il punto O come origine di un sistema (x, y) di coordinate cartesiane, la retta OO_1 come asse $x = 0$, come punto P' il punto di coordinate $y = 0$ ed $x = -\frac{\delta}{\gamma}$, si può mettere sotto la forma seguente

$$[x^2(ax + \beta y)(\gamma x + \delta)^2 + x(\gamma x + \delta)(ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3)$$

$$+ y^2(pax^3 + pbx^2y + exy^2 + fy^3)]^2 \cdot [py^2 + x(\gamma x + \delta)] = 0.$$

Come si è accennato al n. 3 si può ora, rifacendo il cammino inverso, partire da questo piano 4–plo ed arrivare alla involuzione ciclica definita dalla trasformazione del tipo J_4. Basterebbe cioè, riguardando per un momento questo

piano 4-plo come un piano doppio avente per curva di diramazione la conica C_2, eseguire la trasformazione inversa [1, 2] corrispondente; con ciò si giungerebbe ad una omologia armonica, per la quale è invariante una quintica trasformata della C''_5, e la quale coinciderebbe colla quintica C_5 di prima avente un tacnodo, (tangente tacnodale l'asse d'omologia) e passante pel centro d'omologia. Il piano della C_5 apparirebbe poi in realtà un piano doppio del tipo di Nöther; eseguendo di nuovo la trasformazione doppia inversa corrispondente, si giungerebbe al piano semplice, su cui si ha la trasformazione J_4 primitiva. Dunque la curva di diramazione nominata è caratteristica per la razionalità di un piano 4-plo, ciclico.

10. Riassumendo si può dire che la condizione perchè un piano 4-plo $\left\{x\,,\,y\,,\,\sqrt[4]{F(x\,,\,y)}\right\}$ sia razionale è che il polimonio $F(x\,,y)=0$ abbia una delle tre forme seguenti

a) $$F(x\,,y)=f_{4\mu}(x\,,y)\,(x-a) \qquad (\mu\geq 0)$$

b) $$F(x\,,y)=\varphi_4(x\,,y)+y\varphi_2(x\,,y)+ay^2$$

c) $$F(x,y)=[x^2(\alpha x+\beta y)(\gamma x+\delta)+x(\gamma x+\delta)(ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3)+$$
$$+y^2(pax^3+pbx^2y+exy^2+fy^3)]^2\cdot[py^2+x(\gamma x+\delta)].$$

§ 5.°

Piani 6-pli ciclici razionali.

11. Ho ricordato al numero 6 che sono dieci i tipi irriducibili di trasformazione ciclica dell'indice 6, oltre i due tipi generali delle trasformazioni ortoanallagmatiche e delle omografie. Mi occupo qui della rappresentazione dei dieci tipi corrispondenti di piani 6-pli. Però siccome il procedimento è sempre il medesimo per tutti, così nei casi più semplici mi limiterò a far solo qualche breve cenno.

Incomincio dalla trasformazione del tipo B_6 (n. 6 comma 5): per questa esiste un sistema invariante ∞^3 di cubiche per sei punti base fondamentali: quindi essa subordina una omografia Ω ciclica dello stesso indice 6, la quale muta in sè una superficie cubica F_3. L'omografia, come ci è data da Kantor, è del tipo seguente

$$x_1:x_2:x_3:x_4:=x'_1:x'_2:-x'_3:jx'_4 \quad (^1)$$

(1) D'ora in poi con j intendo sempre una radice cubica primitiva dell'unità.

e l' equazione della F_8 corrispondente è

$$f_3(x_1, x_2) + x^2_3 f_1(x_1, x_2) + x^3_4 = 0,$$

dove $f_3(x_1, x_2), f_1(x_1, x_2)$ sono forme in x_1, x_2 dei gradi risp. 3 ed 1.

Si consideri l' omografia Ω^2: essa è omologica e definisce sul piano rappresentativo una trasformazione ciclica dell' indice 3, per la quale si ha una rete di cubiche K_3 unite (corrispondenti ai piani della stella $x_1 = \lambda x_2 + \mu x_3$) ed una cubica di punti uniti. Eseguendo la trasformazione [3, 1] corrispondente, si giunge al noto piano triplo con cubica generica C_3 di diramazione e di cui le rette sono le imagini delle cubiche K_3. Perciò la trasformazione B_6, la quale scambia involutoriamente le cubiche K_3 subordina sul piano triplo una trasformazione involutoria, che scambia le rette di questo piano, ossia una omologia armonica, il cui centro appartiene necessariamente alla C_3 di diramazione ed è anzi un flesso per la C_3.

Eseguendo infine la trasformazione doppia corrispondente a questa omologia armonica si giunge al piano 6—plo cercato: e si può vedere facilmente, procedendo come al num. 10, che

questo piano 6—plo ha per curva di diramazione totale una curva composta

α) *di una cubica doppia con un punto doppio* O (*nodo*),

β) *di una conica tripla passante per* O *e tangente quivi ad uno dei due rami della cubica.*

L' equazione complessiva di questa curva si può ridurre alla forma seguente:

$$[axy + f_3(x, y)]^2 \cdot [ax^2 + by^2 + cxy + dy]^3 = 0.$$

12. La trasformazione ciclica del tipo Γ_6, (appartenente alla classe M_6), è subordinata dalla omografia spaziale

$$\Omega) \qquad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = x'_1 : -x'_2 : jx'_3 : j^2x'_4$$

la quale muta in sè la superficie cubica del tipo seguente

$$(1) \qquad x^3_1 + x_1x_2^2 + x_1x_3x_4 + x_3^3 + x_4^3 = 0;$$

questa superficie contiene uno dei punti uniti della omografia [è il punto $X_2 \equiv (0,1,0,0)$] ed è segata dal piano $x_1 = 0$ secondo tre rette r_1, r_2, r_3, che si scambiano ciclicamente. I piani dei fasci aventi per sostegno queste rette r_1, r_2, r_3, segano la superficie secondo delle coniche: si indichino con $|C_2|$, $|C'_2|$ e $|C''_2|$ questi tre fasci di coniche.

L' omografia Ω^3 è omologica involutoria ed ha come piano di punti uniti il piano $x_2 = 0$ e come centro il punto X_2. Dunque la superficie (1) è trasformata

involutoriamente dalla Ω^3, passa per il centro X_2 dell' omologia ed è segata dal piano $x_1 = 0$ secondo tre rette unite.

Proiettando la (1) dal punto X_2 su un piano ed in particolare sul piano $x_2 = 0$, si ottiene un piano doppio avente per curva di diramazione totale una quartica spezzata nella cubica C_3 sezione della (1) con questo piano $x_2 = 0$ e nella retta r di intersezione dello stesso piano $x_2 = 0$ col piano $x_1 = 0$ (retta imagine del punto X_2); i tre fasci di rette del piano doppio aventi come centri i punti di intersezione della r colla cubica C_3 sono le imagini dei tre fasci di coniche $|C_2|$, $|C'_2|$ e $|C''_2|$. Questo piano doppio è ancora l' imagine dei cicli della involuzione definita dalla trasformazione del tipo Γ_6^3. Pertanto la trasformazione primitiva Γ_6, ossia l' omografia Ω dello spazio subordinerà su questo piano doppio una omografia Ω_1, ciclica dell' indice 3: infatti la Ω determina su questo piano una trasformazione che ne scambia fra loro le rette. La Ω_1 non può essere una omologia, poichè essa ha tre sole rette unite, le quali sono le proiezioni dal punto X_2 sul piano $x_2 = 0$ delle sezioni della superficie (1) coi piani

$$x_1 = 0 \, , \, x_3 = 0 \, , \, x_4 = 0.$$

Eseguendo la trasformazione multipla [3, 1] corrispondente a questa omografia Ω_1 si ottiene un piano triplo, di cui ogni foglio è doppio, ossia il piano 6–plo domandato, del quale si deve determinare la curva di diramazione. A tal fine si prendano sul piano doppio $x_2 = 0$ le cubiche $|\mathfrak{C}_3|$ passanti pei tre punti uniti A_1, A_2, A_3 dell' omografia Ω_1 e per le quali questi costituiscono la configurazione detta del *triplo tangenziale*, cioè tali che sia A_1 il tangenziale di A_2, A_2 il tangenziale di A_3 ed A_3 il tangenziale di A_1.

I punti A_1, A_2, A_3 sono distinti dai tre punti di intersezione della retta r colla cubica C_3 del piano doppio; invero questi ultimi sono le proiezioni dal punto X_2 delle rette r_1, r_2, r_3 sul piano $x_2 = 0$, rette le quali, in generale, sono distinte e quindi si scambiano ciclicamente. Le cubiche $|\mathfrak{C}_3|$, determinate nel modo anzi detto, costituiscono, come è noto, una rete; sono unite per la omografia Ω_1 e contengono delle involuzioni g^1_3. Riferendo quindi proiettivamente le cubiche di questa rete alle rette di un nuovo piano si ottiene un piano triplo π avente per curva di diramazione totale un sistema di tre rette ρ_1, ρ_2, ρ_3 non passanti per uno stesso punto. L' imagine della C_3 su π è daccapo una cubica C'_3 (tripla), la quale, come si può facilmente verificare, passa pei tre punti di intersezione delle tre rette ρ_1, ρ_2, ρ_3 ed anzi questi punti costituiscono per la C'_3 un triplo tangenziale. Allora il piano 6-plo richiesto (costituito da questo piano π triplo di cui ogni foglio è doppio) ha per curva di diramazione totale la cubica C'_3 contata tre volte e le rette ρ_1, ρ_2, ρ_3, di cui una è semplice e le altre due sono doppie. Ed infatti basta osservare che le cubiche $|\mathfrak{C}_3|$ del piano doppio $x_2 = 0$ (ottenuto come proiezione della superficie (1) dal punto X_2) hanno in un punto unito (ad es. A_1) dell' omografia Ω_1 un contatto semplice colla retta r di diramazione, mentre passano semplicemente per l'altro punto giacente su r (sia questo A_2). Perciò di questi due punti, su ogni $\mathfrak{C}_3$ il secondo soltanto conta come

punto di diramazione del piano doppio. Il terzo punto unito A_3 della Ω_1, non appartenendo alla C_3, non è di diramazione per il piano doppio. Tornando ora al piano triplo π, poichè le tre rette ρ_1, ρ_2, ρ_3 di diramazione sono le trasformate dei tre punti uniti A_1, A_2, A_3, così una soltanto di queste (e cioè la trasformata del punto A_2) deve per il piano 6–plo essere contata una volta come retta di diramazione (cioè ogni punto di questo deve risultare dalla sovrapposizione di 5 coincidenze semplici): le altre due, venendo a corrispondere a coppie involutive della trasformazione del tipo Γ_6 devono essere contate due volte.

Si è così giunti ad *un piano 6–plo (cicl. raz.) la cui curva totale di diramazione è una curva composta*

α) *di tre rette* ρ_1, ρ_2, ρ_3 *segantisi due a due in tre punti* O_1, O_2, O_3, *due di esse sono doppie e la terza semplice*,

β) *di una cubica ellittica tripla passante per i nominati punti* O_1, O_2, O_3, *i quali costituiscono per essa un triplo tangenziale.*

Dopo avere mandata la retta semplice di diramazione all' infinito, l' equazione complessiva della curva rimanente di diramazione di questo piano 6–plo può porsi sotto la forma

$$(ax^2y + by^2 + cx)^3x^2y^2 = 0.$$

13. Il cubo della trasformazione del tipo successivo Γ'_6 è una trasformazione involutoria del 2° tipo del Bertini. Perciò la Γ'_6 subordina una trasformazione ciclica dell' indice 3, che muta in sè un piano doppio con quartica C_4 di diramazione. Questa trasformazione ciclica è una omografia Ω non omologica. Cosicchè per ottenere il piano 6–plo, i cui punti corrispondono ai cicli della trasformazione del tipo in discorso, basterà eseguire la trasformazione multipla [3, 1] corrispondente a detta omografia Ω, determinando la trasformata della C_4. Gioverà a tal fine ricordare che per l' omografia Ω si ha:

1) una rete di cubiche equianarmoniche invarianti, per le quali i tre punti uniti costituiscono un triplo tangenziale;

2) un sistema ∞^3 di cubiche invarianti non passanti pei punti uniti: queste sono sostegno di involuzioni γ'_3 ellittiche.

Allora riferendo le cubiche della rete ora nominata alle rette di un piano (triplo) si vede che le cubiche del sistema 2) sono rappresentate pure su cubiche aventi in comune un triplo tangenziale costituito dai punti P_1, P_2, P_3 di intersezione delle tre rette di diramazione di questo piano triplo. Di qui segue subito che la C_4 è rappresentata su una cubica ellittica passante per P_1, P_2, P_3, in modo che P_2 e P_3 sieno risp. i tangenziali di P_1 e P_2. Con facili considerazioni si arriva ad ottenere per questo piano 6–plo *una curva di diramazione composta*

α) *di una retta semplice* r_1,

β) *di due rette doppie* r_2, r_3,

γ) *della nominata cubica ellittica tripla passante pei punti*

$$P_1 \equiv (r_2, r_3), P_2 \equiv (r_3, r_1), P_3 \equiv (r_1, r_2).$$

14. Il cubo della trasformazione del tipo Γ''_6 è una trasformazione involutoria del secondo tipo del Bertini: perciò le coppie di punti della $(\Gamma''_6)^3$ si possono rappresentare sui punti di un piano doppio con quartica C_4 di diramazione. La Γ''_6 subordina su questo piano doppio una certa omografia ciclica dell'indice 3, la quale muta in sè la C_4. Come si trova in Wiman, questa omografia è una omologia, il cui centro appartiene necessariamente alla C_4. È noto che per una omologia ciclica dell'indice 3 vi ha un sistema ∞^4 di cubiche (equianarmoniche) invarianti: allora si può ottenere subito la trasformazione [3,1] corrispondente, riferendo proiettivamente le cubiche di questo sistema agli iperpiani di uno spazio lineare S_4 a 4 dimensioni: si ha pertanto come imagine di questo sistema un cono triplo dello S_4, le cui generatrici sono rappresentate sulle rette passanti pel centro d'omologia: questo cono triplo ha come curva di diramazione una sua sezione iperpiana (imagine dell'asse d'omologia). La C_4 è rappresentata sul cono cubico da una quartica C'_4 tripla passante pel vertice ed incontrata ulteriormente da ogni generatrice in un altro punto. Proiettando il cono triplo da due suoi punti generici (distinti dal vertice) su un piano si giunge subito ad

un piano 6–plo, la cui curva totale di diramazione è composta

α) di una cubica doppia con un punto doppio O *a tangenti distinte* t_1, t_2,

β) di una quartica tripla col punto triplo O *a tangenti distinte*

$$t'_1 \equiv t_1 \,,\; t_2' \equiv t_2 \;\; e \;\; t'_3.$$

L'equazione complessiva di questa curva di diramazione si può scrivere così:

$$[xyf_1(x, y) + f_4(x, y)]^3[xy + f_3(x, y)]^2 = 0,$$

dove, come al solito $f_i(x, y)$ è una forma di grado i in x, y.

15. La trasformazione del tipo Δ_6 appartiene, come si è ricordato più sopra, alla classe M_7, cioè ammette una rete invariante di cubiche per sette punti base fondamentali. Essa è quindi subordinata da una certa omografia Ω' (cfr. 7 comma β)), la quale muta in sè il piano doppio con quartica di diramazione: dai caratteri di questa omografia Ω' la quale, come si trova in Wiman, è ciclica dell'indice 6 e non è omologica, si deducono subito per la trasformazione in questione le seguenti proprietà:

α) Esiste un fascio invariante di cubiche $|K_3|$, le quali si scambiano involutoriamente ed hanno come punti base oltre i 7 punti fondamentali due punti infinitamente vicini P_1 e P_2 e distinti dai primi: due cubiche particolari K'_3 e K''_3 di questo fascio sono unite, una di esse la K''_3 è spezzata in una retta r ed in una conica C_2 passanti per P_1 (ma non per P_2) e quivi tangenti fra loro.

Si noti anche che dei sette punti fondamentali due stanno sulla retta e gli altri cinque sulla conica.

β) esiste una sestica unita C_6, avente un punto doppio in ciascuno dei sette punti fondamentali, passante pel punto P_1 e quivi tangente alla r (epperò anche alla C_2).

γ) le coincidenze sono fornite dal punto P_1, da un ciclo di tre punti, che sono le intersezioni residue della C_6 colla K'_3 ed inoltre da infinite coppie involutive, le quali stanno su una cubica C_3 passante per i sette punti fondamentali, ma non appartenente al fascio α). Queste infinite coppie involutive costituiscono, come è facile verificarsi, una serie ellittica γ'_2: ed invero questa serie ha per sostegno una cubica ellittica e non ha coincidenze.

Il quadrato della trasformazione in questione è una trasformazione ciclica dell' indice 3 dotata dei seguenti caratteri:

α)' esiste per essa un fascio di cubiche unite: esse sono le cubiche K_3 del comma α).

β)' la sestica C_6 unita.

γ)' le coincidenze sono fornite dal punto P_1 e dalla cubica C_3 del comma γ), la quale è tutta di punti uniti.

Rappresentando i cicli di questa trasformazione ciclica dell' indice 3, sui punti di un piano, si ottiene un piano π triplo, sul quale la trasformazione primitiva data viene a subordinare una certa trasformazione involutoria: in fine operando una opportuna trasformazione [2, 1] corrispondente a questa trasformazione involutoria si arriverà al piano 6-plo cercato.

Incomincio coll' eseguire la trasformazione multipla [3, 1] corrispondente alla trasformazione $(\Delta_6)^2$ definita dalle proprietà α)', β)', γ)'. A tal fine osservo che, per questa trasformazione $(\Delta_6)^2$ esistono ∞^3 sestiche dotate delle stesse proprietà della C_6 del comma β') e di più tangenti fra loro, nel punto P, alla retta r. Invero, si seghi la cubica C_3 di punti uniti mediante l' intero sistema delle sestiche passanti doppiamente per i sette punti fondamentali; queste costituiscono un sistema lineare (invariante) ∞^6 e segano sulla C_3 la serie completa g^3_4; poichè il sistema residuo di questa C_3 rispetto alle sestiche è costituito da tutte le cubiche passanti per i sette punti. Quindi ripetendo considerazioni analoghe a quelle già svolte altrove (cfr. num. 9) si conclude l' esistenza di un sistema lineare ∞^3 di sestiche invarianti: due a due necessariamente si segano secondo cicli dell' involuzione; epperò esse oltre ai sette punti doppi fondamentali hanno in comune due punti, i quali, non potendo scambiarsi involutivamente, devono essere uniti per la trasformazione ed anzi si vede facilmente che uno di essi è il punto P_1 e l'altro un punto P_3 infinitamente vicino a P_1 nella direzione r. Su ogni sestica di questo sistema vi sono cinque coincidenze, delle quali quattro variabili ed appartenenti alla C_3 di punti uniti ed una fissa in $P_1 \equiv P_3$: questa coincidenza fissa devesi però considerare come proveniente dalla riunione di due coincidenze. Ogni cubica del fascio $|K_3|$ contiene tre coincidenze, due delle quali variabili ed appartenenti alla C_3; la terza è fissa in $P_1 \equiv P_2$.

Ora riferendo proiettivamente le sestiche di questo sistema ai piani di uno spazio ordinario a tre dimensioni, si ottiene come imagine un cono quadrico K_2 triplo, le cui generatrici sono rappresentate dalle cubiche K_3. L' imagine della C_3 su K_2 è una quartica C_4 non passante pel vertice e quindi incontrata da ogni

generatrice in due punti; e l'imagine del punto $P_1 \equiv P_2$ è una generatrice g di diramazione, la quale si deve riguardare come proveniente dalla riunione di due generatrici (di diramazione). Ciascuno dei due punti di intersezione della g colla C'_4 non conta come punto di diramazione, giacchè quivi sono riuniti tre punti di diramazione: dunque se si proietta il cono K_2 da uno di questi punti su di un piano si ottiene un piano triplo avente per curva di diramazione una cubica, poichè l'imagine del centro di proiezione (per essere una retta tripla) non conta come curva di diramazione. Ora la trasformazione del tipo Δ_6 del piano semplice subordina sul cono K_2 una certa omografia involutoria Ω'' e per questa omografia sono unite la C_4 e due generatrici, di cui una è la g di diramazione. Tali generatrici sono le imagini delle cubiche K'_3 e K''_3 del comma $\alpha\gamma$ e precisamente la g è l'imagine della K''_3. Si ricordi inoltre che la C_4 di diramazione è rappresentata sul piano semplice da una cubica C_3, sostegno di una serie ellittica γ'_2: quindi anche l'involuzione di coppie di punti che si ha sulla C_4 deve essere ellittica e come tale non può avere coincidenze; perciò nessuno dei due punti di intersezione della g colla C_4 può essere unito. Si conclude allora che l'omografia Ω subordina sul piano triplo di prima una trasformazione quadratica involutoria; poichè, non essendo unito il centro da cui si proietta il cono K_2, un piano generico per questo centro O viene dalla Ω mutato in un piano non passante per O e quindi una retta generica del piano triplo viene mutata in una conica. Ora affine di potere più facilmente eseguire la trasformazione [2, 1] proietto invece il cono K_2 da un punto unito distinto dal vertice e in particolare dal punto unito, che si trova sull'altra generatrice unita oltre la g; allora Ω subordina sul nuovo piano triplo una omologia involutoria Ω_1. Il piano triplo che ottengo con questa nuova proiezione ha per curva totale di diramazione una quartica C'_4 con un tacnodo e una retta a passante pel tacnodo e distinta dalla tangente tacnodale [1].

La retta a è l'imagine della generatrice g e perciò si deve riguardare come costituita da due rette di diramazione sovrapposte. Siccome poi la g non è tutta di punti uniti, così la a sua proiezione non può essere l'asse dell'omologia Ω_1, il quale sarà invece fornito dalla tangente tacnodale u della C'_4: il centro della Ω_1 sarà un punto della a non appartenente alla C'_4.

Per avere infine il piano 6—plo domandato si eseguisca la trasformazione doppia [2, 1] corrispondente a questa omologia armonica e si determini la trasformata della C'_4; procedendo come si è fatto al num. 10 per il piano 4-plo, si giunge al

piano 6-plo, la cui curva totale di diramazione è composta

α) di una conica tripla,

β) di una quartica doppia avente due punti doppi infinitamente vicini O_1 *ed* O_2 *giacenti sulla conica ed avente inoltre in un altro punto* M *un contatto quadripunto colla conica,*

---

[1] È evidente che la curva di diramazione di questo piano triplo è riducibile ad una cubica mediante una semplice trasformazione quadratica.

γ) *di una retta doppia (da riguardarsi come due rette doppie sovrapposte) passante per* O_1 *ed* M.

Assumendo come origine delle coordinate il punto O_1, come asse $x=0$ la retta O_1O_2 e come punto M il punto di coordinate $y=0$ ed $x=-\frac{\delta}{\gamma}$, l'equazione complessiva di questa curva di diramazione assume la forma

$$[x^2(\gamma x+\delta)^2+x(\gamma x+\delta)(ax^2+bxy+cy^2)+y^2(pax^2+pbxy+dy^2)]^2[py^2+x(\gamma x+\delta)]^3y^4=0.$$

16. Le trasformazioni dei tre tipi E_6, E'_6 ed E''_6 si possono raggruppare insieme per le loro analogie.

Infatti, come si vede nel lavoro citato di Wiman, i loro cubi dànno sempre delle trasformazioni involutorie del 3° tipo del Bertini; le coppie involutive di punti di questa trasformazione si possono rappresentare sui punti di un piano doppio (di Nöther) avente come curva di diramazione una sestica con due punti tripli infinitamente vicini. Perciò ciascuna di queste tre trasformazioni subordina sul piano doppio una trasformazione ciclica dell'indice 3, la quale lascia immutata la sestica di diramazione; in Wiman si trova che in tutti tre i casi questa trasformazione ciclica dell'indice 3 è una omologia e si ha che:

1) l'omologia, subordinata dalla trasformazione E_6, ha per centro il punto triplo della sestica e per asse una retta generica;

2) l'omologia, subordinata dalla trasformazione del tipo E'_6, ha per asse la retta che passa pei punti tripli infinitamente vicini della sestica e per centro un punto generico del piano non appartenente alla sestica;

3) infine l'omologia, subordinata dalla trasformazione del tipo E''_6, ha per centro un punto allineato coi due punti tripli e distinto da questi e per asse una retta passante per il punto triplo.

Ora, come si è accennato al num. 15, per una omologia ciclica dell'indice 3 vi sono ∞^4 cubiche (equianarmoniche) unite non passanti pel centro dell'omologia.

Si riferiscano le cubiche di questo sistema agli iperpiani di uno spazio lineare S_4 a quattro dimensioni, si ottiene come imagine un cono cubico triplo dello S_4, le cui generatrici sono rappresentate dalle rette unite dell'omologia e di cui la curva di diramazione è una sezione generica, imagine dell'asse di omologia. In ciascuno dei tre casi differenti si cerchi su questo cono cubico l'imagine della sestica di diramazione del piano doppio, trasformato in sè da quella certa omologia dei tre tipi 1), 2), 3). Si ottengono allora corrispondentemente i tre tipi seguenti distinti di piani 6-pli ciclici razionali:

1)' *un piano 6–plo avente per curva di diramazione una curva composta*

α) *di una cubica doppia con un punto doppio* O *a tangenti separate* t_1 *e* t_2,

β) *di una sestica tripla col punto* O *5–plo, nel quale due rami sono di-*

stinti ed hanno le tangenti t_1 *e* t_2 *e gli altri tre rami hanno in comune una tangente* t_3, *in generale differente da* t_1 *e* t_2.

Assumendo il punto O come origine delle coordinate e le rette t_1 e t_2 come assi coordinati, l'equazione complessiva della curva di diramazione si può ridurre sotto la forma seguente:

$$[xy + f_3(x, y)]^2 \cdot [xy(ax + by)^3 + f_6(x, y)]^3 = 0,$$

dove $f_3(x, y)$ ed $f_6(x, y)$ sono delle forme dei gradi risp. 3 e 6 in x, y.

2)' *un piano* 6*–plo avente per curva totale di diramazione una curva composta*

α) *di una sestica tripla con un punto* 4*–plo* O *e due punti doppi* O_1 *ed* O_2 *infinitamente vicini, ma lungo direzioni distinte per* O,

β) *di una cubica doppia col punto doppio* O *passante semplicemente pei punti* O_1 *ed* O_2 *ed avente inoltre un contatto* 6*–pto colla sestica nominata in un punto generico* P.

Prendendo il punto O come origine degli assi, le rette OO_1 ed OP come assi (P punto all'infinito) ed essendo $\alpha x + \beta y = 0$ l'equazione della retta OO_2, l'equazione complessiva di questa curva di diramazione, la quale si determina subito, in modo puramente razionale, si può ridurre alla forma seguente

$$\{x^2(\alpha x + \beta y)^2 + x(\alpha x + \beta y)(ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3) +$$

$$+ y^2[a\lambda x^4 + (a\mu + b\lambda)x^3y + (b\mu + c\lambda - \lambda^2)x^2y^2 + (c\mu + d\lambda - 2\lambda\mu)xy^3 + ey^4]\}^3 \times$$

$$\times \{x(\alpha x + \beta y) + y^2(\lambda x + \mu y)\}^2 = 0.$$

3)' *un piano* 6*–plo avente come curva totale di diramazione:*

α) *una sestica tripla con un punto* 4*–plo* O *e due punti doppi* O_1 *ed* O_2 *a questo infinitamente vicini ed in direzioni distinte per* O *ed inoltre avente una cuspide in un punto* P.

β) *una cubica doppia col punto* O *doppio passante per* O_1, O_2 *e* P, *toccando in quest'ultimo punto la tangente cuspidale della sestica.*

Assunto, come il solito, il punto O come origine degli assi, le rette OO_1 ed OO_2 come assi, come punto P un punto di coordinate $x = a$, $y = b$ e la retta $x = a$ per tangente tacnodale, abbiamo per questa curva di diramazione l'equazione

$$[x^2y^2(x - a)^2 + xy(x - a)(y - b)\varphi_2(x, y) + (ay - bx)^3\varphi_3(x, y)]^3 \times$$

$$\times [xy(x - a) + (ay - bx)^2\varphi_1(x, y)]^2 = 0,$$

dove φ_1, φ_2, φ_3 sono forme binarie dei gradi risp. 1, 2, 3.

17. Il quadrato della trasformazione del tipo H_6 è una trasformazione ciclica dell'indice tre, i cui cicli si possono rappresentare su un piano triplo, avente come curva di diramazione una sestica con un punto 4-plo O e due punti doppi O_1 ed O_2 ad esso infinitamente vicini, ma lungo direzioni distinte. Cosicchè la trasformazione ciclica dell'indice 6 data, subordina su questo piano triplo una trasformazione involutoria, che lascia invariata questa sestica; tale trasformazione si può sempre ridurre ad una omologia avente come asse la retta OO_1 e come centro un punto della retta OO_2 (1).

Si tratterà quindi di eseguire la trasformazione [2,1] corrispondente a questa omologia. A tal fine si ricordi che per una omologia involutoria vi sono ∞^3 coniche unite senza punti base; considerando queste come piani di uno spazio ordinario si ha per imagine del sistema un cono quadrico doppio: la sestica unita per l'omologia è rappresentata su questo cono pure da una sestica segata da ogni generatrice in tre punti variabili, ed avente un punto triplo con un ramo tangente alla conica di diramazione del cono. Che questa sestica abbia un punto triplo si rileva subito; basta notare che nel piano dell'omologia tutte le coniche (∞^3) (unite) che passano per O passano di conseguenza anche per O_2, cioè hanno quivi in comune colla sestica 6 intersezioni riunite, ossia tre coppie involutive di punti; perciò al punto O deve corrispondere per la sestica del cono un punto triplo. Proiettando il cono da questo punto triplo su un piano si ottiene il piano 6-plo cercato, il quale

ha per curva di diramazione totale una curva composta

α) *di una cubica ellittica doppia*,

β) *di una retta* r_1, *tripla tangente di flesso alla cubica in un punto* O,

γ) *di un' altra retta* r_2 *tripla passante per* O.

Preso il punto O come origine delle coordinate, le rette r_1 ed r_2 come assi, l'equazione di questa curva di diramazione si può scrivere come segue

$$[y + yf_1(x, y) + f_3(x, y)]^2 x^3 y^3 = 0,$$

dove f_1 ed f_3 sono forme in x, y dei gradi risp. 1 e 3.

---

(1) Per vedere questo, basta ricordare che questo piano triplo si può ottenere da un cono cubico (triplo) dello S_4, (avente per curva di diramazione una sestica incontrata da ogni generatrice in due punti variabili) proiettato su un piano da due suoi punti generici. Ora la trasformazione data sul piano semplice subordina (come facilmente si potrebbe vedere) su questo cono una omografia involutoria, avente due generatrici unite (distinte), su ciascuna delle quali esiste un punto unito distinto dal vertice. Proiettando il cono su un piano da questi due punti uniti, non appartenenti alla sestica di diramazione, si ottiene il piano triplo nominato, il quale è trasformato in sè da una omologia armonica. Questa ha unite le due rette OO_1 ed OO_2 imagini dei punti da cui si proietta, ma non può avere O come centro di omologia, come si può vedere dai caratteri di questa trasformazione ciclica. Dunque OO_1 è l'asse ed il centro è un punto della OO_2, come si è asserito.

18. L'ultimo tipo di trasformazione ciclica dell'indice 6, di cui mi devo ora occupare è quello indicato con Π'_6: questa trasformazione appartiene pure alla classe M_8, vale a dire ammette un sistema invariante ∞^3 di sestiche con otto punti base fondamentali doppi. Questa trasformazione ha ancora i seguenti caratteri:

α) esiste un fascio di sestiche unite appartenenti al sistema invariante ∞^3 nominato: esso sono inoltre bitangenti in due punti P_1 e P_2 distinti dai punti fondamentali e costituenti una coppia involutiva;

β) una cubica C_3 di punti uniti passante per gli otto punti fondamentali, ma non per P_1 e P_2;

γ) una C_9 invariante avente un punto triplo in ciascuno degli otto punti fondamentali e passante per P_1 e P_2: le C_9 e C'_3 si segano ulteriormente secondo un ciclo di tre punti.

Nel caso presente invece di eseguire, come si è fatto pei tipi precedenti, due convenienti trasformazioni [3, 1] e [2, 1] successive, tornerà più semplice operare direttamente la trasformazione [6, 1] corrispondente.

Ripetendo un procedimento in tutto simile a quello tenuto nel § 5 della mia Nota prec., per dedurre il piano 5-plo imagine dei cicli dell'unico tipo di trasformazione ciclica dell'indice 5, si giunge subito ad

un piano 6—plo avente per curva totale di diramazione

α) *una cubica ellittica semplice*,

β) *una sua tangente di flesso.*

Mandando questa tangente all'infinito, l'equazione della cubica assume la forma

$$y^3 + f_2(x, y) + f_1(x, y) + c = 0,$$

dove f_2 ed f_1 sono forme binarie dei gradi risp. 2 ed 1.

Si verifica poi agevolmente che il piano 6—plo

$$\left\{ x, y, \sqrt[6]{y^3 + f_2(x, y) + f_1(x, y) + c} \right\}$$

ha come curva totale di diramazione questa cubica sommata alla retta all'infinito contata tre volte. Si verifica pure in modo facile che un piano 6—plo, avente una tale curva di diramazione, è razionale, ossia che è razionale la superficie

$$z^6 = y^3 + f_2(x, y) + f_1(x, y) + c.$$

Infatti essa ha il punto all'infinito dell'asse $y = 0$ 4—plo e le sue sezioni generiche per questo punto sono di genere due, mentre le sue sezioni coi piani $z =$ cost. sono ellittiche: dunque proiettando questa dal punto 4-plo su un piano, si ottiene un piano doppio di Nöther [1].

---

[1] Cfr. l'analogo procedimento tenuto al § 7 in fine della Nota cit. per dimostrare la razionalità del piano 5-plo.

19. Riassumendo i risultati ottenuti in questo § si può dire che

Condizione necessaria e sufficiente perchè il piano 6—plo $\{(x, y, \sqrt[6]{F(x, y)})\}$ *sia razionale è che il polinomio* $F(x, y)$ *sia riducibile, mediante trasformazioni razionali birazionali del piano* (x, y), *ad uno dei seguenti tipi:*

1) $F(x, y) = f_{6\mu}(x, y)(x - a)$ (con $\mu \geq 0$).

2) $F(x, y) = [xy + f_3(x, y)]^2 \cdot [ax^2 + by^2 + cxy + dy[^3$.

3) $F(x, y) = [ax^2y + by^2 + cx]^3 x^2 y^2$.

4) $F(x, y) = (ax + bx^2y + cy^2 + dx^2 + exy)^3 x^2 y^2$.

5) $F(x, y) = [xyf_1(x, y) + f_4(x, y)]^3 \cdot [xy + f_3(x, y)]^2$.

6) $F(x, y) = [x^2(\gamma x + \delta)^2 + x(\gamma x + \delta)(ax^2 + bxy + cy^2) +$

$+ y^2(pax^2 + pbxy + dy^2)]^2 \cdot [py^2 + x(\gamma x + \delta)]^3 y^4$.

7) $F(x, y) = [xy + f_3(x, y)]^2 \cdot [xy(ax + by)^3 + f_6(x, y)]^3$.

8) $F(x, y) = [x^2(\alpha x + \beta y)^2 + x(\alpha x + \beta y)(ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3) +$

$+ y^2(a\lambda x^4 + (a\mu + b\lambda)x^2y + (b\mu + c\lambda - \lambda^2)x^2y^2 +$

$+ (c\mu + d\lambda - 2\lambda\mu)xy^3 + ey^4)]^3 \cdot [x(\alpha x + \beta y) + y^2(\lambda x + \mu y)]^2$.

9) $F(x, y) = [x^2y^2(x - a)^2 + xy(x - a)(y - b)f_2(x, y) +$

$+ (ay - bx)^3 f_3(x, y)]^3 \cdot [xy(x - a) + (ay - bx)^2 \times f_1(x, y)]^2$.

10) $F(x, y) = [y + yf_1(x, y) + f_3(x, y)]^2 x^2 y^3$.

11) $F(x, y) = y^3 + f_2(x, y) + f_1(x, y) + c$.

Con $f_i(x, y)$ intendo sempre una forma binaria in x, y del grado i.

§ 6.°

Piani 8—pli ciclici razionali.

20. Oltre i tipi generali 1) e 2) indicati al num. 6 vi è un sol tipo di trasformazione ciclica dell' indice 8 (tipo Δ_8).

La quarta potenza di questa trasformazione è equivalente ad una trasformazione involutoria del 3° tipo del Bertini; rappresentando le coppie di questa sui punti di un piano si ottiene un piano doppio avente come curva totale di diramazione una curva composta di una quintica C_5 con un tacnodo T e della sua tangente tacnodale t. Sicchè [cfr. 7, γ)] la trasformazione data subordina su questo piano doppio una omografia ciclica dell'indice 4, la quale ne muta in sè la curva di diramazione. Come ci è dato da Wiman questa omografia non è omologica, ha la retta t unita tutta costituita di coppie involutive, il tacnodo T è un punto unito: inoltre la C_5 contiene un altro punto unito P, dove la retta PT è necessariamente per la C_5 una tangente di flesso, le equazioni canoniche in coordinate trilineari di questa omografia, presa la retta t come retta $x_2 = 0$ e per retta PT la retta $x_1 = 0$, sono

$$x_1 : x_2 : x_3 = x'_1 : ix'_2 : -x'_3.$$

Si considerino le cubiche della rete

$$\lambda_0 x^3_3 + \lambda_1 x^2_1 x_3 + \lambda_2 x_1 x^2_2 = 0,$$

le quali sono unite, ed i tre fasci che si ottengono da questa ponendo una volta $\lambda_0 = 0$, un'altra volta $\lambda_1 = 0$ e infine $\lambda_2 = 0$. Siccome queste cubiche due a due si segano secondo un ciclo, e sono sostegno di serie cicliche g^1_4, così esse si potranno riferire proiettivamente alle rette di un piano, il quale sarà 4-plo; si cerchi su questo piano la trasformata della curva di diramazione dal piano doppio di prima. Si giunge così:

al piano 8-plo (ciclico razionale), il quale ha per curva totale di diramazione:

α) due rette r_1, r_2 *semplici,*

β) una retta r_3 *doppia,*

γ) una cubica ellittica 4-pla passante pei punti (r_1, r_2) *ed* (r_1, r_3), *dove le rette* r_2 *ed* r_3 *sono risp. tangenti di flesso.*

Mandando la retta r_3 all'infinito, l'equazione della curva rimanente di diramazione si può porre sotto la seguente forma

$$(ax^3 + bxy + cy^2 + dy)^4 xy = 0.$$

Si può verificare che questo piano 8-plo si può definire mediante il campo di razionalità

$$\left\{x, y, \sqrt[8]{(ax^3 + bxy + cy^2 + dy)^4 x \cdot y}\right\},$$

§ 7.°

Piani 9–pli ciclici razionali.

21. Anche pei piani 9–*pli*, oltre quei tipi generali corrispondenti alle omografie ed alle trasformazioni di Jonquières si ha un solo tipo: esso si ottiene come imagine dei cicli delle trasformazioni del tipo B_9. Come si è ricordato al n. 6, questa trasformazione ammette un sistema unito ∞^3 di cubiche con 6 punti base fondamentali e subordina pertanto una omografia spaziale ciclica dello stesso indice, la quale muta in sè una superficie cubica imagine di questo sistema di cubiche.

La omografia fu determinata da Kantor sotto la forma seguente

$$\Omega)\ x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \varepsilon_1 x'_1 : \varepsilon^7_1 x'_2 : \varepsilon^4_1 x'_3 : x'_4 \ (^1)$$

e l'equazione della superficie cubica invariante è

$$F_3 \equiv x^2_1 x_2 + x^2_2 x_3 + x^2_3 x_1 + x^3_4 = 0.$$

Proiettando la F_3 dal punto $X_4(x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1)$ si ottiene un piano triplo avente per curva di diramazione la cubica sezione della F_3 col piano $x_4 = 0$, ossia la cubica

$$C_3 = x_1^2 x_2 + x^2_2 x_3 + x^2_3 x_1 = 0.$$

L'omografia Ω subordina sul piano $x_4 = 0$ una omografia Ω' ciclica dell'indice 3, per la quale la C_3 è invariante, questa omografia non è omologica ed ha come punti uniti i tre punti $X_1 \equiv (1,0,0,0)$, $X_2 \equiv (0,1,0,0)$, $X_3 \equiv (0,0,1,0)$ i quali costituiscono per la C_3 un triplo tangenziale; tale C_3 contiene una serie ciclica g'_3. È noto inoltre che vi sono ∞^2 cubiche aventi le stesse proprietà delle C_3 ed unite per la Ω': allora riferendo queste proiettivamente alle rette di un nuovo piano si ottiene subito

il piano 9–plo (ciclico razionale), la cui curva totale di diramazione è costituita

α) da tre rette semplici,

β) da una retta tripla

Il campo di razionalità definito da questo piano 9–plo è, come è facile vedere, il seguente

$$\left\{ x, y, \sqrt[9]{x \cdot y(ax + by + c)} \right\}.$$

---

(1) È ε_1 una radice 9–pla primitiva dell'unità.

§ 8.°

Piani 10*—pli ciclici razionali.*

22. Passo ad occuparmi della trasformazione del tipo Γ_{10}, per la quale come fu detto al n.° 6, esiste un sistema invariante di sestiche con otto punti base doppi fondamentali. La quinta potenza di questa trasformazione è una trasformazione involutoria del 3° tipo del Bertini: rappresentando le coppie involutive di punti di questa sui punti di un piano si ottiene un piano doppio (di Nöther) avente come curva di diramazione una quintica C_5 con un tacnodo e la sua tangente tacnodale. La data trasformazione subordina su questo piano doppio una omologia, la quale ha per asse una retta passante pel tacnodo e distinta dalla tangente tacnodale e per centro un punto di detta tangente. Essendo $x_1 = 0$, l' asse dell' omologia, questa è definita analiticamente dalle equazioni seguenti

$$x_1 : x_2 : x_3 = \varepsilon x'_1 : x'_2 : x'_3 \text{ (1)}.$$

Per tale omologia sono unite tutte le ∞^6 quintiche, la cui equazione è del tipo

$$x^5_1 + f_5(x_2, x_3) = 0,$$

dove $f_5(x_2, x_3)$ è una forma del 5° grado in x_2, x_3. Tali quintiche essendo sostegno di involuzioni razionali g'_5, si possono riferire proiettivamente agli iperpiani di uno spazio lineare S_6 a 6 dimensioni: si ottiene un cono 5—plo K_5 del quinto ordine avente per curva di diramazione una sezione iperpiana generica C_5, imagine dell' asse $x_1 = 0$ d' omologia. La C_5 di diramazione del piano doppio è rappresentata su questo cono pure da una sezione iperpiana generica C'_5, la quale ha colla C_5 un contatto semplice in un punto P imagine del tacnodo di C_5. La tangente tacnodale è poi rappresentata su K_5 dalla generatrice passante per P Riguardando i punti di questo cono come imagine dei cicli della trasformazione del tipo Γ_{10}, tale cono risulta 10—plo ed ha per curva di diramazione la C_5 doppia, la C'_5 5—pla e la generatrice per P pure 5—pla.

Proiettando K_5 da quattro dei suoi punti generici su un piano si ottiene

un piano 10*—plo* (*cicl. raz.*) *avente come curva totale di diramazione*

α) *una quintica doppia avente un punto* O 4*—plo a tangenti distinte*,

β) *un' altra quintica* 5*—pla avente lo stesso punto* 4*—plo* O *colle stesse tangenti e di più avente in un punto generico* P *un contatto semplice colla quintica doppia*,

---

(1) È ε una radice quinta primitiva dall' unità.

γ) *la retta* OP 5-*pla.*

L'equazione complessiva di questa curva di diramazione si può scrivere nel seguente modo:

$$(1) \qquad [f_4(x,y) + x^2 f_3(x,y)]^5 [f_4(x,y) + x^2 \varphi_3(x,y)]^2 x^5 = 0,$$

dove f_4, f_3, φ_3 sono forme binarie in xy dei gradi risp. 4 e 3. Si rileva facilmente che il piano 10-plo

$$\left\{ x, y, \sqrt[10]{[f_4(x,y) + x^2 f_3(x,y)]^5 [f_4(x,y) + x^2 \varphi_3(x,y)]^2 x^5} \right\}$$

ha per curva totale di diramazione la (1).

§ 9.°

Piani 12-*pli ciclici razionali.*

23. Passo alla rappresentazione dei piani 12-pli corrispondenti alle trasformazioni cicliche dei tre tipi differenti B_{12}, B'_{12} e Γ_{12} di Kantor.

La trasformazione appartenente al tipo B_{12} ha, come ho ricordato al n. 6, un sistema invariante ∞^3 di cubiche con 6 punti base fondamentali: viene perciò da essa subordinata una omografia spaziale ciclica dello stesso indice, per la quale è unita la superficie cubica imagine del nominato sistema di cubiche. Il tipo di questa omografia è il seguente:

$$\Omega) \equiv x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = x'_1 : -x'_2 : ix'_3 : jx'_4$$

e la superficie cubica invariante è data dall'equazione

$$F_3 \equiv x^3_1 + x_1 x^2_2 + x^2_3 x_2 + x^3_4 = 0.$$

Proiettando questa dal punto $X_4 \equiv (0,0,0,1)$ sul piano $x_4 = 0$, si ottiene un piano triplo, avente come curva di diramazione la cubica

$$C_3 = x^3_1 + x_1 x^2_2 + x^2_3 x_2 = 0.$$

L'omografia Ω subordina su questo piano triplo una omografia Ω' non omologica ciclica dell'indice 4, per la quale la C_3 è unita; le rette unite di questa omografia sono le intersezioni dei piani $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ ed $x_3 = 0$ col piano $x_4 = 0$; la retta $x_3 = 0$ è sostegno di una involuzione g'_2, ossia è l'asse dell'omologia $(\Omega')^2$, la C_3 passa pel punto $x_1 = x_2 = 0$, dove la retta $x_2 = 0$ è una tangente di flesso, e per il punto $x_1 = x_3 = 0$, di cui il punto di prima è il tangenziale. Si rileva fa-

cilmente che sono ∞^2 le cubiche unite aventi le stesse proprietà della C_3 e che queste cubiche, mentre due a due si segano secondo un ciclo di quattro punti, sono sostegno di una serie ciclica razionale g'_4; dunque riferendo queste proiettivamente alle rette di un piano si ottiene

un piano 12*—plo* (*cicl. raz.*) *la cui curva totale di diramazione è composta*

α) *di due rette semplici*,

β) *di una retta* 4*—pla*,

γ) *di una retta* 6*-pla.*

Si ha poi che il piano 12—plo

$$\left\{ x, y, \sqrt[12]{xy(ax+by+c)^6} \right\}$$

ha per curva totale di diramazione la curva ora nominata ed è razionale.

24. La rappresentazione del piano 12—plo corrispondente alla trasformazione del tipo B'_{12}, richiederebbe una discussione un po' minuta e laboriosa analogamente a quanto fu fatto per il piano 6-plo del num. 16. Mi limiterò ad accennare ad essa, solo per sommi capi.

Prendendo a studiare i caratteri della trasformazione in questione, quali ci sono dati in Wiman, si trova subito che la trasformazione ciclica dell' indice 3 del tipo $(B'_{12})^4$ coincide colla trasformazione del tipo $(\Delta_6)^2$ del num. 16.

Perciò, rappresentando i cicli di questa sui punti di un piano, si ottiene un piano triplo avente per curva totale di diramazione una quartica con un tacnodo ed una retta passante pel tacnodo, distinta dalla tangente tacnodale e da considerarsi come due rette di diramazione infinitamente vicine. Facilmente si trova che la trasformazione data subordina su questo particolare piano triplo una omografia non omologica, ciclica dell' indice 4, per la quale la curva di diramazione rimane invariata.

Se tale omografia è definita dal seguente sistema di equazioni

$$x_1 : x_2 : x_3 = ix'_1 : -x'_2 : x'_3,$$

la quartica di diramazione sarà del tipo

$$x^4_1 + x^4_2 + x^2_1 x_2 x_3 + x^2_2 x^2_3 = 0$$

ed $x_1 = 0$ sarà la retta di diramazione.

Per questa omografia si ha la rete seguente di cubiche invarianti

$$\lambda_0 x^2_1 x_2 + \lambda_1 x^2_2 x_3 + \lambda_2 x^3_3 = 0,$$

le quali passano per il punto $x_1 = x_3 = 0$, di cui il tangenziale è il punto di

flesso $x_2 = x_3 = 0$, dove tangente di flesso è la retta $x_2 = 0$: esse si segano due a due secondo un unico ciclo di 4 punti e sono sostegno di involuzioni cicliche g'_4.

Considerando inoltre i tre fasci che si ottengono ponendo una volta $\lambda_0 = 0$, un' altra volta $\lambda_1 = 0$ ed infine $\lambda_2 = 0$ e riferendo le cubiche di quella rete alle rette di un piano, si ottiene un piano 4–plo avente per curva totale di diramazione due rette semplici r_1 ed r_2 ed una retta r_3 doppia (imagine della retta $x_1 = 0$).

La quartica di diramazione del piano triplo viene in questo piano 4–plo rappresentata su una cubica avente un punto doppio in (r_1, r_3) e passante semplicemente per (r_1, r_2). Allora, riguardando ogni foglio di questo piano 4–plo come triplo, si ottiene

un piano 12-*plo* (*cicl. razionale*) *avente per curva completa di diramazione*

α) *la retta* r_1 *semplice*,

β) *la retta* r_2 *tripla*,

γ) *la retta* r_3 *quadrupla* (*da riguardarsi come due rette* 4–ple *infinitamente vicine*),

δ) *una cubica quadrupla passante doppiamente pel punto* (r_1, r_3) *e semplicemente pel punto* (r_1, r_2).

25. Passo infine alla trasformazione del tipo Γ_{12}. Il cubo di questa trasformazione è una trasformazione ciclica dell' indice 4, appartenente al tipo studiato al num. 10. Pertanto, rappresentando i cicli della trasformazione del tipo $(\Gamma_{12})^3$ sui punti di un piano, si ottiene un piano 4–plo, la cui curva totale di diramazione è costituita da una quintica doppia con un punto triplo O ed un punto doppio O_1 infinitamente vicino, e da una conica semplice passante per O, O_1 ed avente colla quintica un contatto 4–pto in un punto P generico.

Cosicchè la trasformazione Γ_{12} data subordina su questo piano 4-plo una trasformazione T ciclica dell' indice 3, per la quale la quintica e la conica di diramazione rimangono immutate. Ricorrendo alle proprietà caratteristiche della trasformazione del tipo Γ_{12} in questione, si può facilmente dimostrare che mediante una semplice trasformazione quadratica [1] si può fare in modo che la T divenga una omologia (ciclica dell' indice 3). La curva di diramazione di questo piano 4-plo viene da quella trasformazione quadratica trasformata in una curva composta

α) di una quartica C_4 doppia con un punto doppio P',

β) di una retta r_1 tripla, la quale conta come curva di diramazione semplice, passante per P' e quivi tangente alla quartica,

γ) di una retta r_2 semplice, la quale passa per il punto P_1 ulteriore intersezione delle r_1 colla C_4 ed è tangente di flesso alla C_4 in un punto P_2.

Allora l' omologia ciclica dell' indice 3, che muta in sè questo piano 4–plo

---

[1] Questa trasformazione è definita dalle coniche passanti pei punti O, O_1 e P.

è caratterizzata dall' avere il punto P_1 come centro e la retta $P'P_2$ come asse. Ciò posto riuscirà facile eseguire la trasformazione multipla [3, 1] corrispondente. Basta a tal fine ricordare, come più volte ho avuto occasione di notare, che per una omologia ciclica dell' indice 3 vi sono ∞^4 cubiche unite senza punti base. L' imagine di questo sistema di cubiche è un cono cubico triplo K_3 di uno spazio S_4 a 4 dimensioni: la curva di diramazione su K_3 è costituita da una sua sezione iperpiana generica C_3 corrispondente all' asse dell' omologia; mentre le generatrici sono rappresentate dalle rette pel centro di omologia. Si cerchi su questo cono l' imagine della curva di diramazione del piano 4–plo trasformato in sè da quell' omologia. La C_4 dà evidentemente un' altra quartica C'_4, passante pel vertice, segata da ogni generatrice in un sol punto variabile, l'imagine del punto doppio P' è un punto semplice Q, appartenente alla curva di diramazione C_3 del cono triplo. La generatrice per Q, rappresentata sul piano 4-plo dalla retta $P'P_1$, farà parte della curva di diramazione di questo cono riguardato come 12–plo: lo stesso dicasi della generatrice corrispondente alla retta $r_2 = P_1P_2$ del piano 4–plo. Questa generatrice incontrerà la cubica C_3 del cono in un punto Q_1 comune alla C'_4. Proiettando il cono K_3 dai punti Q e Q_1, tenendo conto della molteplicità di questi punti, si ottiene subito

un piano 12–plo, il quale ha per curva di diramazione totale

α) *una retta* ρ_1(*7–pla, la quale conta come retta*) *di diramazione semplice*

β) *una retta* ρ_2 *semplice,*

γ) *una terza retta* ρ_3 *4–pla,*

δ) *infine una conica* C_2 *6–pla.*

Si potrebbe poi vedere che la conica C_2 passa pel punto comune alle rette ρ_2, ρ_3, è quivi tangente alla ρ_3 e tocca in un punto qualunque la retta ρ_1.

§ 10.°

Piani 14-pli ciclici razionali.

26. La trasformazione del tipo B_{14} è tale che $(B_{14})^7$ forma una trasformazione involutoria del secondo tipo del Bertini. Rappresentando le coppie involutive di punti della $(B_{14})^7$ su un piano, si ottiene un piano 4-plo con quartica C_4 di diramazione.

La trasformazione data subordina su questo piano 4-plo una omografia non omologica ciclica dell' indice 7, per la quale la C_4 è unita. La C_4 ha in ciascuno dei tre punti uniti A_1, A_2, A_3 dell' omografia un flesso e tangenti di flesso sono le tre rette unite.

È facile vedere che esistono ∞^2 quartiche unite per questa omografia e dotate tutte delle stesse proprietà della C_4 di diramazione: due quartiche di questa rete si segano secondo un ciclo di sette punti: ciascuna è poi sostegno di una iuvoluzione g'_7. Riferendo allora proiettivamente queste quartiche alle rette di un nuovo piano si ottiene subito

un piano 14–plo (cicl. raz.) avente per curva totale di diramazione

α) tre rette semplici,

β) una retta 7–pla.

Algebricamente si ha poi che il piano 14–plo $\{x, y, \sqrt[14]{xy(ax+by+c)^7}\}$ ha per curva totale di diramazione la curva sopradetta.

§ 11.°

Piani 15-pli ciclici razionali.

27. La trasformazione del tipo B_{15} ha i seguenti caratteri:

α) esiste un sistema ∞^3 invariante di sestiche con otto punti doppi base fondamentali: una di queste sestiche, la quale indico con C_6 è unita ed è sostegno di una involuzione ciclica g'_5;

β) esiste un fascio di cubiche per gli otto punti fondamentali, le quali si scambiano fra loro ciclicamente cinque a cinque; va fatta eccezione per due cubiche particolari K_3 e K'_3, di cui una (la K_3) è sostegno di una involuzione ciclica g'_3;

γ) entro il sistema α) esiste un fascio di sestiche, le quali si scambiano tre a tre ed hanno fra loro un contatto 4–pto in un punto P distinto dai punti fondamentali. Si deve fare eccezione per due sole sestiche particolari, l'una è la C_6 sopra nominata, l'altra è la K'_3 contata due volte: questa K'_3 passa quindi per P e tocca quivi tutte le sestiche di questo fascio;

δ) vi ha infine una curva del nono ordine C_9 unita: questa ha un punto triplo in ciascuno degli otto punti fondamentali e passa per P.

Si consideri la trasformazione del tipo $(B_{15})^3$, la quale è ciclica dell'indice 5. Si può vedere facilmente come, rappresentando i cicli di questa ultima trasformazione sui punti di un altro piano, si ottiene un piano 5–plo avente come curva totale di diramazione una cubica C_3 ed una tangente t di flesso [1].

Giova ricordare che le rette generiche del piano 5–plo sono rappresentate sul piano semplice da una rete di curve del 9° ordine, aventi le stesse proprietà della C_9 del comma 8); mentre le rette passanti per il punto di flesso sono rappresentate sulle sestiche del comma γ). Allora segue senz'altro che la trasformazione del tipo in questione subordina su questo piano 5–plo una omografia ciclica dell'indice 3, per la quale la C_3 e la t rimangono immutate.

Di più si vede subito che questa omografia è omologica, poichè per il punto di flesso deve passare una retta tutta di punti uniti, come imagine della C_6 sostegno della involuzione g'_5: questa retta è poi certamente distinta dalla retta t.

---

[1] Cfr. nella mia NOTA citata il § 5.

Dunque per ottenere il piano 15-plo domandato non rimarrà altro che ad eseguire una trasformazione [3, 1], la quale fu già operata più volte; epperò

la curva totale di diramazione di questo piano 15—plo risulta costituita

α) *da una cubica 5—pla con un punto doppio* O *a tangenti distinte* t_1 e t_2,

β) *da una cubica tripla collo stesso punto doppio* O *e le stesse tangenti* t_1 *e* t_2,

γ) *da una retta 6 pla, la quale però come curva di diramazione deve contarsi tre volte: questa retta passa per* O *e per un punto* O_1 *comune alle due cubiche.*

L'equazione complessiva di questa curva di diramazione, prendendo il punto O come origine delle coordinate, le rette t_1 e t_2 come assi ed il punto O_1 come punto all' infinito della retta $ax + by = 0$, si può porre sotto la forma:

$$(ax + by)^6[xy + (ax + by)f_2(x, y)]^3[xy + (ax + by)\varphi_2(x, y)]^5 = 0,$$

dove $f_2(x, y)$ e $\varphi_2(x, y)$ sono delle forme binarie di grado 2.

Si verificherà poi che il piano 15-plo

$$\{x, y, \sqrt[15]{(ax + by)^6[xy + (ax + by)f_2(x, y)]^3[xy + (ax + by)\varphi_2(x, y)]^5}\}$$

ha per curva totale di diramazione le curve rappresentate nell' ultima equazione.

§ 12.°

Piani 18-pli, 20—pli, 24—pli e 30-pli ciclici razionali.

28. La trasformazione del tipo B_{18} ammette una rete invariante di cubiche per sette punti base fondamentali. Per ciò la sua nona potenza è una trasformazione involutoria del secondo tipo del Bertini: rappresentando le coppie di questa involuzione sui punti di un piano si ottiene un piano doppio con quartica di diramazione. La B_{18} subordina su questo piano doppio una omografia ciclica dell' indice 9, per la quale rimane immutata la quartica di diramazione. Questa omografia è definita dal sistema di equazioni

$$x_1 : x_2 : x_3 = x'_1 : \varepsilon_1^3 x'_2 : \varepsilon_1 x'_3 \text{ (1)}.$$

---

(1) È ε_1 una radice nona primitiva dell' unità.

La retta $x_3 = 0$ è sostegno di una involuzione g'_3. Eseguendo la trasformazione [9 , 1] corrispondente a questa omografia si arriva ad

un piano 18*–plo* (*ciclico razionale*), *la cui curva di diramazione è costituita*

α) *da una retta semplice,*

β) *da una retta doppia,*

γ) *da una retta* 6*–pla, ed infine*

δ) *da una retta* 9*–pla.*

29. Dai caratteri assegnati da Wiman alla trasformazione del tipo B_{20} si deduce subito, che la quinta potenza di questa trasformazione è una trasformazione ciclica dell' indice 4 del tipo J_4 studiata al num. 10. Rappresentando su un piano i cicli della $(B_{20})^5$ si otterrà pertanto un piano 4-plo ciclico razionale, la cui curva di diramazione è riducibile (cfr. num. 10) ad una curva costituita di una quintica doppia con un punto triplo O ed un punto doppio O_1 infinitamente vicino e di una conica semplice passante per O , O_1 ed avente colla quintica un contatto 4–pto in un punto generico P. Quindi la B_{20} subordinerà su questo piano 4-plo una trasformazione T ciclica dell' indice 5, per la quale rimangono invariate la quintica e la conica di diramazione. Si vedrebbe facilmente come si possa sempre operare la trasformazione multipla [4 , 1] in modo che la T sia una omologia Ω. Così procedendo, la conica di diramazione risulta spezzata in due rette, di cui una è la retta OO_1 e l' altra una retta r che ha un contatto 5–pto in un punto generico P della quintica: l' asse dell' omologia Ω è la retta OP ed il centro il punto comune alle due rette OO_1 ed r.

Allora operando la trasformazione multipla [5 , 1] corrispondente a questa omologia, trasformazione la quale è stata eseguita al num. 8 per la rappresentazione dei piani 10–pli, si ottiene

un piano 20*–plo* (*cicl. raz.*) *la cui curva totale di diramazione è costituita*

α) *da una quintica* C_5 4–pla, *avente un punto* 4*–plo* O *a tangenti* (*in generale*) *distinte,*

β) *da un' altra quintica* C'_5 10*–pla avente lo stesso punto* 4*–plo* O *colle stesse tangenti ed avente inoltre in un punto* O', *distinto da* O *un contatto tripunto colla* C_5 ,

γ) *due rette* 5*–ple , di cui una è la congiungente* OO', *l' altra la retta, che unisce* O *ad un altro punto comune alle due quintiche* C_5 e C'_5.

Tralascio di dare l' equazione complessiva di questa curva di diramazione, la quale si determina in modo puramente razionale: infatti la determinazione del contatto 3-pto fra le quintiche C_5 e C'_5 si opera mediante una semplice eliminazione. Indicando brevemente con $F(x , y) = 0$ questa equazione si vede facilmente che il piano multiplo $\{x , y , \sqrt[20]{F(x , y)}\}$ ha per curva totale di diramazione la $F(x , y) = 0$.

30. Si trova poi facilmente che alle trasformazioni cicliche dei tipi B_{24} e B_{30} corrispondono rispettivamente

un piano 24*—plo* (*cicl. raz.*) *avente per curva totale di diramazione*

α) *due rette semplici,*

β) *una retta* 8*—pla,*

γ) *una retta* 12*—pla;*

ed un piano 30*—plo* (*cicl. raz.*), *la cui curva totale di diramazione risulta costituita,*

α) *di una retta semplice,*

β) *di una retta* 6*—pla,*

γ) *di una retta* 10*—pla,*

δ) *di una retta* 15*-pla.*

Assisi, Gennaio 1903.

ANNUNZIO BIBLIOGRAFICO

Guide du Calculateur. (Astronomie, Géodésie, Navigation, etc.) par J. Boccardi:

Deuxième Partie (¹). Regles pour les Calculs speciaux. (A. Hermann, Paris et J. Pastore, Catane 1902).

Indice dei capitoli — XI. Construction de tables numériques. Exercises sur l'interpolation — XII. Méthode des moindres carrès. Applications—XIII. Calculs astronomiques d'un usage très frequent — XIV. Généralités relativement aux orbites des astres — XV. Éphémerides. Observations — XVI. Détermination d'une première orbite au moyen de trois observations — XVII. Calcul d'une première orbite de la planète Hebe - XVIII. Orbites paraboliques. Méthode d'Olbers. Exercise numérique — XIX. Correction d'une premiére orbite par la variation des distances — XX. Correction d'une orbite par les Coefficients Différentiels — XXI. Perturbations spéciales — XXII. Quelques calculs de Géodésie — *Additions.*

(¹) Per la prima parte, vedi questo stesso volume pag. 13.

INTORNO AD ALCUNI AGGREGATI DI COEFFICIENTI BINOMIALI

NOTA

DEL

Dottor ALFREDO PERNA.

Scopo della presente noticina è di dare alcune proprietà del simbolo

$$A_{m,n,l} = \sum_{\rho=0}^{\rho=n} (-1)^\rho \binom{n}{\rho}\binom{m-2n}{l-2\rho},$$

che compare nell' altra mia nota: « *Le equazioni delle curve in coordinate complesse coniugate* » (¹), e del simbolo più generale

$$A_{m,n,l,\nu} = \sum_{\rho=0}^{\rho=\nu} (-1)^\rho \binom{\nu}{\rho} A_{m,n+\rho,l}.$$

Tali proprietà, che sono quelle di speciali aggregati di coefficienti binomiali, permettono di dimostrare, molto facilmente, che i determinanti

$$D = \begin{vmatrix} A_{m,0,0} & A_{m,1,0} & \cdots & A_{m,\mu,0} \\ A_{m,0,2} & A_{m,1,2} & \cdots & A_{m,\mu,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{m,0,2\mu} & A_{m,1,2\mu} & \cdots & A_{m,\mu,2\mu} \end{vmatrix}, \qquad D' = \begin{vmatrix} A_{m,0,1} & A_{m,1,1} & \cdots & A_{m,\mu',1} \\ A_{m,0,3} & A_{m,1,3} & \cdots & A_{m,\mu',3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{m,0,2\mu'+1} & A_{m,1,2\mu'+1} & \cdots & A_{m,\mu',2\mu'+1} \end{vmatrix}$$

sono, non solo differenti da zero, come è semplicemente detto a pag. 6 della ci-

---

(¹) Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XVII.

tata nota, ma eguali, in valore assoluto, alla potenza di 2 che ha per esponente il massimo intero contenuto in $\frac{m^2}{4}$.

---

1. **Il simbolo $A_{m,n,l}$.** Dati due numeri interi e non negativi k e k', è noto il significato del simbolo $\binom{k}{k'}$. Convenendo che sia $\binom{k}{k'}=0$ per $k'<0$, e ciò per far sussistere la proprietà $\binom{k}{k'}=\binom{k}{k-k'}$ per $k'>k\geq 0$, poniamo

$$A_{m,n,l}=\sum_{\rho=0}^{\rho=n}(-1)^{\rho}\binom{n}{\rho}\binom{m-2n}{l-2\rho}, \tag{1}$$

m,n,l essendo numeri interi non negativi ed $n\leq\left[\frac{m}{2}\right]=\mu, l\leq m$. Ne segue, posto $\lambda=\left[\frac{l}{2}\right]$, che, per $n=\mu$, $A_{m,n,l}$ si riduce a zero per l dispari ed m pari, e a $(-1)^{\lambda}\binom{\mu}{\lambda}$ per tutti gli altri valori di l ed m.

Mutando nella (1) l in $m-l$, si ha

$$A_{m,n,m-l}=\sum_{\rho=0}^{\rho=n}(-1)^{\rho}\binom{n}{\rho}\binom{m-2n}{m-l-2\rho};$$

e però, notando che l'$(r+1)^{imo}$ termine di $A_{m,n,l}$, a contare da destra, è

$$(-1)^{n-r}\binom{n}{n-r}\binom{m-2n}{l-2n+2r},$$

cioè

$$(-1)^{n}\left\{(-1)^{r}\binom{n}{r}\binom{m-2n}{m-l-2r}\right\},$$

mentre quello di egual posto di $A_{m,n,m-l}$, a contare però da sinistra, è

$$(-1)^{r}\binom{n}{r}\binom{m-2n}{m-l-2r},$$

si vede che i termini di $A_{m,n,l}$, a cominciare da destra, sono rispettivamente eguali a quelli di $A_{m,n,m-l}$, a cominciare da sinistra, moltiplicati per $(-1)^n$. Se ne deduce

$$A_{m,n,l}=(-1)^{n}A_{m,n,m-l}, \tag{2}$$

ossia che, *mutando in* $A_{m,n,l}$ *l' indice* 1 *in* $m-1$, *il valore assoluto resta inalterato mentre il segno cambia o no secondo che* n *è dispari o pari.* Per n dispari ed $m = 2l$, è evidentemente $A_{m,n,l} = 0$.

2. Per definizione si ha

$$A_{m,n,0} = \binom{m-2n}{0},$$

$$A_{m,n,2} = \binom{m-2n}{2} - \binom{n}{1}\binom{m-2n}{0},$$

$$A_{m,n,4} = \binom{m-2n}{4} - \binom{n}{1}\binom{m-2n}{2} + \binom{n}{2}\binom{m-2n}{0},$$

. . . . . .

$$A_{m,n,2\mu} = \binom{m-2n}{2\mu} - \binom{n}{1}\binom{m-2n}{2\mu-2} + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}\binom{m-2n}{2\mu-2n};$$

quindi, sommando,

$$\sum_{\sigma=0}^{\sigma=\mu} A_{m,n,2\sigma} = \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\mu}\binom{m-2n}{2\sigma} - \binom{n}{1}\sum_{\sigma=0}^{\sigma=\mu-1}\binom{m-2n}{2\sigma} + \binom{n}{2}\sum_{\sigma=0}^{\sigma=\mu-2}\binom{m-2n}{2\sigma} +$$

$$+ \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}\sum_{\sigma=0}^{\sigma=\mu-n}\binom{m-2n}{2\sigma}.$$

Ma, figurando nel secondo membro in generale il termine $\binom{n}{\rho}\sum_{\sigma=0}^{\sigma=\mu-\rho}\binom{m-2n}{2\sigma}$, è

$$n \geq \rho, \quad m - 2n < 2\mu - 2\rho + 2;$$

quindi

$$\binom{m-2n}{2\mu-2\rho+2} = \binom{m-2n}{2\mu-2\rho+4} = \ldots = 0.$$

Se ne deduce allora

$$\sum_{\sigma=0}^{\sigma=\mu-\rho}\binom{m-2n}{2\sigma} = \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\mu}\binom{m-2n}{2\sigma},$$

e però, per $n > 0$,

$$\sum_{\sigma=0}^{\sigma=\mu} A_{m,n,2\sigma} = \left\{\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}\right\} \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\mu} \binom{m-2n}{2\sigma} = (1-1)^n \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\mu} \binom{m-2n}{2\mu} = 0.$$

Per $n = 0$ invece, riducendosi $\sum_{\sigma=0}^{\sigma=\mu} A_{m,n,2\sigma}$ alla somma dei coefficienti binomiali di posto dispari dello sviluppo della potenza m^{ima} del binomio, si ha $\sum_{\sigma=0}^{\sigma=\mu} A_{m,n,2\sigma} = 2^{m-1}$.

Analogamente, posto $\mu' = \left[\frac{m-1}{2}\right]$, si trova che il valore di $\sum_{\sigma=0}^{\sigma=\mu'} A_{m,n,2\sigma+1}$ è 2^{m-1} o zero, secondochè è zero o no l'indice n.

In generale quindi può scriversi

$$\sum_{\sigma=0}^{\sigma=\mu} A_{m,n,2\sigma} = \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\mu'} A_{m,n,2\sigma+1} = \begin{cases} 0 & \ldots (n > 0) \\ 2^{m-1} & \ldots (n = 0) \end{cases}, \tag{3}$$

donde

$$\sum_{l=0}^{l=m} A_{m,n,l} = \begin{cases} 0 & \ldots (n > 0) \\ 2^m & \ldots (n = 0) \end{cases}.$$

Segue allora, considerando le due funzioni di m date dai determinanti D e D', che *è* 2^{m-1} *la somma degli elementi della prima colonna di ciascun determinante, mentre è costantemente nulla quella degli elementi di ciascun' altra colonna.*

Ricavandosi poi dalla (3), per $0 < n + k \leq \mu$, $0 < n + k' \leq \mu'$,

$$\sum_{\sigma=0}^{\sigma=\mu} \left(A_{m,n,2\sigma} - A_{m,n+k,2\sigma}\right) = \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\mu} A_{m,n,2\sigma}, \quad \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\mu'} \left(A_{m,n,2\sigma+1} - A_{m,n+k',2\sigma+1}\right) = \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\mu'} A_{m,n,2\sigma+1},$$

si ha che tale proprietà continua a sussistere per i determinanti che si ottengono da D e D' sottraendo dagli elementi di ciascuna verticale i corrispondenti della successiva. Per m pari si vede poi, tenendo presente la (2), che sono alternativamente pari o nulli gli elementi dell'orizzontale che è asse di simmetria di D e D', secondochè m è congruo a zero o a 2 secondo il modulo 4.

3. Poichè per $n \leq \mu - 1$ è

$$\binom{m-2n}{l-2\rho} = \binom{m-2n-2}{l-2\rho} + 2\binom{m-2n-2}{l-2\rho-1} + \binom{m-2n-2}{l-2\rho-2},$$

si avrà

$$A_{m,n,l} = \sum_{\rho=0}^{\rho=n}(-1)^\rho\binom{n}{\rho}\binom{m-2n-2}{l-2\rho} + 2\sum_{\rho=0}^{\rho=n}(-1)^\rho\binom{n}{\rho}\binom{m-2n-2}{l-2\rho-1} + \sum_{\rho=0}^{\rho=n}(-1)^\rho\binom{n}{\rho}\binom{m-2n-2}{l-2\rho-2},$$

cioè, mutando nell' ultimo termine ρ in $\rho - 1$,

$$A_{m,n,l} = \sum_{\rho=0}^{\rho=n+1}(-1)^\rho\left\{\binom{n}{\rho} - \binom{n}{\rho-1}\right\}\binom{m-2n-2}{l-2\rho} + 2A_{m-2,n,l-1}. \qquad (4)$$

Ma dall'eguaglianza $\binom{n+1}{\rho} = \binom{n}{\rho} + \binom{n}{\rho-1}$ si ricava $\binom{n}{\rho} = \binom{n+1}{\rho} - \binom{n}{\rho-1}$, quindi

$$A_{m,n,l} = \sum_{\rho=0}^{\rho=n+1}(-1)^\rho\left\{\binom{n+1}{\rho} - 2\binom{n}{\rho-1}\right\}\binom{m-2n-2}{l-2\rho} + 2A_{m-2,n,l-1}$$

$$= A_{m,n+1,l} + 2\sum_{\rho=1}^{\rho=n+1}(-1)^{\rho-1}\binom{n}{\rho-1}\binom{m-2n-2}{l-2\rho} + 2A_{m-2,n,l-1}.$$

$$= A_{m,n+1,l} + 2\sum_{\rho=0}^{\rho=n}(-1)^\rho\binom{n}{\rho}\binom{m-2n-2}{l-2\rho-2} + 2A_{m-2,n,l-1}$$

$$= A_{m,n+1,l} + 2\{A_{m-2,n,l-1} + A_{m-2,n,l-2}\};$$

e però, per $n \leq \mu - 1$,

$$A_{m,n,l} - A_{m,n+1,l} = 2\{A_{m-2,n,l-1} + A_{m-2,n,l-2}\}. \qquad (5)$$

Analogamente, avendosi $\binom{n}{\rho-1} = \binom{n+1}{\rho} - \binom{n}{\rho}$, dalla (4) si ricava anche

$$A_{m,n,l} = \sum_{\rho=0}^{\rho=n+1}(-1)^\rho\left\{2\binom{n}{\rho} - \binom{n+1}{\rho}\right\}\binom{m-2n-2}{l-2\rho} + 2A_{m-2,n,l-1},$$

e però

$$A_{m,n,l} + A_{m,n+1,l} = 2(A_{m-2,n,l} + A_{m-2,n,l-1}).$$

La (5) mostra che, *se dagli elementi di ciascuna colonna dei determinanti* D *e* D′ *si sottraggono i corrispondenti elementi della colonna successiva, le differenze saranno tutte divisibili per* 2.

4. Il simbolo $A_{m,n,l,\nu}$. Estendiamo il significato del simbolo $A_{m,n,l}$ al caso in cui sia $\mu < n \leq m$, ponendo

$$A_{m,n,l} = (-1)^l A_{m,m-n,l}. \tag{6}$$

Analogamente alle (2) si avrà allora

$$A_{m,n,l} = (-1)^l A_{m,m-n,l} = (-1)^{l+n} A_{m,m-n,m-l} = (-1)^n A_{m,n,m-l};$$

poi, introducendo il simbolo

$$A_{m,n,l,\nu} = A_{m,n,l} - \binom{\nu}{1} A_{m,n+1,l} + \binom{\nu}{2} A_{m,n+2,l} - \ldots + (-1)^\nu \binom{\nu}{\nu} A_{m,n+\nu,l} = \sum_{\rho=0}^{\rho=\nu} (-1)^\rho \binom{\nu}{\rho} A_{m,n+\rho,l},$$

con $\nu \leq m-n$, si avrà per la (6)

$$A_{m,n,l,\nu} = (-1)^l \sum_{\rho=0}^{\rho=\nu} (-1)^\rho \binom{\nu}{\rho} A_{m,m-n-\rho,l},$$

cioè, mutando ρ in $\nu - \rho$,

$$A_{m,n,l,\nu} = (-1)^{l+\nu} \sum_{\rho=0}^{\rho=\nu} (-1)^\rho \binom{\nu}{\rho} A_{m,m-n-\nu+\rho,l} = (-1)^{l+\nu} A_{m,m-n-\nu,l,\nu}.$$

Ne segue, per m pari

$$\begin{cases} A_{m,\mu-\rho+1,2\rho+2,2\rho} = A_{m,\mu-\rho-1,2\rho+3,2\rho} \\ A_{m,\mu'-\rho+1,2\rho+3,2\rho+1} = A_{m,\mu'-\rho,2\rho+3,2\rho+1}, \end{cases} \tag{7}$$

e per m dispari

$$\begin{cases} A_{m,\mu-\rho+1,2\rho+2,2\rho} = A_{m,\mu-\rho,2\rho+2,2\rho} \\ A_{m,\mu'-\rho+1,2\rho+3,2\rho+1} = A_{m,\mu'-\rho-1,2\rho+3,2\rho+1}. \end{cases} \tag{8}$$

Si ha inoltre

$$A_{m,n-1,l,\nu} - 2A_{m,n,l,\nu} + A_{m,n+1,l,\nu} = \sum_{\rho=0}^{\rho=\nu+2} (-1)^\rho \binom{\nu}{\rho} A_{m,n+\rho-1,l} +$$

$$+ 2 \sum_{\rho=0}^{\rho=\nu+2} (-1)^\rho \binom{\nu}{\rho-1} A_{m,n+\rho-1,l} + \sum_{\rho=0}^{\rho=\nu+2} (-1)^\rho \binom{\nu}{\rho-2} A_{m,n+\rho-1,l}$$

$$= \sum_{\rho=0}^{\rho=\nu+2} (-1)^\rho \left\{ \binom{\nu}{\rho} + 2\binom{\nu}{\rho-1} + \binom{\nu}{\rho-2} \right\} A_{m,n+\rho-1,l} = \sum_{\rho=0}^{\rho=\nu+2} (-1)^\rho \binom{\nu+2}{\rho} A_{m,n+\rho-1,l},$$

cioè

$$A_{m,n-1,l,\nu} - 2\,A_{m,n,l,\nu} + A_{m,n+1,l,\nu} = A_{m,n,l,\nu+2}\,. \tag{9}$$

In particolare, per m pari e per le (7),

$$\left\{ \begin{aligned} &2(A_{m,\mu-\rho-1,2\rho+2,2\rho} - A_{m,\mu-\rho,2\rho+2,2\rho}) = A_{m,\mu-\rho-1,2\rho+2,2\rho} - 2A_{m,\mu-\rho,2\rho+2,2\rho} + \\ &\qquad + A_{m,\mu-\rho+1,2\rho+2,2\rho} = A_{m,\mu-\rho-1,2\rho+2,2\rho+2} \\ &A_{m,\mu'-\rho-1,2\rho+3,2\rho+1} - A_{m,\mu'-\rho,2\rho+3,2\rho+1} = A_{m,\mu'-\rho-1,2\rho+3,2\rho+1} - 2A_{m,\mu'-\rho,2\rho+3,2\rho+1} \\ &\qquad + A_{m,\mu'-\rho+1,2\rho+3,2\rho+1} = A_{m,\mu'-\rho-1,2\rho+3,2\rho+3}; \end{aligned} \right. \tag{10}$$

per m pari e per le (8), invece,

$$\left\{ \begin{aligned} &A_{m,\mu-\rho-1,2\rho+2,2\rho} - A_{m,\mu-\rho,2\rho+2,2\rho} = A_{m,\mu-\rho-1,2\rho+2,2\rho} - 2A_{m,\mu-\rho,2\rho+2,2\rho} + \\ &\qquad + A_{m,\mu-\rho+1,2\rho+2,2\rho} = A_{m,\mu-\rho-1,2\rho+2,2\rho+2} \\ &2(A_{m,\mu'-\rho-1,2\rho+3,2\rho+1} - A_{m,\mu'-\rho,2\rho+3,2\rho+1}) = A_{m,\mu'-\rho-1,2\rho+3,2\rho+1} - 2A_{m,\mu'-\rho,2\rho+3,\rho+1} + \\ &\qquad + A_{m,\mu'-\rho+1,2\rho+3,2\rho+1} = A_{m,\mu'-\rho-1,2\rho+3,2\rho+3}. \end{aligned} \right. \tag{11}$$

5. Si ha $A_{m,n,0,0} = A_{m,n,0} = 1$. Poi, per la (5),

$(n<\mu)$ $$A_{m,n,1,1} = A_{m,n,1} - A_{m,n+1,1} = 2A_{m-2,n,0} = 2\,,$$

$(n<\mu-1)$ $$A_{m,n,2,2} = A_{m,n,2} - 2A_{m,n+1,2} + A_{m,n+2,2} = (A_{m,n,2} - A_{m,n+1,2}) - (A_{m,n+1,2} - A_{m,n+2,2})$$

$$= 2(A_{m-2,n,1} + A_{m-2,n,0}) - 2(A_{m-2,n+1,1} + A_{m-2,n+1,0}) = 2A_{m-2,n,1,1} = 2.2 = 2^2,$$

$$(n<\mu-2)\quad A_{m,n,3,3}=A_{m,n,3}-3A_{m,n+1,3}+3A_{m,n+2,3}-A_{m,n+3,3}$$

$$=(A_{m,n,3}-A_{m,n+1,3})-2(A_{m,n+1,3}-A_{m,n+2,3})+(A_{m,n+2,3}-A_{m,n+3,3})$$

$$=2\{A_{m-2,n,2}+A_{m-2,n,1}-2(A_{m-2,n+1,2}+A_{m-2,n+1,1})+A_{m-2,n+2,2}+A_{m-2,n+2,1}\}$$

$$=2(A_{m-2,n,2,2}+A_{m-2,n-1,1,1}-A_{m-2,n+1,1,1})=2\cdot 2^2=2^3\,,$$

. . . . . .

E quest' eguaglianze, com' è facile verificare per le prime tre, sussistono anche rispettivamente per $n=\mu\,,\ \mu-1\,,\ \mu-2$.

In generale si avrà

$$(n\leq\mu-l+1)\qquad A_{m,n,l,l}=2^l. \tag{12}$$

Infatti, supposta vera la (16), si ha, mutando n in $n+1$,

$$(n\leq\mu-l)\qquad A_{m,n+1,l,l}=2^l\,,$$

onde, sottraendo,

$$(n\leq\mu-l)\qquad 0=\sum_{\rho=0}^{\rho=l}(-1)^\rho\binom{l}{\rho}A_{m,n+\rho,l}-\sum_{\rho=0}^{\rho=l}(-1)^\rho\binom{l}{\rho}A_{m,n+\rho+1,l}$$

$$=\sum_{\rho=0}^{\rho=l+1}(-1)^\rho\left\{\binom{l}{\rho}+\binom{l}{\rho-1}\right\}A_{m,n+\rho,l}=\sum_{\rho=0}^{\rho=l+1}(-1)^\rho\binom{l+1}{l}A_{m,n+\rho,l}.$$

Mutando in questa l in $l-1$,

$$(n\leq\mu-l+1)\qquad A_{m,n,l-1,l}=0\,; \tag{13}$$

e però, sommando la (12) con la (13), dopo aver cambiato m in $m-2$, e tenendo presente la (5),

$$(n\leq\mu-l)\quad 2^l=A_{m-2,n,l,l}+A_{m-2,n,l-1,l}=\sum_{\rho=0}^{\rho=l}(-1)^\rho\binom{l}{\rho}(A_{m-2,n+\rho,l}+A_{m-2,n+\rho,l-1})$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{\rho=0}^{\rho=l}(-1)^\rho\binom{l}{\rho}(A_{m,n+\rho,l+1}-A_{m,n+\rho+1,l+1})\,,$$

cioè

$$(n \leq \mu - l) \qquad 2^{l+1} = \sum_{\rho=0}^{\rho=l+1} (-1)^\rho \left\{ \binom{l}{\rho} + \binom{l}{\rho-1} \right\} A_{m,n+\rho,l+1}$$

$$= \sum_{\rho=0}^{\rho=l+1} (-1)^\rho \binom{l+1}{\rho} A_{m,n+\rho,l+1} = A_{m,n,l+1,l+1}.$$

6. Si noti infine che, se è $\nu > l$, è $A_{m,n,l,\nu} = 0$. Ed infatti se si ha

$$(n < \mu + 1 - l - l') \qquad 0 = A_{m,n,l,l+l'} = \sum_{\rho=0}^{\rho=l+l'} (-1)^\rho \binom{l+l'}{\rho} A_{m,n+\rho,l},$$

si avrà, mutando n in $n+1$,

$$(n < \mu - l - l') \qquad 0 = \sum_{\rho=0}^{\rho=l+l'} (-1)^\rho \binom{l+l'}{\rho} A_{m,n+\rho+1,l};$$

e sottraendo

$$(n < \mu - l - l') \qquad 0 = \sum_{\rho=0}^{\rho=l+l'+1} (-1)^\rho \left\{ \binom{l+l'}{\rho} + \binom{l+l'}{\rho-1} \right\} A_{m,n+\rho,l}$$

$$= \sum_{\rho=0}^{\rho=l+l'+1} (-1)^\rho \binom{l+l'+1}{\rho} A_{m,n+\rho,l} = A_{m,n,l,l+l'+1}.$$

Da quest' eguaglianza e dalla (13) si deduce che *il simbolo* $A_{m,n,l,\nu}$ *rappresenta lo zero ogni volta che il quarto indice supera il terzo.*

7. **I determinanti D e D'.** Si considerino ora i due determinanti D e D'. Diremo che sugli elementi di una colonna di essi si opera col simbolo $(1, -2, 1)$, se agli elementi di quella colonna si aggiungono i corrispondenti delle due successive, moltiplicati rispettivamente per -2 ed 1. Analogamente si opera sugli elementi di una colonna col simbolo $(n, -n)$, togliendo dagli elementi di essa, moltiplicati per n, i corrispondenti della colonna successiva, moltiplicati anche per n. Ciò posto si distinguano i due casi di m pari e di m dispari.

Se m è pari, operando sugli elementi della penultima colonna di D col simbolo $(2, -2)$, dopo aver operato su quelli delle colonne precedenti col simbolo $(1, -2, 1)$, si avrà, ricordando la definizione di $A_{m,n,l,2}$ e la prima delle (10),

$$D = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots 0 & 1 \\ A_{m,0,2,2} & A_{m,1,2,2} & \dots A_{m,\mu-1,2,2} & A_{m,\mu,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m,0,2\mu,2} & A_{m,1,2\mu,2} & \dots A_{m,\mu-1,2\mu,2} & A_{m,\mu,2\mu} \end{vmatrix},$$

cioè, per la (12),

$$D = (-1)^{\mu+2} \cdot 2^{2-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ A_{m,0,4,2} & A_{m,1,4,2} & \dots & A_{m,\mu-1,4,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m,0,2\mu,2} & A_{m,1,2\mu,2} & \dots & A_{m,\mu-1,2\mu,2} \end{vmatrix}.$$

Operando come prima sugli elementi delle diverse colonne

$$D = (-1)^{\mu+2} \cdot 2^{2-2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots 0 & 1 \\ A_{m,0,4,4} & A_{m,1,4,4} & \dots A_{m,\mu-2,4,4} & A_{m,\mu-1,4,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m,0,2\mu,4} & A_{m,1,2\mu,4} & \dots A_{m,\mu-2,2\mu,4} & A_{m,\mu-1,2\mu,4} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\mu+2+\mu+1} \cdot 2^{(2+4)-2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ A_{m,0,6,4} & A_{m,1,6,4} & \dots & A_{m,\mu-2,6,4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m,0,2\mu,4} & A_{m,1,2\mu,4} & \dots & A_{m,\mu-2,2\mu,4} \end{vmatrix}.$$

Così proseguendo si avrà $D = (-1)^{\sigma} \cdot 2^{\tau} A_{m,0,2\mu,2\mu}$, essendo

$$\sigma = \sum_{\rho=3}^{\rho=\mu+2} \rho = \frac{\mu(\mu+5)}{2} \equiv \frac{\mu(\mu+1)}{2} \text{ (mod. 2)}, \qquad \tau = 2 \sum_{\rho=1}^{\rho=\mu-1} \rho - \mu = \mu(\mu-2).$$

Ma $A_{m,0,2\mu,2\mu} = 2^{2\mu}$, quindi

$$D = (-1)^{\binom{\mu+1}{2}} \cdot 2^{\mu^2} = (-1)^{\binom{\mu+1}{2}} 2^{\left[\frac{m^2}{4}\right]}$$

Se m è dispari, operando col simbolo $(1, -1)$ sugli elementi della penultima colonna di D e col simbolo $(1, -2, 1)$ sugli elementi di ciascuna delle colonne precedenti, si avrà, ricordando la prima delle (11), la definizione di $A_{m,n,l,\nu}$ e le (12) e (9),

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots 0 & 1 \\ A_{m,0,2,2} & A_{m,1,2,2} & \dots A_{m,\mu-1,2,2} & A_{m,\mu,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m,0,2\mu,2} & A_{m,1,2\mu,2} & \dots A_{m,\mu-1,2\mu,2} & A_{m,\mu,2\mu} \end{vmatrix} = (-1)^{\mu+2} \begin{vmatrix} A_{m,0,2,2} & \dots & A_{m,\mu-1,2,2} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{m,0,2\mu,2} & \dots & A_{m,\mu-1,2\mu,2} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\mu+2}\cdot 2^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ A_{m,0,4,2} & A_{m,1,4,2} & \dots & A_{m,\mu-1,4,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m,0,2\mu,2} & A_{m,1,2\mu,2} & \dots & A_{m,\mu-1,2\mu,2} \end{vmatrix},$$

ed operando ripetutamente come prima

$$D=(-1)^{\mu+2+\mu+1}\cdot 2^2\cdot 2^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ A_{m,0,6,4} & A_{m,1,6,4} & \dots & A_{m,\mu-2,6,4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m,0,2\mu,4} & A_{m,1,2\mu,4} & \dots & A_{m,\mu-2,2\mu,4} \end{vmatrix} = \dots = (-1)^{\sigma}\cdot 2^{\tau}\cdot A_{m,0,2\mu,2\mu}.$$

Ma

$$\sigma = \frac{\mu(\mu+5)}{2} \equiv \frac{\mu(\mu+1)}{2} \pmod{2}, \qquad \tau = \frac{\mu(\mu+1)}{2}, \qquad A_{m,0,2\mu,2\mu} \equiv 2^{2\mu},$$

quindi

$$D = (-1)^{\binom{\mu+1}{2}} 2^{\left[\frac{m^2}{4}\right]}.$$

In ogni caso dunque può dirsi che *il valore del determinante* D *è la potenza di* 2 *che ha per esponente il massimo intero contenuto in* $\frac{m^2}{4}$, *ed il cui segno è* + o − *secondo che è pari o dispari* $\binom{\mu+1}{2}$.

8. Quanto al determinante D′ osserviamo prima che, se m è pari, è (§ 1)

$$A_{m,\mu'+1,2\rho+1} = A_{m,\mu,2\rho+1} = 0\,;\ \text{e però}\ A_{m,\mu',2\rho+1} = A_{m,\mu',2\rho+1} - A_{m,\mu'+1,2\rho+1} = A_{m,\mu',2\rho+1,1}.$$

Notando poi che, per $\rho = 0$, è $A_{m,\mu',2\rho+1,1} = A_{m,\mu',1} - A_{m,\mu'+1,1} = \binom{2}{1} = 2$, si avrà, operando col simbolo $(1, -1)$ su ciascuna delle prime $\mu' - 1$ colonne e ricordando la definizione di $A_{m,n,l,\nu}$ e la (12),

$$D' = \begin{vmatrix} A_{m,0,1,1} & A_{m,1,1,1} & \dots & A_{m,\mu'-1,1,1} & A_{m,\mu',1,1} \\ A_{m,0,3,1} & A_{m,1,3,1} & \dots & A_{m,\mu'-1,3,1} & A_{m,\mu',3,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m,0,2\mu'+1,1} & A_{m,1,2\mu'+1,1} & \dots & A_{m,\mu'-1,2\mu'+1,1} & A_{m,\mu',2\mu'+1,1} \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ A_{m,0,3,1} & A_{m,1,3,1} & \dots & A_{m,\mu',3,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m,0,2\mu'+1,1} & A_{m,1,2\mu'+1,1} & \dots & A_{m,\mu',2\mu'+1,1} \end{vmatrix}.$$

Operando ora col simbolo $(1, -1)$ sugli elementi della penultima colonna e col simbolo $(1, -2, 1)$ su quelli di ciascun' altra colonna precedente, si ha, ricordando le (9) e (12) e la seconda delle (10),

$$D' = 2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots 0 & 1 \\ A_{m,0,3,3} & A_{m,1,3,3} & \dots A_{m,\mu'-1,3,3} & A_{m,\mu',3,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m,0,2\mu'+1,3} & A_{m,1,2\mu'+1,3} & \dots A_{m,\mu'-1,2\mu'+1,3} & A_{m,\mu',2\mu'+1,3} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\mu'+2} \cdot 2^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots 1 \\ A_{m,0,5,3} & A_{m,1,5,3} & \dots A_{m,\mu'-1,5,3} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{m,0,2\mu'+1,3} & A_{m,1,2\mu'+1,3} & \dots A_{m,\mu'-1,2\mu'+1,3} \end{vmatrix}.$$

Operando ripetutamente nello stesso modo,

$$D' = (-1)^{\mu'+2+\mu'+1} \cdot 2^{1+3+5} \begin{vmatrix} 1 & \dots 1 \\ A_{m,0,7,5} & \dots A_{m,\mu'-2,7,5} \\ \dots & \dots \\ A_{m'0,2\mu'+1,5} & \dots A_{m,\mu'-2,2\mu'+1,5} \end{vmatrix} = \dots = (-1)^{\sigma'} \cdot 2^{\tau'} \cdot A_{m,0,2\mu'+1,2\mu'+1}.$$

Ma

$$\sigma' = \frac{\mu'(\mu'+5)}{2} \equiv \frac{\mu'(\mu'+1)}{2} (\text{mod. } 2), \qquad \tau' = (\mu'+1)^2, \qquad A_{m,0,2\mu'+1,2\mu'+1} = 2^{2\mu'+1};$$

quindi

$$D' = (-1)^{\left(\frac{\mu'+1}{2}\right)} \cdot 2^{\left[\frac{m^2}{4}\right]}.$$

Se m è dispari, è $\mu' = m - (\mu'+1)$, e però

$$2A_{m,\mu',2\rho+1} = A_{m,\mu',2\rho+1} - A_{m,\mu'+1,2\rho+1} = A_{m,\mu',2\rho+1,1}$$

Ne segue, moltiplicando per 2 gli elementi dell' ultima colonna di D' ed operando col simbolo $(1, -1)$ su quelli delle altre,

$$D' = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} A_{m,0,1,1} & A_{m,1,1,1} & \dots A_{m,\mu',1,1} \\ A_{m,0,3,1} & A_{m,1,3,1} & \dots A_{m,\mu',3,1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{m,0,2\mu'+1,1} & A_{m,1,2\mu'+1,1} & \dots A_{m,\mu',2\mu'+1,1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots 1 \\ A_{m,0,3,1} & A_{m,1,3,1} & \dots A_{m,\mu',3,1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{m,0,2\mu'+1,1} & A_{m,1,2\mu'+1,1} & \dots A_{m,\mu',2\mu'+1,1} \end{vmatrix}.$$

Operando ora ripetutamente sulla penultima colonna col simbolo $(2, -2)$ e sulle precedenti con $(1, -1)$, si avrà, ricordando la seconda delle (11), successivamente

$$D' = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots 0 & 1 \\ A_{m,0,3,3} & A_{m,1,3,3} & \dots A_{m,\mu'-1,3,3} & A_{m,\mu',3,3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m,0,2\mu'+1,3} & A_{m,1,2\mu'+1,3} & \dots A_{m,\mu'-1,2\mu'+1,3} & A_{m,\mu',2\mu'+1,3} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\mu'+2}\, 2^{3-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ A_{m,0,5,3} & A_{m,1,5,3} & \dots A_{m,\mu'-1,5,3} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{m,0,2\mu'+1,3} & A_{m,1,2\mu'+1,3} & \dots A_{m,\mu'-1,2\mu'+1,3} \end{vmatrix},$$

e però, proseguendo,

$$D' = (-1)^{\sigma'} \cdot 2^{\tau'} A_{m,0,2\mu'+1,2\mu'+1}.$$

Ma

$$\sigma' \equiv \frac{\mu'(\mu'+1)}{2} \pmod{2}, \quad \tau' = \mu'(\mu'+2), \quad A_{m,0,2\mu'+1,2\mu'+1} = 2^{2\mu'+1};$$

quindi

$$D' = (-1)^{\binom{\mu'+1}{2}} \cdot 2^{\left[\frac{m^2}{4}\right]}.$$

Dunque, in ogni caso, *il valore del determinante* D' *è la potenza di* 2 *che ha per esponente il massimo intero contenuto in* $\frac{m^2}{4}$, *ed il cui segno è* $+$ *o* $-$ *secondochè è pari o dispari* $\binom{\mu'+1}{2}$. Ne segue che, per m dispari, è $D = D'$, e, per m pari, $D = (-1)^{\mu} D'$, perchè allora è $\mu = \mu' + 1$, e quindi $\binom{\mu+1}{2} = \binom{\mu'+1}{2} + \mu$.

9. Introducendo simboli più generali di $A_{m,n,l,\nu}$, possono farsi delle utili applicazioni al calcolo di altri determinanti funzioni delle $A_{m,n,l}$. Considerando, per esempio, il simbolo $B_{m,n,l,\nu} = \sum_{\rho=0}^{\rho=\nu} (-1)^{\rho} \binom{\nu}{\rho} A_{m,n+2\rho,l}$, per $n + 2\nu \leq m$ e ν positivo

o nullo, si ha, analogamente a quanto s'è detto nei §§ 4, 5, 6,

$$(n \leq \mu - 2l + 1) \quad B_{m,n,l,\nu} = 2^{2l}, \quad (n < \mu - 2l - 1) \quad B_{m,n,l,\nu} = 0 \text{ per } \nu > l, \text{ ecc.};$$

e però è facile trovare che, per $m = 4t$, è

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{m,0,0} & A_{m,2,0} & \dots & A_{m,\mu,0} \\ A_{m,0,2} & A_{m,2,2} & \dots & A_{m,\mu,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m,0,\mu} & A_{m,2,\mu} & \dots & A_{m,\mu,\mu} \end{vmatrix} = (-1)^{t+\frac{t(t-1)}{2}} \cdot 2^{t(2t-1)},$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} A_{m,1,0} & A_{m,3,0} & \dots & A_{m,\mu',0} \\ A_{m,1,2} & A_{m,3,2} & \dots & A_{m,\mu',2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m,1,\mu'-1} & A_{m,3,\mu'-1} & \dots & A_{m,\mu',\mu'-1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{t(t-1)}{2}} \cdot 2^{2t(t-1)}$$

Questi determinanti si presentano immediatamente quando, pel calcolo di D, sempre nell'ipotesi di $m = 4t$, si tiene una via diversa da quella tenuta nel § 8. Ed infatti, per la (2), sommando gli elementi della prima orizzontale di D con i corrispondenti dell'ultima, quelli della seconda coi corrispondenti della penultima, ecc., si ha, sottraendo poi dagli elementi dell'ultima orizzontale del determinante che si ottiene i corrispondenti della prima, divisi per 2, da quelli della penultima i corrispondenti della seconda, divisi per 2, ecc.,

$$D = 2^t \begin{vmatrix} A_{m,0,0} & 0 & A_{m,2,0} & 0 & \dots & A_{m,2t,0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m,0,2t} & 0 & A_{m,2,2t} & 0 & \dots & A_{m,2t,2t} \\ 0 & A_{m,1,2t+2} & 0 & A_{m,3,2t+2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & A_{m,1,4t} & 0 & A_{m,3,4t} & \dots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\alpha+\alpha'} 2^t \Delta \cdot \Delta',$$

essendo $\alpha = 1 + 2 + \dots + (t-1) + 1 + 3 + \dots + (2t+1) \equiv \frac{t(t+1)}{2} \pmod{2}$, $\alpha' = t + \frac{t(t-1)}{2}$.

Per $m = 4t + 2$, si trova invece,

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{m,0,0} & A_{m,2,0} & \dots & A_{m,\mu',0} \\ A_{m,0,2} & A_{m,2,2} & \dots & A_{m,\mu',2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m,0,\mu'} & A_{m,2,\mu'} & \dots & A_{m,\mu',\mu'} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{t(t+1)}{2}} \cdot 2^{2t(t+1)},$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} A_{m,1,0} & A_{m,3,0} & \dots & A_{m,\mu,0} \\ A_{m,1,2} & A_{m,3,2} & \dots & A_{m,\mu,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m,1,\mu'} & A_{m,3,\mu'} & \dots & A_{m,\mu,\mu'} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{t(t+1)}{2}} \cdot 2^{(2t+1)t}.$$

Napoli, agosto 1903.

NOTE ON ABELIAN GROUPE

BY

G. A. MILLER

(*Stanford University Californ*)

The theorem published by Vincenzo D'Escamard, « Giornale di Matematiche di Battaglini », vol. 41, (1903) p. 203 is found in the Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 9, (1903) p. 295. It is also found in the « Annals of Mathematics », vol. 4, (1903) p. 189. In the latter place a complete and very simple proof is given.

Both of these publications, especially the former, are somewhat earlier than that of D'Escamard. It is very singular that such an elementary theorem shoud not have been given in a clear and explicit form before. What seems still more remarkable is the fact that a number of different men shoud have discovered it independently at almost the same time, for H. L. Riety communicated the same theorem to me before he had seen it in a journal.

Con piacere diamo pubblicità alla comunicazione, qui sopra riportata, del signor Miller. Al tempo stesso siamo lieti di poter dichiarare che il teorema del Dott. d'Escamard è stato estratto dalla tesi di laurea che il medesimo ha presentato alla facoltà di Matematiche della Università di Napoli nel mese di Giugno 1902, cioè allo incirca un anno prima della sua pubblicazione in questo giornale.

Nota della Direzione

SULLE SUPERFICIE DI RIEMANN

CON DATI PUNTI DI DIRAMAZIONE

MEMORIA

DI

A. HURWITZ

(*in Zurigo*)

VERSIONE ITALIANA DI ALBERTO BRAMBILLA

con note dell' Autore.

Dai Math. Annalen, vol. 39.

(*Contin. e fine, v. vol.* XXXI, *pag.* 229-270)

PARTE TERZA

QUESTIONI DI REALITÀ.

§ 1.

Superficie Riemanniane coniugate.

Imaginiamo nel piano E dei numeri complessi w punti qualunque $a_1, a_2, \ldots, a_w$, da un punto qualunque O tiriamo a questi (come nel § 1, parte I) le linee $l_1, l_2, \ldots, l_w$ e consideriamo una qualunque delle superficie Riemanniane

$$(1) \qquad \begin{pmatrix} l_1, & l_2, & \ldots, & l_w \\ S_1, & S_2, & \ldots, & S_w \end{pmatrix}$$

che sono diramate in $a_1, a_2, \ldots, a_w$. Costruendo la figura simmetrica di questa superficie rispetto all' asse reale del piano E, ne nasce una nuova superficie $\overline{F}$, che diremo superficie *coniugata* di F.

Se per questa simmetria i punti $a_1, a_2, \ldots, a_w$ e le linee $l_1, l_2, \ldots, l_w$ si

trasformano rispettivamente in $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_w}$ ed $\overline{l_1}, \overline{l_2}, \ldots, \overline{l_w}$, sarà, come ci

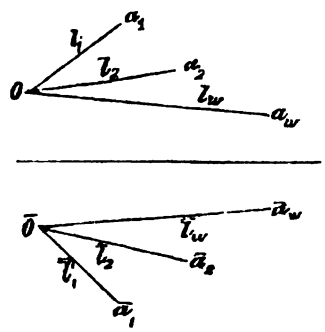


fig. 7.

si convince senza difficoltà (cfr. fig. 7),

$$(2) \qquad \overline{F} = \begin{pmatrix} \overline{l_w} & , \overline{l_{w-1}} & , \ldots , \overline{l_2} & \overline{l_1} \\ S_w^{-1} & , S_{w-1}^{-1} & , \ldots , S_2^{-1} & S_1^{-1} \end{pmatrix}.$$

Le superficie $\overline{F}$ ed F sono riferite una all' altra in modo univoco e *conforme*; però la *conformità* è tale, per cui ha luogo un rovesciamento dell' angolo. A schiarimento si osservi quanto segue. Se i punti del piano E rappresentano i valori della variabile complessa x, e la superficie F è definita dall'equazione algebrica $f(y, x) = 0$, la equazione $\overline{f}(y, x) = 0$ definirà la superficie $\overline{F}$, quando $\overline{f}(y, x)$ sia dedotta da $f(y, x)$ sostituendo ciascun coefficiente della ultima funzione col proprio valore imaginario coniugato.

Se la superficie F coincide colla propria coniugata $\overline{F}$, essa è «simmetrica» nel senso del signor Klein (¹). (L' equazione $f(y, x) = 0$ può allora esser scelta in modo che essa possieda coefficienti reali).

Questo caso può avvenire soltanto, se i valori $a_1, a_2, \ldots, a_w$ sono in parte reali, in parte imaginari a coppie coniugati.

Noi supporremo che i valori $a_1, a_2, \ldots, a_w$ soddisfacciano a questa condizione, e, precisamente, che la successione di questi valori sia scelta in guisa che riescano coniugati

$$\begin{array}{lll} a_1 & \text{ed} \quad a_w & = \overline{a_1}, \\ \overline{a_2} & \text{ed} \quad a_{w-1} & = \overline{a_2}, \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ a_\mu & \text{ed} \quad a_{w-\mu-1} & = \overline{a_\mu}, \end{array}$$

(¹) " Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale ", pag. 72.

mentre

$$a_{\mu+1} = b_1 \quad , \quad a_{\mu+2} = b_2 \; , \; . \; . \; . \; , \; a_{\mu+\rho} = b_\rho$$

sono reali. I punti di diramazione sono quindi

$$(3) \qquad a_1 \; , \; . \; . \; . \; , \; a_\mu \quad , \quad b_1 \; , \; . \; . \; . \; , \; b_\rho \quad , \quad \overline{a_\mu} \; , \; . \; . \; . \; , \; \overline{a_1}.$$

Supponiamo inoltre

$$b_1 > b_2 > \; . \; . \; . \; > b_\rho \, ,$$

scegliamo il punto O sull' asse reale, e propriamente in guisa che sia $0 > b_1$, e tiriamo finalmente le linee $l_1 \, , l_2 \, , \ldots , l_w$ per modo che $l_1 \, , l_2 \, , \ldots , l_\mu$, per simmetria rispetto all' asse reale si trasformino in (cfr, fig. 8)

$$l_w = \overline{l_1} \quad , \quad l_{w-1} = \overline{l_2} \, , \ldots , l_{w-\mu+1} = \overline{l_\mu}.$$

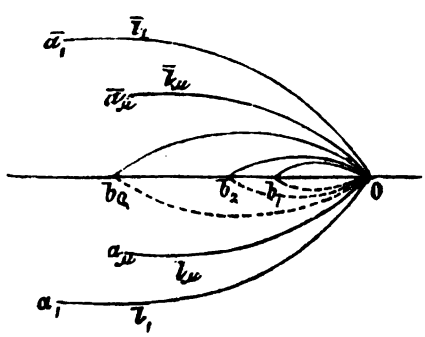


fig. 8.

Fissando una volta per sempre questo sistema di linee, noi possiamo indicare la superficie (1) brevemente con

$$F = (S_1 \; , \; S_2 \; , \; . \; . \; . \; , \; S_w) \, ,$$

oppure, alterando un poco la notazione delle sostituzioni, con

$$(4) \qquad F = (S_1 \, , \ldots , S_\mu \; , \; T_1 \, , \ldots , T_\rho \; , \; \Sigma_\mu \, , \ldots , \Sigma_1).$$

Se ora riferiamo al medesimo sistema di linee la superficie coniugata $\overline{F}$, troviamo

$$(5) \qquad \overline{F} = (\overline{S}_1 \; , \ldots , \; \overline{S}_\mu \, , \overline{T}_1 \; , \ldots , \; \overline{T}_\rho \, , \overline{\Sigma}_\mu \; , \ldots , \; \overline{\Sigma}_1)$$

dove, per brevità, si sono posti

$$(6)\quad \begin{cases} \bar{S}_1 = \Sigma_1^{-1}, \ldots, \bar{S}_\mu = \Sigma_\mu^{-1} \ ; \ \bar{T}_k = U_k^{-1} T_k^{-1} U_k \ , \ (k = 1,2, \ldots, \rho), \\ \bar{\Sigma}_1 = S_1^{-1}, \ldots, \bar{\Sigma}_\mu = S_\mu^{-1} \ ; \ U_k = T_k . T_{k+1} \ldots T_\rho, (k = 1,2, \ldots, \rho). \end{cases}$$

Ciò si conferma sulla scorta della fig. 8. La condizione perchè le superficie (4) e (5) siano una sola, consiste ora nella trasformabilità di uno nell' altro dei due corrispondenti sistemi di sostituzioni. In riguardo alle (6) si ha quindi, dietro facile calcolo, il teorema:

La superficie Riemanniana è coniugata a sè medesima quando, e soltanto allora che, esista una sostituzione U *soddisfacente alle equazioni*

$$(7)\quad \begin{cases} S_i U \Sigma_i = \Sigma_i U S_i = U \ , \ (i = 1,2, \ldots, \mu), \\ U_k U U_k = U \ , \ (k = 1,2, \ldots, \rho), \end{cases}$$

dove, per brevità, si è posto

$$(8)\quad T_\rho = U_\rho \ , \ T_{\rho-1} T_\rho = U_{\rho-1} T_{\rho-2} T_{\rho-1} T_\rho = U_{\rho-2}, \ldots, T_1 T_2 \ldots T_\rho = U_1.$$

Consideriamo un qualunqne punto P sull'asse reale e diciamo $P_1, P_2, \ldots, P_n$ gli n punti della superficie Riemanniana (h) situati su P, cosicchè per la trasformazione simmetrica della superficie questi punti subiscono una permutazione, corrispondendo ai punti

$$P_1, P_2, \ldots, P_n$$

i medesimi punti, ma eventualmente in ordine diverso:

$$P_{\alpha_1}, P_{\alpha_2}, \ldots, P_{\alpha_n}.$$

La sostituzione

$$(9)\quad V = \begin{pmatrix} 1 & , & 2 & , & \ldots & , & n \\ \alpha_1 & , & \alpha_2 & , & \ldots & , & \alpha_n \end{pmatrix}$$

possederà il periodo *due*, perchè una ripetizione della trasformazione simmetrica conduce alla identità.

Se designiamo con

$$(10)\quad (0), (1), (2), \ldots, (\rho)$$

i segmenti

$$b_\rho 0, 0 b_1, b_1 b_2, \ldots, b_{\rho-1} b_\rho$$

nei quali viene diviso l'asse reale dai punti $0, b_1, b_2, \ldots, b_{\rho-1}, b_\rho$, troviamo per la sostituzione V rispettivamente

$$(11) \qquad V = U\ ,\ V = U_1 U\ ,\ V = U_2 U\ ,\ \ldots\ ,\ V = U_\rho U\ ,$$

secondo che il punto P sia stato preso sul segmento (0), oppure sul segmento (1) o sopra (2), . . . , ovvero sovra (ρ). Le equazioni

$$(12) \qquad U^2 = 1\ ,\ (U_1 U)^2 = 1\ ,\ (U_2 U)^2 = 1\ ,\ \ldots\ ,\ (U_\rho U)^2 = 1$$

sono, come facilmente si riconosce, in accordo colle equazioni (7).

Le sostituzioni (11) servono anzitutto per determinare in qual modo si connettano i singoli segmenti dell' asse reale alle linee di passaggio [1] della superficie F.

Osserviamo ancora che le equazioni (7) si potrebbero rimpiazzare colle equazioni (12) e colle equazioni

$$(13) \qquad S_i U \Sigma_i = U\ ,\quad (i = 1, 2, \ldots, \mu).$$

§ 2.

Superficie con punti semplici di diramazione a due a due imaginarii conjugati.

Se consideriamo le superficie Riemanniane ad n fogli coi dati punti di diramazione

$$a_1\ ,\ a_2\ ,\ \ldots\ ,\ a_w$$

esse, in parte saranno coniugate a sè medesime, ed in parte saranno a coppie coniugate l' una all' altra, qualora supponiamo che $a_1, a_2, \ldots, a_w$ siano in parte reali ed in parte imaginari a coppie coniugati. (Se facessimo dipendere la determinazione di quelle superficie da una equazione algebrica, per opportuna scelta delle incognite, corrisponderebbero alle superficie autoconiugate le radici reali dell' equazione).

Le considerazioni dei paragrafi precedenti ci pongono in grado di poter distinguere le superficie coniugate a sè stesse dalle rimanenti e di distinguerle in gruppi in corrispondenza alle diverse specie di linee di passaggio.

Io non posso qui dare lo svolgimento generale delle ricerche a ciò necessarie; piuttosto mi devo appagare di discutere i punti essenziali in un caso semplice.

Sia questo il caso, in cui i $w = 2\mu$ valori di diramazione siano imaginari a

---

[1] Vedi Klein, l. c.

coppie coniugati, come fosse

$$a_w = \bar{a}_1 \ , \ a_{w-1} = \bar{a}_2 \ , \ \ldots \ , \ a_{\mu+1} = \bar{a}_\mu$$

ed in cui, inoltre, considereremo soltanto quelle superficie che nei punti $a_1, a_2, \ldots, a_w$ sono diramate semplicemente.

Queste superficie sono, per la fissazione delle linee

$$l_1 \ , \ l_2 \ , \ \ldots \ , \ l_\mu \ , \ \bar{l}_\mu \ , \ \ldots \ , \ \bar{l}_2 \ , \ \bar{l}_1 \ ,$$

coordinate una ad una ai sistemi di $w = 2\mu$ trasposizioni

$$(1) \qquad t_1 \ , \ t_2 \ , \ \ldots \ , \ t_\mu \ , \ \tau_\mu \ , \ \ldots \ , \ \tau_2 \ , \ \tau_1$$

le quali soddisfano alle condizioni più volte menzionate (cfr. Parte prima, § 1). Ad un sistema corrisponde una superficie autoconiugata, se le equazioni

$$(2) \qquad \tau_1 = \mathrm{U} t_1 \mathrm{U} \ , \ \tau_2 = \mathrm{U} t_2 \mathrm{U} \ , \ldots , \ \tau_\mu = \mathrm{U} t_\mu \mathrm{U} \ , \ \mathrm{U}^2 = 1$$

possono essere soddisfatte da una sostituzione U. Una superficie autoconiugata potrà quindi essere già caratterizzata mediante il sistema delle $\mu + 1$ sostituzioni

$$(3) \qquad t_1 \ , \ t_2 \ , \ \ldots \ , \ t_\mu \ , \ \mathrm{U} \ ,$$

e, corrispondentemente potrà indicarsi con

$$(4) \qquad \mathrm{F} = (t_1 \ , \ t_2 \ , \ \ldots \ , \ t_\mu \ , \ \mathrm{U}).$$

Ora, le condizioni, cui deve soddisfare il sistema (1), si traducono pel sistema (3) nel seguente modo. In primo luogo, in corrispondenza alla condizione

$$t_1 t_2 \ldots t_\mu \tau_\mu \ldots \tau_2 \tau_1 = 1,$$

deve essere

$$(5) \qquad \mathrm{T}\mathrm{U} = \mathrm{U}\mathrm{T} \ ,$$

quando si ponga, per brevità,

$$(6) \qquad \mathrm{T} = t_1 t_2 \ldots t_\mu .$$

Inoltre, poichè mediante

$$t_1 \ , \ t_2 \ , \ \ldots \ , \ t_\mu \ , \ \mathrm{U} t_1 \mathrm{U} \ , \ \ldots \ , \ \mathrm{U} t_\mu \mathrm{U}$$

deve esser possibile un passaggio da ogni elemento ad ogni altro, le sostituzioni (3) mettono tutti gli elementi l'un l'altro in relazione, ossia, il chè è lo stesso, le sostituzioni (3) devono generare un gruppo transitivo. Allora si osservi come non possa ad un tempo

$$U_1 = (a_1\, b_1)\,(a_2\, b_2)\, \ldots \left(a_{\frac{n}{2}}\, b_{\frac{n}{2}}\right)$$

con una parte $t_1, \ldots, t_\mu$ delle trasposizioni essere capace di porre in relazione fra loro soltanto gli elementi $a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{n}{2}}$, e, con un' altra parte, di mettere in relazione soltanto gli elementi $b_1, b_2, \ldots, b_{\frac{n}{2}}$. Perchè altrimenti

$$t_1, \ldots, t_\mu, Ut_1U, \ldots, Ut_\mu U$$

collegherebbero soltanto gli elementi a tra loro e soltanto gli elementi b tra loro. Si riconosce ora senza difficoltà, che queste condizioni necessarie per il sistema (3), sono anche sufficienti. In altri termini:

Le superficie F coniugate a sè stesse sono coordinate una ad una ai sistemi (3) che pongono in relazione tutti gli elementi (ossia che generano un gruppo transitivo) e che soddisfano alle equazioni

$$(7) \qquad U^2 = 1\,,\ TU = UT\,,$$

dove si è posto

$$T = t_1\, t_2\, \ldots\, t_\mu.$$

In ciò sono da escludere (nel caso di n pari) quei sistemi, per i quali

$$U = (a_1\, b_1)\, \ldots \left(a_{\frac{n}{2}}\, b_{\frac{n}{2}}\right) \quad \text{e} \quad t_1, t_2, \ldots, t_\mu$$

colleghino tra loro soltanto gli elementi b [1]. Del resto sono naturalmente da considerarsi come non diversi tra loro i sistemi (3) trasformabili tra loro.

L' espressione generale di una sostituzione U, che soddisfa all' equazione $U^2 = 1$, è evidentemente questa:

$$(8) \qquad U = (a_1\, b_1)\,(a_2\, b_2)\, \ldots\, (a_r\, b_r)\,(c_1)\,(c_2)\, \ldots\, (c_s)\,,$$

dove $a_1, a_2, \ldots, a_s, b_1, b_2, \ldots, b_r, c_1, c_2, \ldots, c_s$ indicano gli n elementi in

---

[1] È questo cioè l'*unico* caso, in cui il gruppo generato mediante $t_1, t_2, \ldots, t_{\mu-1}, U$ è transitivo, mentre il gruppo generato da $t_1, \ldots, t_\mu, Ut_1U, \ldots, Ut_\mu U$ è intransitivo.

un ordine qualunque di successione. Qui sono r ed s due interi qualunque non negativi che soddisfano all' equazione

$$s + 2r = n.$$

Per il caso di $r = 0$, U si riduce alla identità.

Significhino ora α_i e β_i i due elementi a_i e b_i in un qualunque ordine di successione, cosicchè sia quindi $\alpha_i = a_i$ e $\beta_i = b_i$, oppure $\alpha_i = b_i$ e $\beta_i = a_i$. Allora

$$(9) \qquad T = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & a_2 & b_2 & \dots & a_r & b_r \\ \alpha_{i_1} & \beta_{i_1} & \alpha_{i_2} & \beta_{i_2} & \dots & \alpha_{i_r} & \beta_{i_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & , c_2 & , \dots , & c_s \\ c_{k_1} & , c_{k_2} & , \dots , & c_{k_s} \end{pmatrix}$$

rappresenterà la più generale sostituzione permutabile con U, essendo $i_1, i_2, \dots i_r$, e $k_1, k_2, \dots, k_s$, rispettivamente gli indici $1, 2, \dots, r$ ed $1, 2, \dots, s$ in un ordine qualunque di successione

Quelle superficie autoconiugate, per le quali sono U e T le medesime sostituzioni, noi le ascriveremo ad una classe [U, T]. Ogni superficie appartenente alla classe [U, T] possiede tante linee di passaggio, quanti cicli ha la sostituzione

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & , \dots , & c_s \\ c_{k_1} & c_{k_2} & , \dots , & c_{k_s} \end{pmatrix}.$$

Poichè i punti dell' asse reale, che giacciono nei fogli $c_1, c_2, \dots, c_s$, rimangono fissi per la trasformazione simmetrica e per un valico dal punto O, da cui escono le linee $l_1, l_2, \dots, l_w, \bar{l}_w \dots, \bar{l}_2, \bar{l}_1$, i fogli della superficie subiscono precisamente la sostituzione $t_1 t_2 \dots t_\mu = T$.

Il numero delle superficie appartenenti alla classe [U, T], noi lo troviamo determinando il numero delle soluzioni di

$$(10) \qquad t_1 t_2 \dots t_\mu = T$$

dovendosi tuttavia soltanto tener conto di quelle soluzioni, che rispondono alle condizioni date più sopra. La determinazione di questo numero si può effettuare mediante considerazioni simili a quelle che abbiamo impiegate nella Prima Parte. Per altro io ho studiato più da vicino il solo caso di

$$w = 2\mu = 2n - 2,$$

nel quale si tratta perciò delle superficie di genere *zero*, e voglio qui comunicare i risultati ottenuti.

§ 3.

Superficie di genere zero.

Considerando gli assi reali negli n fogli di una superficie Riemanniana, essi comporranno una o più linee chiuse. Queste linee, io le chiamerò « *linee di realità* ». Le medesime si possono incontrare, o scambievolmente od ognuna con sè stessa, soltanto nei punti di diramazione. Se nessuno dei punti di diramazione è reale, le singole linee di realità si compongono degli assi di certi fogli, ciascun asse preso in tutta la sua estensione. Il numero di questi assi può allora chiamarsi la *multiplicità* della linea di realità. La molteplicità indica manifestamente quante volte si trova il singolo valor reale sopra la linea di realità.

Sopra una superficie autoconiugata, le linee di passaggio appartengono alle linee di realità. Quelle linee di realità le quali non sono di passaggio, o saranno autosimmetriche o saranno simmetriche due a due reciprocamente.

Se consideriamo adesso una superficie autoconiugata di genere *zero*, i cui $w = 2\mu$ valori di diramazione siano imaginari a due a due coniugati, si presentano i soli casi seguenti di possibilità:

1) Esiste una linea di passaggio, la quale, come linea di realità possiede la multiplicità s. Si hanno inoltre $2\mu_1$, $2\mu_2$, $2\mu_3$, ..., linee di realità simmetricamente accoppiate rispettivamente delle multiplicità 1, 2, 3, ...

La superficie la chiameremo, in questo caso, del « carattere »

$$(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots).$$

I « caratteri » μ_1, μ_2, ..., possono avere valori qualunque, interi, non negativi e che soddisfino all'equazione

$$s + 2(\mu_1 + 2\mu_2 + 3\mu_3 + \ldots) = n.$$

2) Non esiste alcuna linea di passaggio; ma si ha al contrario una linea di realità autosimmetrica di multiplicità 2ρ, ed inoltre $2\mu_1$, $2\mu_2$, $2\mu_3$, ... linee di realità simmetricamente accoppiate di multiplicità 1, 2, 3, ...

In questo caso la superficie si dirà di carattere

$$(\rho\,;\ \mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots).$$

I « caratteri » ρ, μ_1, μ_2, μ_3, ... possono avere valori qualunque, interi, non negativi e che soddisfino l'equazione

$$s\rho + 2(\mu_1 + 2\mu_2 + 3\mu_3 + \ldots) = n.$$

Per il numero ρ è escluso il valor *zero*. I summenzionati risultati relativi a computi di numeri, io riassumo nel seguente teorema:

Tra le superficie Riemanniane ad n *fogli di genere* zero *con date coppie coniugate di valori di diramazione, ne esistono*

$$(n-1)!\,(r+s)^{\lambda-2}\cdot\frac{s^s}{s!}\cdot\prod_k\frac{1}{\mu!}\left(\frac{k^{2k-1}}{k!\,k!}\right)^{\mu_k},\ (k=1,2,3,\ldots),$$

di autoconiugate di carattere $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots)$.

Per brevità qui si è posto

$$\mu_1+\mu_2+\mu_3+\ldots=\lambda,$$

$$\mu_1+2\mu_2+3\mu_3+\ldots=r,$$

e sussiste inoltre l'equazione

$$s+2r=n.$$

Nel caso di n *pari, si hanno poi, tra quelle superficie,*

$$(n-1)!\,(r+\rho)^{\lambda-2}\cdot\frac{(2\rho)^{2\rho}}{(2\rho)!}\cdot\prod_k\frac{1}{\mu!}\left(\frac{k^{2k-1}}{k!\,k!}\right)^{\mu_k},\ (k=1,2,3,\ldots)$$

superficie autoconiugate di carattere $(\rho\,;\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots)$, *dove, per brevità, si sono posti*

$$\mu_1+\mu_2+\mu_3+\ldots=\lambda,$$

$$\rho+\mu_1+2\mu_2+3\mu_3+\ldots=r=\frac{n}{2}\cdot$$

PARTE QUARTA

DETERMINAZIONE ANALITICA DELLE SUPERFICIE A TRE ED A QUATTRO FOGLI.

Nei casi di $n=3$ ed $n=4$ si riesce, come ha mostrato il signor Thomae [1], coll' aiuto delle funzioni ϑ, a costruire una tale funzione algebrica ad n valori, i cui w valori di diramazione siano dati. Ora il numero delle superficie Riemanniane ad n fogli (cfr. Parte Prima, § 5) nei casi $n=3$ ed $n=4$ rispettivamente ammonta ad

$$N=\frac{3^{w-2}-1}{2}\quad\text{ed}\quad N=(2^{w-4}-1)\frac{3^{w-2}-1}{2},$$

---

[1] Math. Annalen, vol. 6, pag. 612 e vol. 18, pag. 443.

ed altrettante funzioni algebriche diverse devono effettivamente esistere in questi casi (secondo i *teoremi di esistenza* di Riemann) (¹).

Mi sembra ora interessante il cercare se, tenendo il cammino del signor Thomae, si ottenga esattamente il numero N di funzioni.

Che appunto sia così, voglio mostrarlo in ciò che segue. Io esporrò qui al tempo stesso il procedimento del signor Thomae in modo più conveniente allo scopo attuale.

§ 1.

Relazione di una superficie ad n fogli con una a due fogli.

Sia data una superficie Riemanniana F ad n fogli e di genere p con

$$w = 2p + 2n - 2$$

punti di diramazione. Tirando, come prima, da un punto O le linee $l_1, l_2, \ldots, l_w$ ai punti di diramazione, designiamo la superficie mediante le trasposizioni $t_1, t_2, \ldots, t_w$ corrispondenti a queste linee, ponendo

$$F = (t_1, t_2, \ldots, t_w).$$

Se facciamo l'ipotesi che esista una funzione algebrica y diramata come questa superficie, i valori $y_1, y_2, \ldots, y_n$ di questa funzione, che si trovano in punti sovrapposti degli n fogli, subiscono precisamente la trasposizione t_i, quando giriamo intorno al punto i^{mo} di diramazione.

Collochiamo adesso sotto la superficie F una superficie F' a due fogli (quindi iperellittica) coi medesimi w punti di diramazione. Se t denota l'unica trasposizione possibile fra due elementi, la superficie F' si indicherà con

$$F' = (t, t, \ldots, t).$$

È evidente che esistono funzioni diramate come F': tale è, p. es., la funzione

$$y = \sqrt{(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_w)}$$

dove $a_1, a_2, \ldots a_w$ indicano i valori di diramazione.

In un punto qualunque della F' deponiamo i valori $y_1, y_2, \ldots, y_n$ giacenti nel medesimo punto sopra la superficie F, e lasciamoceli costantemente, mentre facciam muovere il posto sulla F'.

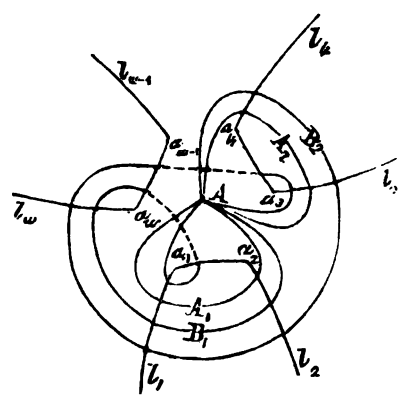
(¹) Questi teoremi, che in seguito non presupporrò, sono stati dimostrati, come è noto, dai signori Neumann e Schwarz.

Se giriamo intorno ad un punto arbitrariamente scelto sulla superficie F', i valori $y_1, y_2, \ldots, y_n$ si trasformano ognuno in sè stesso. Ciò è evidente senz' altro se il punto non è di diramazione. Ma, se il punto fosse di diramazione, un giro intorno ad esso sopra la superficie F' richiederebbe un doppio giro nel piano della x, epperò, anche in questo caso, ognuno dei valori $y_1, y_2, \ldots, y_n$ si riprodurrebbe. Ciò potrà esprimersi dicendo:

Una funzione algebrica y *diramata come la superficie* F *è, sopra la superficie iperellittica* F', *bensì plurivalente* (*cioè* n *valente*), *ma non diramata.*

Se tagliamo la superficie F' in una semplicemente connessa, e proseguiamo su questa uno degli n valori di y con continuità, a partire da un qualunque posto, otteniamo un ramo univoco della funzione y.

Gli n rami della funzione y, coll' attraversare un taglio, subiscono allora una determinata permutazione. Si ottiene una superficie sulla quale y è ad un sol valore, sovrapponendo n esemplari della superficie tagliata F' e connettendoli lungo ciascun orlo corrispondentemente alla permutazione ad esso relativa.



(fig. 9)

Dovranno adesso determinarsi queste permutazioni nella ipotesi di un determinato ritaglio della superficie F' (²). La linea chiusa L si condurrà come prima per i punti $a_1, a_2, \ldots, a_w$ in modo che le linee $l_1, l_2, \ldots, l_w$ scorrano interamente in una parte G del piano, che sia limitata da L. I due fogli della superficie F' si vengano a connettere lungo i tratti $a_1 a_2, a_3 a_4, \ldots, a_{w-1} a_w$ della linea L.

Assumiamo ora nella parte G' del piano un punto A, e facciamo incominciare e finire i tagli in esso. Corrispondentemente ad ogni linea di passaggio

$$a_{2i-1}\, a_{2i}\,, \left(i = 1, 2, \ldots, \mu = \frac{w}{2} - 1\right)$$

(²) Cfr. per ciò che segue la fig. 9.

conduciamo due tagli A_i, B_i. Il taglio A_i scorre interamente sul foglio superiore e circonda i punti a_{2i-1} a_{2i}. Il taglio B_i incomincia sul foglio superiore, passa, attraverso il punto a_{2i-1}, nel foglio sottostante, scorre in questo fino alla linea di passaggio $a_{w-1}\, a_w$, passa allora nuovamente nel foglio superiore, nel quale stesso, attraversando le linee l_w, l_1, l_2, ..., l_{2i} raggiunge di nuovo il punto A.

Colla introduzione di questi tagli

$$A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots, A_\mu, B_\mu, \left(\mu = \frac{w}{2} - 1\right),$$

la superficie F' è trasformata in una semplicemente connessa.

Il taglio B_i conduce dal lato positivo al negativo di A_i, il taglio A_i ci porta dal lato negativo al positivo di B_i. Se in verso positivo si circonda il punto A sul foglio superiore, si incontrano i tagli nel seguente ordine di successione:

$$A_1^+B_1^+A_1^-B_1^-A_2^+B_2^+A_2^-B_2^- \ldots A_\mu^+B_\mu^+A_\mu^-B_\mu^-;$$

qui gli indici + e − indicano che il passaggio avviene rispettivamente dal lato negativo al positivo e dal lato positivo al negativo.

Consideriamo adesso sopra la superficie tagliata F' gli n rami $y_1, y_2, \ldots, y_n$ della funzione y, di cui ognuno singolarmente è univocamente disteso sulla superficie ritagliata. Se indicano $y_1, y_2, \ldots, y_n$ i valori assunti dagli n rami in un punto P del lato negativo di una delle linee A_i, B_i, e se inoltre sono $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$ i valori presi nel medesimo P sul lato positivo della relativa linea, i valori $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$ differiranno dai valori $y_1, y_2, \ldots, y_n$ soltanto per l'ordine di successione.

Col passaggio di quella linea dal lato negativo al lato positivo i rami subiscono la sostituzione

$$S = \begin{pmatrix} y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix},$$

cioè si perviene dal ramo y'_k al ramo y_k ($k = 1, 2, \ldots, n$). Poichè la linea A_i conduce dal lato negativo al positivo della linea B_i, così otteniamo la sostituzione S corrispondente a B_i, determinando quale permutazione subiscono $y_1, y_2, \ldots, y_n$ per il percorso della linea A_i.

Similmente determiniamo la sostituzione corrispondente ad A_i, stabilendo come si permutano $y_1, y_2, \ldots, y_n$ per il percorso della linea B_i.

In questo modo noi troviamo le seguenti sostituzioni corrispondenti alle linee $A_1, B_2, \ldots, A_\mu, B_\mu$:

Formiamo colle trasposizioni $t_1, t_2, \ldots, t_w$ le seguenti sostituzioni:

$$\begin{aligned}
S_1 &= t_1\, t_2\, t_3 \ldots\ldots t_{w-1} = t_w \\
S_2 &= \quad t_2\, t_3 \ldots\ldots t_{w-1} = t_1\, t_w \\
S_3 &= \qquad t_3 \ldots\ldots t_{w-1} = t_2\, t_1\, t_w \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
S_{w-1} &= \qquad\qquad\quad t_{w-1} = t_{w-2} \ldots t_2\, t_1\, t_w.
\end{aligned}$$

Per il passaggio dal lato negativo al positivo, gli n *rami* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *subiscon quindi*

$$\textit{lungo } A_i, \textit{ la sostituzione } S^{-1}_{2i-1} \cdot S^{-1}_{2i+1} \cdot S_{2i} = U_i,$$

$$\textit{lungo } B_i, \textit{ la sostituzione } S^{-1}_{2i+1} \cdot S_{2i-1} = V_i.$$

Si dimostra facilmente la relazione

$$U_1 V_1 U_1^{-1} V_1^{-1} U_2 V_2 U_2^{-1} V_2^{-1} \ldots U_\mu V_\mu U_\mu^{-1} V_\mu^{-1} = 1,$$

la quale non esprime altro, se non che per un accerchiamento del punto A ogni ramo si trasforma in sè medesimo.

Le sostituzioni U_i e V_i possono prendersi nella forma

$$U_i = S^{-1}_{2i-1} (t_w\, t_1\, t_2 \ldots t_{2i}\, t_{2i-1})\, S_{2i-1},$$

$$V_i = S^{-1}_{2i+1} (t_{2i-1}\, t_{2i})\, S_{2i+1},$$

da cui risulta che la prima è simile ad un prodotto di $2i+2$ trasposizioni, l'ultima ad un prodotto di due.

Il gruppo generato dalle sostituzioni U_i, V_i, cioè il gruppo di monodromia di y sulla superficie F', è perciò contenuto nel gruppo alterno. Ma si può facilmente provare che esso è identico al gruppo alterno. Infatti, per il teorema di Lüroth, le linee $l_1, l_2, \ldots, l_w$ possono sempre scegliersi in modo, che risultino

$$t_w = (y_1\, y_2),\ t_1 = (y_1\, y_2),\ t_2 = (y_1\, y_3),\ t_3 = (y_1\, y_3), \ldots$$

$$\ldots, t_{2n-6} = (y_1\, y_n),\ t_{2n-5} = (y_1\, y_{n-1})$$

e le seguenti trasposizioni t tutte eguali ad $(y_1\, y_n)$. Ma, per questa scelta di linee l, troviamo

$$(1) \quad \begin{cases} U_1 = (y_1\, y_2\, y_3),\ U_2 = (y_1\, y_3\, y_4),\ \ldots,\ U_{n-2} = (y_1\, y_{n-1}\, y_n), \\ V_1 = (y_1\, y_3\, y_2),\ V_2 = (y_1\, y_4\, y_3),\ \ldots,\ V_{n-2} = (y_1\, y_n\, y_{n-1}), \end{cases}$$

mentre tutte le rimanenti sostituzioni U_i, V_i si riducono alla identità. Ora tutte le sostituzioni (1) generano, come è facile vedere, il gruppo alterno, dal che segue la verità della nostra asserzione.

Le considerazioni da noi fatte potranno alcun poco modificarsi introducendo fin da principio la superficie F' come quella superficie che rappresenta la diramazione del prodotto di differenze $\prod_{i \gtrless k} (y_i - y_k)$. È anche da osservarsi che il presupposto ipotetico di una funzione y diramata secondo la F, si sarebbe anche potuto evitare, in quanto i teoremi di questo paragrafo non esprimono in fondo che delle semplici relazioni topologiche fra le superficie F ed F'.

§ 2.

Il caso $n = 3$.

Se ora la superficie F vien supposta a *tre* fogli, quindi $n = 3$, le sostituzioni U_i, V_i saranno tutte quante potenze della sostituzione ciclica

$$S = (y_1\, y_2\, y_3).$$

Perciò l' espressione Lagrangiana

$$(1) \qquad z = y_1 + \alpha y_2 + \alpha^2 y_3,$$

dove α indica una radice terza imaginaria dell' unità, è una funzione non diramata sulla superficie F', la quale, per il passaggio di una delle linee A_i, B_i acquista un fattore $\alpha^k (k = 0, 1, 2)$.

La funzione z è quindi una funzione radicale del terzo grado sopra la superficie F'. Ma questa funzione si sa notoriamente esprimere mediante integrali di terza specie, oppure anche mediante funzione ϑ (¹). Noi tentiamo la rappresentazione nel caso, in cui y diventi semplicemente infinita in $p + 1$ punti di diramazione $a_1, a_2, \ldots, a_{w+1}$ sopra la superficie F. La somma $y_1 + y_2 + y_3$ è allora una funzione razionale di x, che può diventare infinita, e propriamente dell' ordine $\frac{1}{2}$ al più, soltanto per $x = a_1, a_2, \ldots, a_{p+1}$, e che perciò si riduce ad una costante. Aumentando y di una opportuna costante, otteniamo che diventi

$$(2) \qquad y_1 + y_2 + y_3 = 0.$$

Il genere μ della superficie a due fogli F' è

$$\mu = \frac{w}{2} - 1 = p + 1.$$

Indichino ora

$$u_1, u_2, \ldots, u_\mu$$

gli integrali normali di prima specie della superficie F', determinati secondo Riemann, ponendo a base il suindicato ritaglio della superficie F'. Siano inoltre

$$u_\nu^{(k)} \; (k = 1, 2, \ldots, p + 1)$$

(¹) Riemann, Theorie der Abel'schen Functionen, art. 25 e 26.

i valori dell' integrale u_ν nei punti di diramazione $a_1, a_2, \ldots, a_{p+1}$, e sia, finalmente,

$$e_\nu = \Sigma_k u_\nu^{(k)}. \tag{3}$$

La funzione radicale (1) si esprime allora per quoziente di funzioni ϑ nella forma

$$y_1 + \alpha y_2 + \alpha^2 y_3 = c \cdot \frac{\vartheta(u_\nu - e_\nu - g_\nu \pi i - \sum_1^\mu h_\rho a_{\nu\rho})}{\vartheta(u_\nu - e_\nu)} \cdot e^{-2\sum_1^\mu h_\nu (u'_\nu - e_\nu)}, \tag{4}$$

dove è c una costante, e $g_1, \ldots, g_\mu, h_1, \ldots, h_\mu$ denotano terze parti di numeri interi.

Per via opportuna, la quale conduca da un posto della superficie al posto corrispondente sull' altro foglio, si scambieranno y_2 ed y_3 fra loro. Se contemporaneamente si trasformano $u_1, \ldots, u_\mu$ in $u'_1, \ldots, u'_\mu$, otteniamo dalla (4)

$$y_1 + \alpha^2 y_2 + \alpha y_3 = c \cdot \frac{\vartheta(u'_\nu - e_\nu - g_\nu \pi i - \sum_1^\mu h_\rho a_{\nu\rho})}{\vartheta(u'_\nu - e_\nu)} \cdot e^{-2\sum_1^\mu h_\nu (u'_\nu - e_\nu)}. \tag{5}$$

Ora è, notoriamente,

$$u_\nu + u'_\nu \equiv 2u_\nu^{(1)} \equiv 2u_\nu^{(2)} \equiv \ldots \equiv 2u_\nu^{(p+1)} \equiv 2u_\nu^{(p+2)} \quad , \quad (\nu = 1, 2, \ldots, \mu), \tag{6}$$

dove il segno di congruenza si riferisce ai periodi degli integrali ed $u_\nu^{(p+2)}$ indica il valore di u_ν nel punto di diramazione a_{p+2}. Inoltre noi possiamo supporre [1]

$$e_\nu = \sum_{k=1}^{p+1} u_\nu^{(k)} = u_\nu^{(p+2)}. \tag{7}$$

Dalle (6) e (7) segue:

$$u'_\nu - e_\nu \equiv -(u_\nu - e_\nu) - 2(e_\nu - u_\nu^{(p+2)}) \equiv -(u_\nu - e_\nu). \tag{8}$$

E con ciò, poichè ϑ è una funzione pari, la equazione (5) si trasforma in

$$y_1 + \alpha^2 y_2 + \alpha y_3 = c \cdot \alpha' \cdot \frac{\vartheta(u_\nu - e + g_\nu \pi i + \sum_1^\mu h_\rho a_\rho}{\vartheta(u_\nu - e_\nu)} \cdot e^{2\sum_1^\mu h_\nu (u_\nu - e_\nu)}, \tag{9}$$

dove indica α' una radice cubica dell' unità.

---

(1) Cfr. C. Neumann: Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale (Leipzig, 1884) pag. 367.

Dall' equazioni (2), (4) e (9) noi ricaviamo ora y_1, y_2, y_3 e risulta precisamente, designando con y una di queste grandezze opportunamente scelta,

$$(10)\quad y = c\left[\frac{\vartheta(u_\nu - e_\nu - g_\nu \pi i - \sum_1^\mu h_\rho a_{\rho\nu})}{\vartheta(u_\nu - e_\nu)} \cdot e^{-2\sum_1^\mu h_\nu (u_\nu - e_\nu)}\right.$$

$$\left. + \frac{\vartheta(u_\nu - e_\nu + g_\nu \pi i + \sum_1^\mu h_\rho a_{\nu\rho})}{\vartheta(u_\nu - e_\nu)} \cdot e^{2\sum_1^\mu h_\nu (u_\nu - e_\nu)}\right].$$

L'espressione (10), che abbiamo trovata per y, soddisfa anche, come subito si vede, a tutte le condizioni richieste: essa rappresenta una funzione algebrica di x a tre valori, che possiede $a_1, a_2, \ldots, a_w$ come punti semplici di diramazione.

I numeri $g_1, g_2, \ldots, g_\mu, h_1, h_2, \ldots, h_\mu$ possono ricevere tutti i valori della forma

$$g_1 = \frac{\varepsilon_1}{3},\ g_2 = \frac{\varepsilon_2}{3}, \ldots, g_\mu = \frac{\varepsilon_\mu}{3},\ h_1 = \frac{\eta_1}{3},\ h_2 = \frac{\eta_2}{3}, \ldots, h_\mu = \frac{\eta_\mu}{3},$$

dove $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\mu, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\mu$ indicano dei numeri interi non tutti nulli ad un tempo. Ma siccome l' espressione (10) rimane inalterata quando in luogo del sistema (g, h) si sostituisce $(-g, -h)$, e cambia soltanto per un fattor costante, quando si aumenta o si diminuisce di un' unità uno dei numeri g, h, così otteniamo esattamente

$$\frac{3^{2\mu} - 1}{2} = \frac{3^{w-2} - 1}{2}$$

funzioni y diverse, appunto quante superficie diverse a tre fogli con n dati punti di diramazione esistono secondo il § 5 della Parte Prima.

§ 3.

Il caso $n = 4$.

Consideriamo adesso il caso di $n = 4$. Il problema è quello di determinare una funzione algebrica y, la quale sia diramata come una data superficie F a quattro fogli coi punti di diramazione $a_1, a_2, \ldots, a_w$. Noi supporremo ancora che la funzione y da determinare divenga infinita del primo ordine nei punti

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{p+1}\quad \left(p = \frac{w}{2} - 3\right).$$

Se indichiamo con y_1, y_2, y_3, y_4 i valori che y acquista in quattro punti sovrapposti della superficie F, i quadrati delle quantità

$$(1)\qquad \begin{cases} z = z_1 = y_1 - y_2 - y_3 + y_4, \\ z_2 = y_1 - y_2 + y_3 - y_4, \\ z_3 = y_1 + y_2 - y_3 - y_4, \end{cases}$$

per un giro intorno ad uno dei punti $a_1, a_2, \ldots, a_n$ subiscono una permutazione, la quale consiste in uno scambio tra due di essi. Perciò z_2 è diramata come una superficie F'' a tre fogli, coi punti di diramazione semplici $a_1, a_2, \ldots, a_w$, e z medesima è, sopra F'', una funzione radicale del secondo grado, la quale diviene infinita del primo ordine nei $p+1$ punti $a_1, a_2, \ldots, a_{p+1}$. Il genere γ della superficie F'' è uguale a $p+1$. Se $u_1, u_2, \ldots, u_\gamma$ indicano gli integrali normali di prima specie della superficie F'', per una conveniente determinazione delle costanti $e_1, e_2, \ldots, e_\gamma$, risulta

$$(2)\qquad z = z_1 = c \cdot \frac{\vartheta(u_\nu - e_\nu - g_\nu \pi i - \sum_1^\gamma h_\rho a_{\nu\rho})}{\vartheta(u_\nu - e_\nu)} \cdot e^{-2\sum_1^\gamma h_\nu (u_\nu - e_\nu)},$$

dove è c una costante, e $g_1, g_2, \ldots, g_\gamma, h_1, h_2, \ldots, h_\gamma$ designano metà di numeri interî. Per brevità, indicherò con $\psi(u_\nu)$ il membro a destra della (2), e con $u_1, \ldots, u_\gamma, u'_1, \ldots, u'_\gamma, u_1'', \ldots, u''_\gamma$ i valori degli integrali di prima specie in punti sovrapposti della superficie F''. Allora, per ripetizione della equazione (2), risulta

$$(3)\qquad \begin{cases} z_1 = \psi(u_\nu), \\ z_2 = \psi(u'_\nu), \\ z_3 = \psi(u''_\nu). \end{cases}$$

Ora, poichè $y_1 + y_2 + y_3 + y_4$ è una costante, che noi possiamo supporre eguale a *zero*, seguirà finalmente, con riguardo alle (1)

$$(4)\qquad y = y_1 = \frac{1}{4}\left[\psi(u_\nu) + \psi(u'_\nu) = \psi(u''_\nu)\right].$$

Ci si convince facilmente, che questa espressione trovata per y soddisfa a tutte le condizioni; cioè, se consideriamo una qualunque superficie F'' a tre fogli semplicemente diramata nei punti $a_1, a_2, \ldots, a_w$, e costruiamo su di essa la funzione $\frac{1}{4}\left[\psi(u_\nu) + \psi(u'_\nu) + \psi(u''_\nu)\right]$, sarà questa una funzione algebrica a quattro valori, la quale è semplicemente diramata nei punti $a_1, a_2, \ldots, a_w$. Possiamo

ora facilmente computare il numero di queste funzioni. Il numero delle superficie a tre fogli, che possiamo assumere come superficie F'', ascende a

$$\frac{3^{w-2}-1}{2}.$$

Inoltre, le metà di numeri interi $g_1, g_2, \ldots, g_\gamma, h_1, h_2, \ldots, h_\gamma$ che entrano in $\psi(u_\nu)$, comportano $2^{2\gamma}-1 = 2^{w-4}-1$ determinazioni essenzialmente diverse. Otteniamo quindi, per il numero cercato, il valore

$$\frac{(2^{w-4}-1)(2^{w-2}-1)}{2},$$

il quale coincide col numero, già prima determinato (Parte I, § 5), delle superficie a quattro fogli con w punti dati di diramazione.

§ 4.

Osservazioni affini all'argomento.

Le precedenti considerazioni vanno evidentemente debitrici del loro successo a quei medesimi fatti che rendono possibile la risoluzione algebrica delle equazioni generali del 3° e 4° grado. Considerazioni analoghe si potrebbero fare per quelle superficie ad n fogli i cui gruppi di monodromia godano di particolari proprietà, su di che però non vogliamo entrare ulteriormente. Soltanto va ancora rilevata un' altra circostanza, che si rende manifesta dai nostri sviluppi. Essa consiste nel legame fra il problema, di determinare le superficie a 3 e 4 fogli con dati punti semplici di diramazione, e la trisezione delle funzioni iperellittiche. Tale legame si è già presentato, nella storia del soggetto, in un caso speciale. Il problema di determinare i fasci di forme binarie di 4° grado il cui discriminante sia una data funzione (del 6° grado nel parametro del fascio) ricade evidentemente in quello della determinazione delle superficie Riemanniane a 4 fogli di genere nullo con dati punti di diramazione. Ora quel problema si può ricondurre, come ha dimostrato Hilbert (l. c.), ad un problema trattato da Clebsch [1] Quest' ultimo richiede di porre una forma binaria di 6° grado sotto la forma $v^3 - u^2$, dove v ed u sono forme di 2° e 3° grado. Ora C. Jordan osservò che le proprietà gruppali di questo problema coincidono esattamente con quelle del problema

---

[1] *Zur Theorie der binären Formen sechster Ordnung und zur Dreitheilung der hyperelliptischen Functionen.* Math. Annalen Bd. 2, pag. 193. Cfr. anche Burkhardt: " *Grundzüge einer allgemeinen Systematik der hyperelliptischen Functionen I. Ordnung. Nach Vorlesungen von F. Klein* ". Math. Annalen Bd. 35, pag. 255.

della trisezione delle funzioni iperellittiche. Clebsch dimostrò poi anche direttamente l'intimo legame dei due problemi. Le menzionate proprietà gruppali si possono del resto ricavare, come anche ci piace notare, in base ai teoremi generali della seconda parte del presente lavoro.

PARTE QUINTA

SUPERFICIE, CHE SONO DISTESE SOPRA UNA DATA SUPERFICIE.

---

§ 1.

Introduzione e confronto di superficie F, le quali sono distese sopra una fissata superficie Φ.

Il piano dei numeri complessi si può riguardare come la più semplice superficie Riemanniana di genere *zero*. Sotto questo punto di vista, si presenta subito una generalizzazione del problema, che sta a base di tutti gli attuali svolgimenti. La generalizzazione consiste in ciò che non domandiamo più le superficie che sono distese sul piano complesso, ma quelle che lo sono sopra una data superficie Riemanniana [1]. Indicherò in ciò che segue con Φ quest'ultima, e con p il suo genere. La data superficie fissa Φ si può pensare o come di più fogli distesi sul piano complesso, od anche come una superficie anulare chiusa con p buchi, libera nello spazio. Si può anche andar più oltre e supporre la Φ come una qualunque varietà chiusa a due dimensioni di connessione $(2p+1)$ — pla [2]. L'ipotesi della superficie anulare è particolarmente comoda per talune considerazioni che appartengono all' *Analysis Situs*.

Passo ora a svolgere più da vicino la succitata generalizzazione del nostro problema. Tagliamo la superficie Φ coi tagli Riemanniani

$$A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots, A_p, B_p$$

in una superficie semplicemente connessa. Questi tagli noi faremo cominciare e terminare tutti quanti in un medesimo punto O della superficie. Indichiamo cogli indici + e — rispettivamente un passaggio dal lato negativo al positivo e dal lato positivo al negativo: così, per un giro positivo intorno al punto O, i tagli saranno oltrepassati nell'ordine

$$A_1^+B_1^+A_1^-B_1^-A_2^+B_2^+A_2^-B_2^-, \ldots, A_p^+B_p^+A_p^-B_p^-.$$

---

(1) Cfr. le Memorie di W. Dyck citate nell'introduzione.

(2) F. Klein: "*Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie*" Math. Annalen, Bd. 21, pag. 141.

È questa la medesima scelta di tagli, la quale venne più sopra (Parte IV, § 1) applicata alla superficie iperellittica F'.

Sulla superficie Φ siano ora dati w punti

$$(1) \qquad a_1, a_2, \ldots, a_w.$$

Supponiamo scelto il punto O in modo che esso non coincida con alcuno di questi w punti e congiungiamo O coi punti $a_1, a_2, \ldots, a_w$ mediante i tagli $l_1, l_2, \ldots, l_w$, i quali nè s'incontrino tra loro, nè incontrino uno dei tagli A_i, B_i. Per un giro positivo intorno al punto O, i tagli siano oltrepassati nell'ordine di successione

$$(2) \qquad l_1^+ l_2^+ \ldots l_w^+ A_1^+ B_1^+ A_1^- B_1^- \ldots A_p^+ B_p^+ A_p^- B_p^-.$$

La superficie Φ sia trasformata nella superficie Φ^* dalla effettuazione di tutti i tagli. La superficie Φ^* è semplicemente connessa, il suo limite è formato dai bordi dei tagli l, A, B.

Supponiamo ora n esemplari della superficie Φ^* tra loro coincidenti, i quali noi indichiamo in una successione qualunque come primo, secondo, ..., n^{mo} foglio.

Coordiniamo inoltre alle linee

$$(3) \qquad l_1, l_2, \ldots, l_w, A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots, A_p, B_p$$

una rispettiva sostituzione su n elementi

$$(4) \qquad S_1, S_2, \ldots, S_w, U_1, V_1, U_2, V_2, \ldots, U_p, V_p,$$

e colleghiamo finalmente gli n esemplari Φ^* lungo le linee (3) per modo che gli n fogli, per un passaggio dal lato negativo al positivo di una delle linee (3), subiscano appunto la sostituzione (4) corrispondente a questa linea. I fogli Φ^* in questo modo connessi formano una superficie n – pla distesa sulla superficie Φ, che noi indichiamo con

$$(5) \qquad F = \begin{pmatrix} l_1, & l_2, & \ldots, & l_w, & A_1, & B_1, & \ldots, & A_p, & B_p \\ S_1, & S_2, & \ldots, & S_w, & U_1, & V_1, & \ldots, & U_p, & V_p \end{pmatrix}.$$

Affinchè questa superficie sia chiusa in sè (consti di un sol pezzo) poniamo alle sostituzioni (4) la condizione di generare un gruppo transitivo, il quale ultimo si chiama il gruppo di monodromia di F per rispetto a Φ. Affinchè poi soltanto i punti $a_1, a_2, \ldots, a_w$, e non anche il punto O siano punti di diramazione su di F, limitiamo la scelta delle sostituzioni (4) maggiormente, collo stabilire che debba essere

$$(6) \qquad S_1 S_2 \ldots S_w U_1 V_1 U_1^{-1} V_1^{-1} U_2 V_2 U_2^{-1} V_2^{-1} \ldots U_p V_p U_p^{-1} V_p^{-1} = 1.$$

Se, sopra la superficie Φ, tiriamo da un punto A diverso da $a_1, a_2, \ldots, a_w$ una qualunque linea L, che, evitando i punti $a_1, a_2, \ldots, a_w$, ritorni ad A, per il percorso di questa linea i fogli di F dovranno subire una certa sostituzione S. (La totalità delle sostituzioni S forma il suddetto gruppo di monodromia di F). Tenendo fissi i punti $a_1, a_2, \ldots, a_w$, mutiamo ora il punto O, le linee (3) in esso concorrenti e le sostituzioni (4), e sia F' la superficie appartenente agli elementi alterati. Allora noi concepiremo le due superficie F ed F' come non diverse tra loro, se ad ogni linea L che incominci e termini al punto A corrisponde la medesima sostituzione S, sia rispetto alla superficie F, che alla superficie F', oppure se questa condizione può esser raggiunta mediante un opportuno cambiamento della enumerazione dei fogli di F.

Questa definizione è, come facilmente si vede, indipendente dalla scelta del punto A.

§ 2.

Calcolo del genere della superficie F.

Se consideriamo la superficie F definita nel paragrafo precedente, noi attribuiamo a ciascuno de' suoi punti di diramazione, per es. a_i, come si usa, una determinata multiplicità.

Se cioè denota c_i il numero dei cicli della sostituzione S_i, il punto di diramazione a_i si dice di multiplicità $n - c_i$. Allora il punto a_i si trova, sulla superficie F, c_i volte di più, mentre ogni altro punto di Φ comparisce sopra la superficie F esattamente n volte.

L' espressione

$$W = \sum_{i=1}^{\infty} (n - c_i) \tag{1}$$

si chiama il numero delle diramazioni semplici della superficie F. Conformemente alla sua generazione la superficie F ammette una divisione in

$$f = n$$

campi semplicemente connessi di cui ognuno singolarmente è un esemplare della superficie Φ.*

I vertici di questa divisione in campi risultano costituiti dai punti a_i e dai punti O, il loro numero quindi ammonta ad

$$e = \Sigma c_i + n.$$

Il numero dei lati della divisione in campi si trova facilmente uguale a

$$k = n \cdot w + 2pn.$$

Ora, per il teorema di Eulero generalizzato, è

$$e + f = k + 2 - 2P,$$

dove P indica il genere della superficie F. Se calcoliamo P dalle precedenti equazioni, otteniamo questo risultato:

« *Il genere* P *della superficie* F *possiede il valore*

$$P = \frac{1}{2} W + n(p - 1) + 1, \tag{2}$$

dove W *designa il numero delle diramazioni semplici,* n *il numero dei fogli di* F *e* p *il genere della superficie* Φ ».

§ 3.

Il problema generalizzato ed il suo gruppo di monodromia.

Il Problema generalizzato suona ora così:

Sono dati una superficie Riemanniana Φ *e su di essa* w *punti* $a_1, a_2, \ldots, a_w$. *Si vogliono determinare quelle superficie Riemanniane, le quali siano distese secondo* n *fogli sulla superficie* Φ *e siano diramate nei posti* $a_1, a_2, \ldots, a_w$.

Le superficie da determinarsi, per quanto precede, sono coordinate singolarmente ai sistemi di $w + 2p$ sostituzioni

$$S_1, S_2, \ldots, S_w, U_1, V_1, U_2, V_2, \ldots, U_p, V_p, \tag{1}$$

che sono formate con n elementi e che soddisfano alle seguenti condizioni:

1) Il gruppo generato dalle sostituzioni (1) è transitivo.

2) Le sostituzioni soddisfanno la equazione

$$S_1 S_2 \ldots S_w U_1 V_1 U_1^{-1} \ldots U_p V_p U_p^{-1} V_p^{-1} = 1. \tag{2}$$

Qui due sistemi (1) sono da reputarsi come non diversi, quando uno può esser dedotto dall'altro per mezzo di una trasformazione (cambiamento di nome degli elementi).

Se il genere p della superficie Φ è nullo, noi siamo ricondotti al primitivo problema.

Per ottenere il gruppo di monodromia del problema generalizzato, si pensino i $3p - 3$ [1] moduli della superficie Φ e contemporaneamente i posti $a_1, a_2, \ldots, a_w$

---

[1] Questo numero è, notoriamente, da sostituirsi con O quando sia $p = 0$, e con 1 quando sia $p = 1$.

muoversi a partire da una posizione iniziale qualunque in modo continuo fino a ritornare nella posizione di origine.

Però in ciascun stadio del movimento i posti $a_1, a_2, \ldots, a_w$ devono restare fra loro distinti e la superficie Φ deve rimanere irriducibile. Se durante il movimento noi seguiamo le modificazioni delle superficie F, quando la posizione iniziale è di nuovo raggiunta, esse hanno subito soltanto uno scambio fra loro. La totalità di queste permutazioni forma il gruppo di monodromia in discorso. Ora, durante il movimento per una determinata superficie F, soltanto le linee $l_1, l_2, \ldots, l_w, A_1, \ldots, B_p$ risultano di mano in mano mutate, ma non le corrispondenti sostituzioni $S_1, S_2, \ldots, S_w, U_1, \ldots, V_p$.

Da ciò segue:

Una sostituzione del gruppo di monodromia del nostro problema sostituisce la superficie

$$F = \begin{pmatrix} l_1, l_2, \ldots, l_w, A_1, B_1, \ldots, A_p, B_p \\ S_1, S_2, \ldots, S_w, U_1, V_1, \ldots, U_p, V_p \end{pmatrix}$$

mediante la superficie

$$F' = \begin{pmatrix} l'_1, l'_2, \ldots, l'_w, A'_1, B'_1, \ldots, A'_p, B'_p \\ S_1, S_2, \ldots, S_w, U_1, V_1, \ldots, U_p, V_p \end{pmatrix}$$

dove l', A', B' *denotano un qualunque sistema di linee soddisfacenti alle medesime condizioni delle* l, A, B.

Si otterranno tutte le sostituzioni del gruppo di monodromia, se si sceglieranno per l', A', B' di mano in mano tutti i possibili sistemi di linee soddisfacenti a quelle condizioni.

Il problema generalizzato può evidentemente specializzarsi col prescrivere la specie di diramazione nei punti $a_1, a_2, \ldots, a_w$, ovvero più in generale, coll'imporre alle sostituzioni $S_1, S_2, \ldots, S_w, U_1, V_1, \ldots, U_p, V_p$ certe limitazioni. Siffatte specializzazioni sono già designate dalla circostanza che il problema generalizzato è in generale riducibile.

§ 4.

Superficie e funzioni non diramate.

In questo e nei paragrafi seguenti io voglio considerare il caso particolare, in cui i punti $a_1, a_2, \ldots, a_w$ vengano a mancare così che si tratti di superficie ad n fogli

$$F = \begin{pmatrix} A_1, B_1, \ldots, A_p, B_p \\ U_1, V_1, \ldots, U_p, V_p \end{pmatrix},$$

le quali siano non diramate sulla superficie Φ. Queste superficie sembrano avere un particolare interesse, poichè esse appartengono in modo speciale alle superficie Φ di genere più alto e dovrebbero essere chiamate a rappresentare una parte importante nella costruzione delle funzioni automorfe più semplici. (1)

Indichiamo, come prima, con Φ^* la superficie semplicemente connessa, che nasce da Φ colla introduzione dei tagli A, B. La superficie F consta di n esemplari Φ^* sovrapposti l'un l'altro, i quali sono connessi lungo le linee A, B corrispondentemente alle sostituzioni U, V. Se y denota una funzione algebrica uniforme *del posto* sovra la superficie F e se $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sono i valori, in generale diversi tra loro, che y assume negli n punti di F sovrapposti, ciascuno degli n valori $y_1, y_2, \ldots, y_n$ si lascia univocamente proseguire sulla superficie Φ^* e l'insieme dei valori della funzione y apparisce allora decomposto in n rami semplici. Questi ultimi, per il passaggio delle linee A, B, subiscono le permutazioni U, V. La determinazione della superficie F è quindi equivalente alla determinazione delle funzioni algebriche ad n valori non diramate sulla superficie Φ. Se il genere della superficie Φ è eguale ad *uno*, tutte queste superficie si ottengono per mezzo della teoria della trasformazione delle funzioni ellittiche ed il caso $p = 1$ può quindi considerarsi come trattato completamente e lasciarsi, in seguito, da parte. Per un valore arbitrario di p è stata considerata nella teoria delle funzioni Abeliane una particolare specie di funzioni non diramate, cioè le funzioni radicali. Io caratterizzerò in seguito più da vicino la posizione di queste particolari funzioni rispetto alle funzioni generali non diramate. Anzitutto vogliamo brevemente discutere il caso di $n = 2$, il quale si lascia facilmente e completamente espletare.

§ 5.

Determinazione di tutte le funzioni algebriche a due valori non diramate.

Si tratta della determinazione di tutte le superficie F, le quali sono a due fogli e non diramate sopra una data superficie Φ di genere p.

Queste superficie, una volta fissati i tagli A, B, sono coordinate una per una ai sistemi di $2p$ sostituzioni $U_1, V_1, U_2, V_2, \ldots, U_p, V_p$, le quali sono formate con due elementi, soddisfanno alla equazione

$$U_1 V_1 U_1^{-1} V_1^{-1}, \ldots, U_p V_p U_p^{-1} V_p^{-1} = 1 \tag{1}$$

(1) Io mi attengo, per quanto riguarda le denominazioni, alle più recenti pubblicazioni di F. Klein. Si vedano: " *Zur Theorie der Lamé'schen Functionen* " (Göttinger Nachrichten del 1° marzo 1890). Inoltre " *Ueber Normirung der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung* " Math. Annalen, vol. 38, I, e le " *Vorlesungen über elliptische Modulfunctionen* ", pubblicate dal sig. Fricke (Lipsia, 1890), vol. I, pag. 763.

e generano un gruppo transitivo. Se i due elementi sono 1 e 2, si hanno soltanto le due sostituzioni

$$S_1 = (1)(2) \quad ; \quad S_2 = (12)$$

e chiaramente noi possiamo scegliere ad arbitrio l'una o l'altra di queste sostituzioni per U_i, V_i. Soltanto è da escludere il caso, in cui $U_1, V_1, \ldots, U_p, V_p$ tutte quante si identificano con S_1.

Il numero delle funzioni F *raggiunge quindi* $2^{2p} - 1$ [1].

Si riesce facilmente anche a determinare le funzioni algebriche appartenenti a queste superficie. Sia F una di quelle $2^{2p} - 1$ superficie, inoltre sia y una funzione algebrica uniforme di luogo sopra F e siano y_1, y_2 i due rami univoci di y sopra Φ^*. La funzione $y_1 - y_2$ prende allora per il passaggio di uno dei tagli A, B, il fattore $+1$ o -1, è quindi una funzione radicale di 2° grado. La somma $y_1 + y_2$ è una funzione algebrica uniforme di luogo sopra la superficie Φ. Se formiamo ora, coll'applicazione delle note denominazioni Riemanniane, per la superficie Φ i ϑ-*quozienti*

$$(2) \qquad \psi = \psi(g_1, g_2, \ldots, g_p \,;\, h_1, h_2, \ldots, h_p)$$

$$= \frac{\vartheta(u_\nu - e_\nu - g_\nu \pi i - \Sigma h_\rho a_{\nu\rho})}{\vartheta(u_\nu - e_\nu)} \cdot e^{-2\Sigma h_\nu (u_\nu - e_\nu)},$$

dove $g_1, \ldots, g_p, h_1, \ldots, h_p$ denotano metà di numeri interi, sarà

$$y_1 + y_2 = 2R_1 \,, \quad y_1 - y_2 = 2\psi R_2 \,,$$

e di conseguenza sarà

$$(3) \qquad y = R_1 + \Psi R_2$$

l'espressione generale di una funzione algebrica univoca sulla superficie F. Qui designano R_1, R_2 delle funzioni algebriche monodrome della superficie Φ. Noi otteniamo le $2^{2p} - 1$ diverse superficie F, scegliendo per $(g_1, \ldots, g_p, h_1, \ldots, h_p)$ uno dopo l'altro tutti i sistemi essenzialmente diversi di metà di numeri interi. Del resto è evidente che la singola superficie F può esser già definita mediante la funzione [2]

$$(3') \qquad y = \psi(g_1, \ldots, g_p \,;\, h_1, \ldots, h_p).$$

---

[1] Cfr. per il caso $p = 2$: W. Dyck "*Ueber Aufstellung und Untersuchung von Gruppen und Irrationalität regulärer Riemann'scher Flächen*" Math. Annalen, Bd. 17, pag. 493.

[2] Le superficie a due fogli ammettono evidentemente tutte quante una trasformazione univoca in sè stesse di periodo 2 e cadono quindi tra le superficie che

I casi di $n = 3$ ed $n = 4$ si possono pure esaurire coi metodi della Parte precedente, su di che io non entrerò qui in maggiori particolari.

§ 6.

Le funzioni algebriche non diramate, che si sostituiscono linearmente per un cammino chiuso.

Si può ora rilevare anche una particolare specie di funzioni non diramate, delle quali le più semplici sono le funzioni radicali. Vogliamo considerare quelle funzioni non diramate sulla superficie Φ, i cui n rami univocamente distesi sopra Φ^* sono funzioni lineari (intere o fratte) l'uno dell'altro. Le funzioni lineari, che rappresentano gli n rami mediante un medesimo, formano evidentemente un gruppo. Ma ora si conoscono, dietro le ricerche di F. Klein, tutti i gruppi di funzioni lineari [1]. Questi, se consideriamo come non diversi i gruppi fra loro trasformabili, sono:

1) I gruppi ciclici: $y' = e^{\frac{2ik\pi}{n}} y \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$.

2) I gruppi diedrici: $y' = e^{\frac{2ik\pi}{n}} y$, $y' = -\dfrac{e^{\frac{-2ik\pi}{n}}}{y}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$.

3) Il gruppo del tetraedro.

4) Il gruppo dell' ottaedro.

5) Il gruppo dell' icosaedro.

Ai gruppi ciclici corrispondano le funzioni radicali. Le ultime esistono su tutte le superficie Φ, il cui genere è maggiore di zero, ed è notoriamente facile di trovare l' espressione generale di queste funzioni mediante funzioni ϑ. Le funzioni non diramate, le quali corrispondono ai rimanenti gruppi, esistono soltanto sopra quelle superficie Φ, il cui genere è maggiore di *uno*. Fa eccezione il gruppo diedrico $n = 2$ (*Vierergruppe*, secondo la denominazione del signor Klein), a cui corrispondono anche per $p = 1$ funzioni non diramate [2].

---

io ho studiate nel lavoro " *Ueber diejenigen algebraischen Gebilde, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen* " (Göttinger Nachr. del 5 febbraio 1887, oppure Math. Ann. Bd. 32). Io approfitto dell'occasione per citare la Nota, a me comunicata più tardi, del sig. S. Kantor, che concerne questi stessi campi algebrici. Questa è intitolata: " *Sur une théorie des courbes et des surfaces admettant des correspondances univoques* " e si trova nei Comptes rendus dell'Accademia delle Scienze di Parigi, vol. 100, pag. 343-345.

(1) F. Klein, *Vorlesungen über das Icosaeder* (Leipzig, 1884), pag. 115 e segg. Le sostituzioni del tetraedro, dell'ottaedro, dell'icosaedro, che nel testo io non dò per brevità, si trovano a pag. 42 e 43 dell'opera suddetta.

(2) Si confronti per il caso $p = 1$ una Nota di E. Picard nei Comptes rendus, vol. 90, pag. 1479.

Per dimostrare questa affermazione, consideriamo sopra la superficie Φ la superficie non diramata

$$F = \begin{pmatrix} A_1, B_1, \ldots, A_p, B_p \\ U_1, V_1, \ldots, U_p, V_p \end{pmatrix},$$

e supponiamo, che sopra F corrisponda ad uno dei detti gruppi una funzione algebrica monodroma. A questo gruppo G è allora riferito isomorficamente il gruppo di permutazioni generato da $U_1, V_1, \ldots, U_p, V_p$. Ora, se è $p=1$, questo gruppo di permutazioni, in virtù della relazione $U_1V_1U_1^{-1}V_1^{-1}=1$, ossia $U_1V_1=V_1U_1$ consiste di sole sostituzioni fra loro permutabili. Di conseguenza devono essere tutte fra loro permutabili anche le sostituzioni del gruppo G.

Perciò il gruppo G può essere soltanto un gruppo ciclico od il gruppo diedrico $n=2$. Sulla superficie Φ di genere $p=1$ possono dunque corrispondere funzioni non diramate solamente a questi gruppi.

Per quanto riguarda la dimostrazione della esistenza di funzioni non diramate, le quali corrispondano ai gruppi sopra enumerati, ci basti considerare un caso particolare. Si riconosce facilmente che il metodo seguito in questo caso si può trasportare subito al caso più generale [1].

Sia data una superficie Riemanniana Φ di genere 2. Si vuol determinare su questa superficie una funzione algebrica a sessanta valori non diramata, i cui sessanta valori situati in un punto di Φ si connettano tra loro mediante le sessanta sostituzioni icosaedrali.

Designiamo con

$$(1) \qquad S_i \; (i = 1, 2, \ldots, 120)$$

le 120 sostituzioni omogenee dell' icosaedro, con z_1 e z_2 le variabili omogenee, alle quali si riferiscono le sostituzioni. Inoltre, formiamo un gruppo di scambi tra gli n elementi

$$(2) \qquad T_i \; (i = 1, 2, \ldots, 120),$$

il quale sia isomorfo al gruppo delle sostituzioni S_i. Un tale gruppo di scambi, e precisamente per $n=120$ elementi, lo si ottiene p. es., quando si riguardino come elementi i simboli S_i e ad ogni sostituzione icosaedrale S_k si faccia corrispondere lo scambio rappresentato dalla successione S_kS_i $(i = 1, 2, \ldots, 120)$.

Prendiamo adesso nel gruppo (2) quattro sostituzioni qualunque U_1, V_1, U_2 V_2, le quali soddisfacciano alla condizione che esse generino l'intero gruppo e soddisfacciano all'equazione

$$U_1V_1U_1^{-1}V_1^{-1}U_2V_2U_2^{-1}V_2^{-1} = 1.$$

---

[1] Il medesimo è applicabile anche al caso delle superficie diramate.

Ciò è evidentemente possibile. Infatti il gruppo (1), e per conseguenza il gruppo (2), si può generare mediante due sostituzioni opportunamente scelte.

Se T_α, T_β sono due tali sostituzioni, basterà porre

$$U_1 = T_\alpha \ , \ V_1 = 1 \ , \ U_2 = T_\beta \ , \ V_2 = 1.$$

Ciò premesso, distendiamo sopra la superficie Φ la superficie ad n fogli

$$F = \begin{pmatrix} A_1 \ , \ B_1 \ , \ A_2 \ , \ B_2 \\ U_1 \ , \ V_1 \ , \ U_2 \ , \ V_2 \end{pmatrix}$$

e designiamo con $y_1, y_2, \ldots, y_n$ gli n valori che una funzione algebrica monodroma su F possiede in un punto della superficie Φ. Se descriviamo tutti i possibili cammini chiusi di questo punto sopra la superficie Φ. le $y_1, y_2, \ldots, y_n$ subiranno le permutazioni del gruppo (2). Ora poichè i gruppi (2) e (1) sono isomorfi, per un teorema del sig. Klein [1] si possono formare due funzioni omogenee:

$$Z_1 = \varphi_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad , \quad Z_2 = \varphi_2(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

le quali per una permutazione T_i delle grandezze $y_1, y_2, \ldots, y_n$ subiscono esattamente la medesima sostituzione, che z_1, z_2 per S_i.

Corrispondentemente è

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\varphi_1(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\varphi_2(y_1, y_2, \ldots, y_n)},$$

una funzione algebrica a sessanta valori non diramata sopra la superficie Φ, la quale soddisfa alle condizioni poste.

Konigsberg (in Pr.), 27 gennaio 1891.

---

[1] " *Ueber die Auflösung gewisser Gleichungen vom siebenten und achten Grade* " Math. Annalen, Bd. 15, pag. 253, e seguenti.

APPENDICE (1)

Num. 1 ; § 3.

Per dimostrare che il numero f appartenente allo spezzamento $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_i, \ldots, \nu_k, \ldots, \nu_r)$ è più piccolo del numero f' appartenente allo spezzamento contiguo $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_i + 1, \ldots, \nu_k - 1, \ldots, \nu_r)$, supponiamo che sia

$$\nu_1 \geq \nu_2 \geq \ldots \geq \nu_{j-1} > \nu_j = \nu_{j+1} = \ldots = \nu_i \geq \nu_{i+1} \geq \ldots \geq \nu_k = \nu_{k+1} = \ldots = \nu_l > \nu_{l+1} \geq \ldots \geq \nu_r.$$

Allora, evidentemente, è

$$f' = \binom{\nu_1}{2} + \ldots + \binom{\nu_i + 1}{2} + \ldots + \binom{\nu_k - 1}{2} + \ldots + \binom{\nu_r}{2}$$

$$- [\nu_1 + 2\nu_2 + \ldots + (j-1)\nu_{j-1} + j(\nu_i + 1) + (j+1)\nu_j + \ldots + i\nu_{i-1} + (i+1)\nu_{i+1}$$

$$+ \ldots + (k-1)\nu_{k-1} + k\nu_{k+1} + \ldots + (l-1)\nu_l + l(\nu_k - 1) + \ldots + r\nu_r] + n,$$

e, se da f' si sottrae il valore di f, dopo un facile calcolo, si ottiene

$$f' - f = \nu_i - \nu_k + 1 - j + l.$$

Ma si ha

$$\nu_i \geq \nu_k \qquad \text{ed} \qquad l > j,$$

quindi $f' - f$ sarà almeno eguale a 2, epperò, in ogni caso sarà $f' > f$.

---

(1) Le seguenti Note si riferiscono tutte alla Parte Prima.

Num. 2 ; § 4.

L'inversione della formola (3), che noi scriviamo nel seguente modo:

$$(3') \qquad \frac{f(w\,|\,n)}{w\,!\,n\,!} = \sum \frac{1}{r\,!} \cdot \frac{1}{n_0!} \cdot \frac{\varphi(w_1\,|\,n_1)}{w_1\,!\,n_1\,!} \cdot \ldots \cdot \frac{\varphi(w_r\,|\,n_r)}{w_r\,!\,n_r\,!}\,,$$

si effettua nel modo più facile, se ne moltiplichiamo dapprima i due membri per

$$x^w y^n = x^{w_1} y^{n_1} \cdot x^{w_2} y^{n_2} \cdot \ldots \cdot x^{w_r} y^{n_r} \cdot y^{n_0}\,,$$

e sommiamo poi per i valori

$$w_1 = 1\,,\,2\,,\ldots,\,n = 2\,,\,3\,,\ldots$$

In questo modo otteniamo l'equazione identica

$$\sum_{w,n} \frac{f(w\,|\,n)}{w\,!\,n\,!} x^w y^n = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r\,!} e^y \Big(\sum_{w,n} \frac{\varphi(w\,|\,n)}{w\,!\,n\,!} x^w y^n \Big)^r\,,$$

ossia

$$\sum_{w,n} \frac{f(w\,|\,n)}{w\,!\,n\,!} x^w y^n = e^y \left\{ e^{\sum\limits_{w,n} \frac{\varphi(w|n)}{w\,!\,n\,!} x^w y^n} - 1 \right\}.$$

Di qui ricaviamo

$$\sum_{w,n} \frac{\varphi(w\,|\,n)}{w\,!\,n\,!} x^w y^n = \log\Big[1 + e^{-y} \sum_{w,n} \frac{f(w\,|\,n)}{w\,!\,n\,!} x^w y^n\Big]\,,$$

e, sviluppando il logaritmo del secondo membro e ordinando secondo le potenze di x ed y, si ottiene per $\varphi(w\,|\,n)$ la espressione, che è data nella formola (5) del § 4.

Num. 3 ; § 4.

Per dimostrare l'identità in discorso si sviluppi ciascun termine dell'equazione identica

$$\left(e^{x_1 u} - 1\right)\left(e^{x_2 u} - 1\right) \ldots \left(e^{x_r u} - 1\right) = e^{su} - \sum_i e^{(s - x_i)u} + \sum_{i,k} e^{(s - x_i - x_k)u} - \ldots$$

secondo le potenze ascendenti di u e si eguaglino i coefficienti di u^w di sinistra a quelli di destra.

Num. **4** ; § 6.

Si indichi con σ_0 l'espressione

$$r + k_{\alpha_1} + \ldots + k_{\alpha_\lambda} + \lambda - 1$$

e con τ_0 la espressione

$$s + k_{\beta_1} + \ldots + k_{\beta_\mu} + \mu - 1.$$

Allora σ non può essere minore di σ_0, perchè altrimenti esisterebbe una superficie Riemanniana connessa di genere negativo, corrispondentemente alla prima delle equazioni (5). È quindi $\sigma \geq \sigma_0$. Parimente si ha $\tau \geq \tau_0$.

Ora, poichè $\sigma + \tau = \sigma_0 + \tau_0$, deve necessariamente essere $\sigma = \sigma_0$ e $\tau = \tau_0$.

Num. **5** ; § 6.

La dimostrazione da darsi qui esige una serie di lemmi che qui premetto.

I. « *Se* f *indica una funzione simmetrica delle* ρ *variabili* $x_1, x_2, \ldots, x_\rho$, *e se le derivate* $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_\rho}$ *sono dipendenti soltanto dalla somma* $x_1 + x_2 + \ldots + x_\rho$, *anche la stessa* f *è funzione di* $x_1 + x_2 + \ldots + x_\rho$ ».

Per l'ipotesi si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = g_1(s), \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = g_2(s), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_\rho} = g_\rho(s),$$

dove è $s = x_1 + x_2 + \ldots + x_\rho$. Ora, siccome è

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \qquad (i = 1, 2, \ldots, \rho)$$

e quindi

$$g'_1(s) = g'_i(s),$$

così $g_i(s)$ differisce da $g_1(s)$ soltanto per una costante additiva, cioè si ha

$$g_2(s) = g_1(s) + c_2, \quad g_3(s) = g_1(s) + c_3, \ldots, g_\rho(s) = g_1(s) + c_\rho.$$

Le derivate parziali della funzione f sono perciò le stesse che le derivate parziali della funzione

$$\int g_1(s)\,ds + c_2x_2 + \ldots + c_\rho x_\rho + c\,,$$

epperò ha da essere

$$f = \int g_1(s)\,ds + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_\rho x_\rho + c$$

dove c indica una costante. Ora, la funzione f è, per ipotesi, simmetrica rispetto ad $x_1, x_2, \ldots, x_\rho$: perciò deve essere $c_2 = c_3 = \ldots = c_\rho = 0$, e quindi dev' essere f una funzione di $s = x_1 + x_2 + \ldots + x_\rho$.

II. Si separino le ρ variabili $x_1, x_2, \ldots, x_\rho$ in tutti i modi possibili in due gruppi $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_\lambda}$ ed $x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_\mu}$, ammettendo anche la separazione, in cui un gruppo contenga tutte le variabili e l'altro nessuna. Per esempio, nei casi di $\rho = 1$ e $\rho = 2$, le separazioni sono le seguenti:

Primo gruppo	*Secondo gruppo*
nessuna variabile	x_1
x_1	nessuna variabile

Primo gruppo	*Secondo gruppo*
nessuna variabile	x_1, x_2
x_1	x_2
x_2	x_1
x_1, x_2	nessuna variabile

Consideriamo ora la somma

(1)
$$\psi_{a,b}(u, v \mid x_1, x_2, \ldots, x_\rho) = \sum (u + x_{\alpha_1} + \ldots + x_{\alpha_\lambda})^{\lambda-a} (v + x_{\beta_1} + \ldots + x_{\beta_\mu})^{\mu-b}\,,$$

dove la sommatoria è da estendersi a tutte le separazioni delle variabili x_1, $x_2, \ldots, x_\rho$ in due gruppi e dove u, v, a, b indicano pure delle variabili. Evi-

dentemente è

$$\psi_{a,b}(u, v \mid x_1, x_2, \dots, x_\rho) =$$

$$= \sum (u + x_{\alpha_1} + \dots + x_{\alpha_\lambda})(u + x_{\alpha_1} + \dots + x_{\alpha_\lambda})^{\lambda-a-1}(v + x_{\beta_1} + \dots + x_{\beta_\mu})^{\mu-b}$$

$$= u \sum (u + x_{\alpha_1} + \dots + x_{\alpha_\lambda})^{\lambda-a-1}(v + x_{\beta_1} + \dots + x_{\beta_\mu})^{\mu-b}$$

$$+ \sum x_{\alpha_1}(u + x_{\alpha_1} + \dots + x_{\alpha_\lambda})^{\lambda-a-1}(v + x_{\beta_1} + \dots + x_{\beta_\mu})^{\mu-b}$$

$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+ \sum x_{\alpha_\lambda}(u + x_{\alpha_1} + \dots + x_{\alpha_\lambda})^{\lambda-a-1}(v + x_{\beta_1} + \dots + x_{\beta_\mu})^{\mu-b}.$$

Se ora si raccolgono nelle ultime somme quei termini che posseggono come fattore una determinata delle variabili $x_1, x_2, \dots, x_\rho$, ad esempio la variabile x_i, si ottiene

$$x_i \sum (u + x_i + x_{\alpha_2} + \dots + x_{\alpha_\lambda})^{\lambda-a-1}(v + x_{\beta_1} + \dots + x_{\beta_\mu})^{\mu-b},$$

dove la sommatoria è da estendersi a tutte le separazioni delle $\rho - 1$ variabili

$$x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_\rho$$

in due gruppi $x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_\lambda}$ ed $x_{\beta_1}, \dots, x_{\beta_\mu}$. L'insieme dei termini moltiplicati per x_i risulta così

$$x_i \psi_{a,b}(u + x_i, v \mid x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_\rho)$$

ed otteniamo quindi la equazione

$$(2) \qquad \psi_{a,b}(u, v \mid x_1, x_2, \dots, x_\rho) = u \cdot \psi_{a+1,b}(u, v \mid x_1, x_2, \dots, x_\rho)$$

$$+ \sum_{i=1}^{\rho} x_i \psi_{a,b}(u + x_i, v \mid x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_\rho).$$

In modo analogo si ha l'equazione

$$(3) \qquad \psi_{a,b}(u, v \mid x_1, x_2, \dots, x_\rho) = v \cdot \psi_{a,b+1}(u, v \mid x_1, x_2, \dots, x_\rho)$$

$$+ \sum_{i=1}^{\rho} x_i \psi_{a,b}(u, v + x_i \mid x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_\rho).$$

III. Dimostriamo adesso il seguente teorema:

« *La somma*

$$(4)\quad \psi_{1,1}(u\,,v\,|\,x_1\,,x_2\,,\ldots,x_\rho)=\sum(u+x_{\alpha_1}+\ldots+x_{\alpha_\lambda})^{\lambda-1}(v+x_{\beta_1}+\ldots+x_{\beta_\mu})^{\mu-1},$$

considerata come funzione delle variabili $x_1\,,x_2\,,\ldots,x_\rho$, *dipende soltanto dalla somma* $x_1+x_2+\ldots+x_\rho$ ».

La somma (4) si può indicare, per brevità, con $F(x_1\,,x_2\,,\ldots,x_\rho)$. Allora si ha:

$$\frac{\partial F(x_1\,,x_2\,,\ldots,x_\rho)}{\partial x_1}=$$

$$=\sum(\lambda-1)(u+x_{\alpha_1}+x_{\alpha_2}+\ldots+x_{\alpha_\lambda})^{\lambda-2}(v+x_{\beta_1}+\ldots+x_{\beta_\mu})^{\mu-1}$$

$$+\sum(\mu-1)(u+x_{\alpha_1}+\ldots+x_{\alpha_\lambda})^{\lambda-1}(v+x_1+x_{\beta_2}+\ldots+x_{\beta_\mu})^{\mu-2}.$$

Ma la medesima espressione si ottiene per la somma

$$F(x_2+x_1\,,x_3\,,\ldots,x_\rho)+F(x_2\,,x_3+x_1\,,\ldots,x_\rho)+\ldots+F(x_2\,,x_3\,,\ldots,x_\rho+x_1)$$

quando si introduca per ciascuna delle funzioni F la propria espressione sommatoria (4). Sussiste perciò la equazione

$$(5)\quad \frac{\partial F(x_1\,,\ldots,x_\rho)}{\partial x_1}=$$

$$=F(x_2+x_1\,,x_3\,,\ldots,x_\rho)+F(x_2\,,x_3+x_1\,,\ldots,x_\rho)+\ldots+F(x_2\,,x_3\,,\ldots,x_\rho+x_1)$$

ed equazioni consimili valgono evidentemente per le derivate di $F(x_1\,,\ldots,x_\rho)$ prese rispetto alle $x_2\,,x_3\,,\ldots,x_\rho$. Ora, queste equazioni mostrano che le derivate di $F(x_1\,,\ldots,x_\rho)$ dipendono soltanto da $x_1+x_2+\ldots+x_\rho$, se noi supponiamo che ciò avvenga per il caso di $\rho-1$ variabili. Ora, poichè $F(x_1\,,x_2\,,\ldots,x_\rho)$ è una funzione simmetrica di $x_1\,,x_2\,,\ldots,x_\rho$, si riconosce, in virtù del lemma I, che il nostro teorema vale per ρ variabili, supposta la sua validità per $\rho-1$ variabili. Ma il teorema è vero per il caso di $\rho=1$, e di conseguenza è vero in generale.

Il valore di una funzione di $x_1+x_2+\ldots+x_\rho$ rimane inalterato se si pone $x_2=x_3=\ldots=x_\rho=0$ ed $x_1+x_2+\ldots+x_\rho$ in luogo di x_1. Applicando questa osservazione alla funzione (4) si ottiene

$$\psi_{1,1}(u\,,v\,|\,x_1\,,x_2\,,\ldots,x_\rho)=\sum\binom{\rho-1}{\mu}(u+x_1+x_2+\ldots+x_\rho)^{\lambda-1}v^{\mu-1}$$

$$+\sum{}'\binom{\rho-1}{\lambda}u^{\lambda-1}(v+x_1+x_2+\ldots+x_\rho)^{\mu-1},$$

e, per conseguenza,

$$\psi_{1,1}(u\,,\,v\,|\,x_1\,,\,x_2\,,\,\dots\,,\,x_\rho)=\frac{1}{v}(u+x_1+\dots+x_\rho+v)^{\rho-1}+\frac{1}{u}(v+x_1+\dots+x_\rho+u)^{\rho-1}.$$

Con ciò è dimostrata la seguente notevole identità:

$$(6)\quad \sum(u+x_{\alpha_1}+\dots+x_{\alpha_\lambda})^{\lambda-1}(v+x_{\beta_1}+\dots+x_{\beta_\mu})^{\mu-1}=(u+v+x_1+x_2+\dots+x_\rho)^{\rho-1}\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right).$$

Se in questa identità si pone $x_1=x_2=\dots=x_\rho=1$, si ottiene

$$(7)\qquad \sum\frac{\rho\,!}{\lambda\,!\,\mu\,!}(u+\lambda)^{\lambda-1}(v+\mu)^{\mu-1}=(u+v+\rho)^{\rho-1}\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right),$$

dove, nel membro a sinistra è $\mu=\rho-\lambda$ e la sommatoria si estende a $\lambda=0$, $1\,,2\,,\dots,\rho$.

Se si portano a destra i termini della (7) corrispondenti a $\lambda=0$ ed a $\lambda=\rho$, e si pone quindi $u=v=0$, si ottiene

$$(8)\qquad \sum_{\lambda=1}^{\rho-1}\frac{\lambda^{\lambda-1}}{\lambda\,!}\,\frac{\mu^{\mu-1}}{\mu\,!}=2(\rho-1)\cdot\frac{\rho^{\rho-2}}{\rho\,!}.$$

IV. Consideriamo ora inoltre la somma

$$(9)\quad \psi_{1,0}(u\,,\,v\,|\,x_1\,,x_2\,,\dots\,,x_\rho)=\sum(u+x_{\alpha_1}+\dots+x_{\alpha_\lambda})^{\lambda-1}(v+x_{\beta_1}+\dots+x_{\beta_\mu})^{\mu}$$

e dimostriamo che essa possiede il valore $(u+v+x_1+\dots+x_\rho)^\rho\cdot\frac{1}{u}$, cosicchè sussista l'uguaglianza

$$(10)\qquad \sum(u+x_{\alpha_1}+\dots+x_{\alpha_\lambda})^{\lambda-1}(v+x_{\beta_1}+\dots+x_{\beta_\mu})^{\mu}=(u+v+x_1+\dots+x_\rho)^\rho\cdot\frac{1}{u}.$$

Se supponiamo come già dimostrata questa eguaglianza per il caso di $\rho-1$ variabili $x_1\,,x_2\,,\dots,x_{\rho-1}$, dalla formola (3), scegliendo $a=1\,,\,b=0$ segue

$$\psi_{1,0}(u\,,\,v\,|\,x_1\,,\,x_2\,,\dots\,,\,x_\rho)=$$

$$=v\cdot\psi_{1,1}(u\,,\,v\,|\,x_1\,,\dots\,,\,x_\rho)+\sum x_i\psi_{1,0}(u\,,\,v+x_i\,|\,x_1\,,\dots\,,\,x_{i-1}\,,\,x_{i+1}\,,\dots\,,\,x_\rho)$$

$$=v(u+v+x_1+\dots+x_\rho)^{\rho-1}\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right)+\sum x_i(u+v+x_i+x_1+\dots+x_\rho)^{\rho-1}\cdot\frac{1}{u}$$

$$=(u+v+x_1+x_2+\dots+x_\rho)^\rho\cdot\frac{1}{u}.$$

Dall'ipotesi che la eguaglianza (10) sia vera per $\rho - 1$ variabili, segue dunque anche la sua validità per ρ variabili. Ora, siccome per $\rho = 1$ si ha

$$\psi_{1,0}(u\,,\,v \mid x_1) = u^{-1}(v + x_1) + (u + x_1)^0 v^0 = (u + v + x_1)\cdot\frac{1}{u}\,,$$

così l'equazione (10) ha luogo per ogni valore di ρ.

Se in questa equazione si pongono $x_1 = x_2 = \ldots = x_\rho = 1$, si ha

$$(11)\qquad \sum_{\lambda=0}^{\rho}\frac{\rho\,!}{\lambda\,!\,\mu\,!}(u+\lambda)^{\lambda-1}(v+\mu)^{\mu} = (u+v+\rho)^{\rho}\cdot\frac{1}{u}\,,\quad (\mu = \rho - \lambda).$$

Se si portano dall'altra banda i termini della somma (11), che corrispondono a $\lambda = 0$ ed a $\lambda = \rho$, e quindi si pone $v = 0$, si trova

$$(12)\qquad \sum_{\lambda=1}^{\rho-1}\frac{(u+\lambda)^{\lambda-1}}{\lambda\,!}\,\frac{\mu^{\mu}}{\mu\,!} = \frac{1}{\rho\,!}\Big[\Big((u+\rho)^{\rho} - \rho^{\rho}\Big)\frac{1}{u} - (u+\rho)^{\rho-1}\Big].$$

V. In virtù delle formole (2) e (3) si possono esprimere $\psi_{a+1,b}$ e $\psi_{a,b+1}$ mediante $\psi_{a,b}$. Colla replicata applicazione di quelle formole si può perciò esprimere $\psi_{a,b}$ mediante $\psi_{1,1}$ quando a e b sono dei numeri interi positivi. Così, p. es., esprimendo $\psi_{2,2}$ mediante $\psi_{1,1}$, e ricavando dalla formola (6) il valore di $\psi_{1,1}$:

$$(13)\qquad u\cdot v\,\psi_{2,2} = u\cdot v\sum\big(u + x_{\alpha_1} + \ldots + x_{\alpha_\lambda}\big)^{\lambda-2}\big(v + x_{\beta_1} + \ldots + x_{\beta_\mu}\big)^{\mu-2}$$

$$= (u+v+x_1+\ldots+x_\rho)^{\rho-2}\frac{(u+v)^2}{uv} - (u+v+x_1+\ldots+x_\rho)^{\rho-3}\sum_{i=1}^{\rho}x_i(u+v+x_i)\Big[\frac{1}{u+x_i} + \frac{1}{v+x_i}\Big].$$

VI. Le formole sviluppate ci permettono ora di mostrare che l'equazione (8) del § 6 della Parte Prima della Memoria si muta in una identità, se per $f(k_1\,,\,k_2\,,\ldots,\,k_\rho)$ introduciamo l'espressione (9) immediatamente successiva. Con questa introduzione, l'equazione (8) divisa per

$$(n+\rho-3)\,!\,\frac{k_1^{k_1+1}}{k_1\,!}\cdots\frac{k_\rho^{k_\rho+1}}{k_\rho\,!}$$

si trasforma nella seguente:

$$(14)\qquad n^{\rho-3}(n+\rho-2) = n^{\rho-4}\sum\frac{(k_1+k_2)^{k_1+k_2+1}}{(k_1+k_2)\,!}\,\frac{k_1\,!}{k_1^{k_1}}\cdot\frac{k_2\,!}{k_2^{k_2}}$$

$$+\sum\frac{1}{2}\,\frac{k_1\,!}{k_1^{k_1}}\sum_{r=1}^{k_1-1}\psi_r(k_1 \mid k_2\,,\ldots,\,k_\rho)\,,$$

dove il significato di $\psi_r(k_1 \mid k_2, \ldots, k_\rho)$ è evidentemente espresso da

$$(15) \quad \psi_r(k_1 \mid k_2, \ldots, k_\rho) = \frac{r^{r+1}\, s^{s+1}}{r!\, s!} \sum \left(r + k_{\alpha_1} + \ldots + k_{\alpha_\lambda}\right)^{\lambda-2} \left(s + k_{\beta_1} + \ldots + k_{\beta_\mu}\right)^{\mu-2}.$$

La sommazione è estesa a tutte le separazioni di $k_2, \ldots, k_\rho$ in due gruppi $k_{\alpha_1}, \ldots, k_{\alpha_\lambda}$ e $k_{\beta_1}, \ldots, k_{\beta_\mu}$, ed è $s = k_1 - r$.

Secondo la formola (13) è ora (poichè $r+s+k_2+\ldots+k_\rho = k_1+k_2+\ldots+k_\rho = n$).

$$(16) \quad \psi_r(k_1 \mid k_2, \ldots, k_\rho) = \frac{r^{r-1}\, s^{s-1}}{r!\, s!} \cdot n^{\rho-3} k_1^2 - n^{\rho-4} \sum_{i=2}^{\rho} k_i (k_1 + k_i) \frac{r^r s^s}{r!\, s!} \left(\frac{1}{r + k_i} + \frac{1}{s + k_i}\right).$$

Se si considera la formola (8) e si nota che

$$\sum_{r=1}^{k_1-1} \frac{r^r\, s^s}{r!\, s!} \frac{1}{r + k_i} = \sum_{r=1}^{k_1-1} \frac{r^r\, s^s}{r!\, s!} \frac{1}{s + k_i},$$

si ottiene oramai

$$(17) \quad \sum_{r=1}^{k_1-1} \psi_r(k_1 \mid k_2, \ldots, k_\rho) = 2(k_1 - 1) \frac{k_1^{k_1-2}}{k_1!} n^{\rho-3} - 2n^{\rho-4} \sum_{i=2}^{\rho} k_i (k_1 + k_i) \sum_{r=1}^{k_1-1} \frac{r^r\, s^s}{r!\, s!} \frac{1}{r + k_i}.$$

Se introduciamo questo valore nella (14) e dividiamo l'equazione risultante per $n^{\rho-4}$, risulta

$$(18) \quad n(n + \rho - 2) = \sum \frac{(k_1 + k_2)^{k_1 + k_2 + 1}}{(k_1 + k_2)!} \frac{k_1!}{k_1^{k_1}} \frac{k_2!}{k_2^{k_2}} + n[(k_1 - 1) + (k_2 - 1) + \ldots + (k_\rho - 1)]$$

$$- \sum \varphi(k_1, k_2),$$

dove, per brevità, si è posto

$$(19) \quad \varphi(k_1, k_2) = \frac{k_1!}{k_1^{k_1}} k_2 (k_1 + k_2) \sum_{r=1}^{k_1-1} \frac{r^r\, s^s}{r!\, s!} \frac{1}{r + k_2} + \frac{k_2!}{k_2^{k_2}} k_1 (k_2 + k_1) \sum_{r=1}^{k_2-1} \frac{r^r\, s^s}{r!\, s!} \frac{1}{r + k_1}.$$

Nella prima somma è $s = k_1 - r$, nella seconda è $s = k_2 - r$. Le sommatorie della equazione (18) si estendono a tutte le combinazioni a due a due dei numeri $k_1, k_2, \ldots, k_\rho$.

Ora si ponno esprimere le somme entranti nella (19) come derivate. È, per es., la prima somma, come facilmente si riconosce, eguale a

$$\frac{d^{k_2-1}}{du^{k_2-1}}\left[\sum_{r=1}^{k_1+k_2-1}\frac{(u+r)^{r-1}}{r\,!}\,\frac{s^s}{s\,!}-\frac{(u+k_2)^{k_2-1}}{k_2\,!}\,\frac{k_1^{k_1}}{k_1\,!}\right],\quad (s=k_1+k_2-r),$$

dove, dopo aver eseguita la derivazione, è da porre $u=-k_2$.

La somma chiusa in parentesi quadre è, secondo la formola (12), eguale a

$$\frac{(u+k_1+k_2)^{k_1+k_2}-(k_1+k_2)^{k_1+k_2}}{(k_1+k_2)\,!}\,\frac{1}{u}-\frac{(u+k_1+k_2)^{k_1+k_2-1}}{(k_1+k_2)\,!}\,.$$

Se si sostituisce questo valore, e quindi si effettua la derivazione, osservando che è

$$\frac{d^n}{du^n}\left[v\cdot\frac{1}{u}\right]=n\,!\sum_{r=1}^{n+1}\frac{(-1)^{r+1}}{(n+1-r)\,!}\,v^{(n+1-r)}\cdot\frac{1}{u^r},$$

si ottiene

$$(k_2-1)!\sum_{r=1}^{k_2}\frac{(-1)^{r+1}}{(k_2-r)!}\,\frac{(u+k_1+k_2)^{k_1+r}}{(k_1+r)\,!}\cdot\frac{1}{u^r}+(-1)^{k_2}(k_2-1)\,!\,\frac{(k_1+k_2)^{k_1+k_2}}{(k_1+k_2)\,!}\,\frac{1}{u^{k_2}}$$

$$-\frac{(u+k_1+k_2)^{k_1}}{(k_1+k_2)k_1\,!}-\frac{1}{k_2}\,\frac{k_1^{k_1}}{k_1\,!},$$

e ponendo qui dentro $u=-k_2$

$$\sum_{r=1}^{k_1-1}\frac{r^r\,s^s}{r!\,s!}\,\frac{1}{r+k_2}=-\frac{(k_2-1)\,!}{k_2^{k_2}}\sum_{r=1}^{k_2}\frac{k_1^{k_1+r}\,k_2^{k_2-r}}{(k_1+r)\,!\,(k_2-r)\,!}+(k_2-1)\,!\,\frac{(k_1+k_2)^{k_1+k_2}}{(k_1+k_2)\,!}\,\frac{1}{k_2^{k_2}}$$

$$-\frac{k_1^{k_1}}{(k_1+k_2)k_1\,!}-\frac{1}{k_2}\cdot\frac{k_1^{k_1}}{k_1\,!}.$$

Il valore della somma $\sum_{r=1}^{k_2-1}\frac{r^r\,s^s}{r\,!\,s\,!}\,\frac{1}{r+k_1}$ nasce di qui collo scambio di k_1 e

k_2. Sostituendo questi valori nella (19), risulta

$$(20)\qquad \varphi(k_1, k_2) = -\frac{k_1!}{k_1^{k_1}}\frac{k_2!}{k_2^{k_2}}(k_1+k_2)\left\{\sum_{r=1}^{k_2}\frac{k_1^{k_1+r}\,k_2^{k_2-r}}{(k_1+r)!\,(k_2-r)!} + \sum_{r=1}^{k_1}\frac{k_1^{k_1-r}\,k_2^{k_2+r}}{(k_1-r)!\,(k_2+r)!}\right\}$$

$$+ 2\frac{k_1!\,k_2!}{k_1^{k_1}k_2^{k_2}}\frac{(k_1+k_2)^{k_1+k_2+1}}{(k_1+k_2)!} - k_2 - k_1 - 2(k_1+k_2).$$

Siccome ora è

$$\sum_{r=1}^{k_2}\frac{k_1^{k_1+r}\,k_2^{k_2-r}}{(k_1+r)!\,(k_2-r)!} + \sum_{r=1}^{k_1}\frac{k_1^{k_1-r}\,k_2^{k_2+r}}{(k_1-r)!\,(k_2+r)!} = \frac{(k_1+k_2)^{k_1+k_2}}{(k_1+k_2)!} - \frac{k_1^{k_1}\,k_2^{k_2}}{k_1!\,k_2!},$$

così si ha

$$(21)\qquad \varphi(k_1, k_2) = \frac{k_1!\,k_2!}{k_1^{k_1}\,k_2^{k_2}}\frac{(k_1+k_2)^{k_1+k_2+1}}{(k_1+k_2)!} - 2(k_1+k_2).$$

Se finalmente si pone questo valore di $\varphi(k_1, k_2)$ nell' equazione (18), si riduce la medesima, come subito si riconosce ad una identità. Perciò l' equazione (14) é anche un'identità, il che era da dimostrare.

SULLO SVILUPPO DELLA FUNZIONE

$$(1-z)\,e^{z+\frac{z^2}{2}+\ldots\ldots+\frac{z^{p-1}}{p-1}}$$

NOTA

DEL

Dott. LUCIANO ORLANDO

Al teorema di Weierstrass, nella teoria delle funzioni intere, gli Autori [1] premettono, come lemma, che lo sviluppo in serie della funzione di z (variabile complessa):

$$A=(1-z)\,e^{z+\frac{z^2}{2}+\ldots\ldots+\frac{z^{p-1}}{p-1}} \tag{1}$$

è dato da:

$$A=1-\alpha_0 z^p-\alpha_1 z^{p+1}-\alpha_2 z^{p+2}-\ldots\ldots, \tag{2}$$

dove i coefficienti α_0, α_1, α_2, ... sono numeri positivi minori di 1. Qui vogliamo dare di questo lemma una dimostrazione che ci pare molto più semplice delle altre che ordinariamente se ne danno.

Se deriviamo (1), risulta:

$$A'=-e^{z+\frac{z^2}{2}+\ldots\ldots+\frac{z^{p-1}}{p-1}}+(1-z)(1+z+\ldots+z^{p-2})e^{z+\frac{z^2}{2}+\ldots\ldots+\frac{z^{p-1}}{p-1}}=$$

$$=(1-z^{p-1}-1)\,e^{z+\frac{z^2}{2}+\ldots\ldots+\frac{z^{p-1}}{p-1}}=-z^{p-1}e^{z+\frac{z^2}{2}+\ldots\ldots+\frac{z^{p-1}}{p-1}}.$$

Ponendo

$$w=z+\frac{z^2}{2}+\ldots+\frac{z^{p-1}}{p-1}, \tag{3}$$

---

[1] V. per es. Borel — Fonctions entières.

noi possiamo dire che e^w può svilupparsi in serie esponenziale, secondo le potenze ascendenti di w, ma vogliamo anche vedere se, posta in tale serie invece di w la sua espressione in z, ne risulti una serie uniformemente convergente pure in z.

A un valore reale positivo z_1 di z corrisponde per la (3) un valore reale positivo di w, e sia w_1. Centro l' origine, descriviamo un cerchio che passi per il punto z_1. Quando z varia nell' interno di tale cerchio, w non assume valori tali che sia $|w| > w_1$. Ora svolgiamo e^{w_1} in serie esponenziale. Per la convergenza di tale serie, può trovarsi un numero n, tale che se R_n indica il resto di là del termine n^{mo}, sia (prestabilito ad arbitrio k):

$$R_n < k.$$

Sostituiamo a w_1 la sua espressione nella z_1, indicata dalla (3); e nello sviluppo raccogliamo le potenze simili di z_1, e ordiniamo secondo le potenze ascendenti, ciò che è lecito perchè tutti i termini dello sviluppo sono positivi. Le potenze di z_1 d' esponente superiore a $n(p-1)$ sono tutte comprese in R_n, sicchè, denotando in generale con r_μ il resto della nuova serie di là del termine μ^{mo}, sarà:

$$r_{n(p-1)} < R_n < k.$$

Ciò dimostra la convergenza di questa nuova serie. Ma, qualunque sia z interno al suddetto cerchio z_1, i termini della corrispondente serie hanno moduli rispettivamente non maggiori dei termini di questa con z_1, dunque è provato che, entro ogni cerchio di raggio z_1 finito, la serie è uniformemente convergente. Ma è dunque evidente l' integrabilità di $A' = -z^{p-1}e^w$, dove sia e^w svolta in serie secondo le potenze ascendenti di z.

La serie integrale incomincia con z^p, ed ha tutti i coefficienti negativi, tranne la costante, che ora determineremo per ritrovare la funzione (1). Si ha, dunque:

$$A = c - \alpha_0 z^p - \alpha_1 z^{p+1} - \alpha_2 z^{p+2} - \ldots$$

Ma posto nella (1) $z = 0$, si ottiene $A = 1$, perciò deve anche essere $c = 1$, e si ha:

$$A = 1 - \alpha_0 z^p - \alpha_1 z^{p+1} - \alpha_2 z^{p+2} - \ldots.$$

Ma ancora, posto nella (1) $z = 1$, deve risultare $A = 0$, cioè:

$$0 = 1 - \alpha_0 - \alpha_1 - \alpha_2 - \ldots.,$$

ed, essendo le α positive, ognuna è minore di 1. Con ciò resta dimostrato lo sviluppo (2) e la condizione relativa alle α.

Messina, Ottobre 1903.

ERRATA CORRIGE alla Nota « *On Abelian Groupe* » (vedi pag. 336 di questo volume).

Nel testo di questa Nota, in luogo di H. L. Riety, deve leggersi H. L. Rietz.

Aggiungiamo anche, per quanto riguarda la Nota della Direzione, che la tesi del Sig. D'Escamard fu sostenuta dinanzi alla facoltà di matematiche di Napoli il 10 Giugno 1902, essendo stata presentata alla medesima il 30 Maggio dello stesso anno.

La Direzione.

ANNUNZI BIBLIOGRAFICI

Paolo Gazzaniga, libero docente alla Università di Padova—*Gli elementi della teoria dei numeri* — Un vol. di VIII + 408 pagine. (Padova—Verona, Fratelli Drücker 1903). Prezzo L. 8.

Sunto delle materie

§ 1. *Numeri primi e indicatori* — Divisori e multipli. Congruenze identiche rispetto ad un modulo. Numeri primi. Congruenze identiche rispetto ad un sistema di moduli. Ricerca metodica dei numeri primi. Indicatori dei diversi ordini.

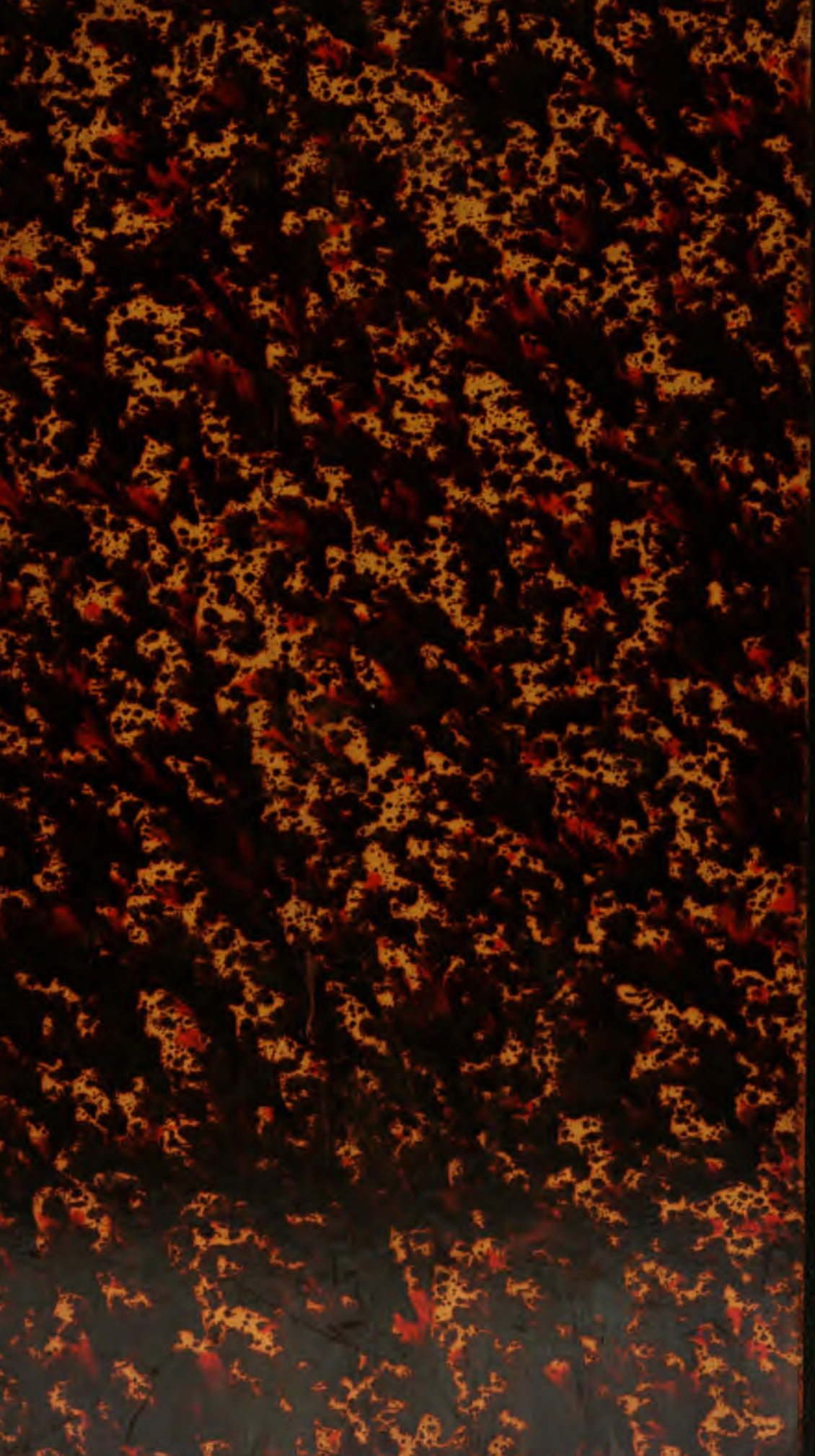
§ 2. *Analisi indeterminata di 1° grado* — La equazione di Diofante $ax + by = c$. Ricerca di una soluzione particolare della $ax + by = c$. Ricerca delle soluzioni positive della $ax + by = c$, ove a e b sono primi fra loro.

§ 3. *Generalità sulle congruenze condizionali* — Delle congruenze di grado superiore al primo. Numero delle soluzioni di una congruenza.

§ 4. *Congruenze binomie — Radici primitive — Indici* — Moduli primi dispari. Teoremi sugli indici rispetto ai moduli primi dispari. Moduli p^π. Moduli 2^δ. Moduli $m = 2^\delta p^\pi q^\varkappa \ldots$ Generalizzazione del teorema di Wilson.

§ 5. *Congruenza di 2° grado* — Leggi di reciprocità.

§ 6. *Scomposizione di un numero in somma di due quadrati.*

§ 7. *Delle frazioni continue periodiche e dei numeri algebrici di 2° grado* — Dei numeri equivalenti. Riduzione di numeri allo stesso numeratore, e composizione loro.

§ 8. *Analisi indeterminata di 2° grado* — Risoluzione dell' equazione: $t^2 - Du^2 = \sigma^2$ nel caso di $D > 0$, non quadrato perfetto, e $\sigma < 2\sqrt{D}$. Le forme quadratiche binarie. Classi di forme primitive aventi lo stesso determinante. Proprietà di un sistema completo di classi. Risoluzione in numeri interi delle